

CV14-H03260-15-P011191

AMERICAN Journal of Mathematics

(15)

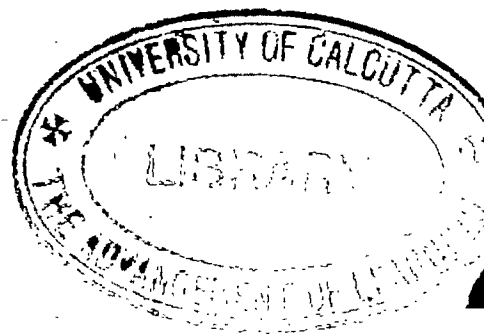
EDITED BY THOMAS CRAIG

WITH THE CO-OPERATION OF SIMON NEWCOMB

PUBLISHED UNDER THE AUSPICES OF THE JOHNS HOPKINS UNIVERSITY

Πραγμάτων ἔλεγχος οὐ βλεπομένων

VOLUME XVI



BALTIMORE: THE JOHNS HOPKINS PRESS

B. WESTERMANN & CO., *New York*
D. VAN NOSTRAND CO., *New York*
E. STEIGER & CO., *New York*
G. E. STECHERT, *New York*
A. C. MCCLURG & CO., *Chicago*

KEGAN PAUL, TRENCH, TRÜBNER & CO., *London*
A. HERMANN, *Paris*
GAUTHIER-VILLARS, *Paris*
MAYER & MÜLLER, *Berlin*
KARL J. TRÜBNER, *Strassburg*

1894

PRESS OF THE FRIEDENWALD CO.,
BALTIMORE, MD.

P11191

Zur Kettenbruchentwicklung hyperelliptischer und ähnlicher Integrale.

VON EDWARD B. VAN VLECK.

VORWORT.

Bei der Betrachtung Lamé'scher Polynome wurde Heine* zum Studium einer Darstellung der Funktion

$$\frac{1}{\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)}} \int_{\infty}^x \frac{(\rho_1 x + \rho) dx}{\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)}}$$

in der Nachbarschaft ihres Verzweigungspunktes im Unendlichen durch einen approximierenden Kettenbruch geführt; hernach wurden die hierbei hervortretenden Resultate durch ihn selbst, Heun und Humbert erweitert. In diesen Untersuchungen liegt implicit eine directe Approximation des betreffenden Integrals mittelst algebraischer Funktionen. In der That geben die Näherungsbrüche der obigen Funktion nach Multiplication mit $\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)}$ eine Annäherung an das in ihr enthaltene Integral. Auf solche Weise betrachtet findet die Theorie ein tieferes Verständnis und gewinnt eine neue Bedeutung und Wichtigkeit, welche analytisch und geometrisch zu entwickeln die Absicht des Verfassers der vorliegenden Abhandlung ist. Man wird finden, dass die früher abgeleiteten Resultate nur ein kleiner Teil einer weiter reichenden Theorie sind.

Die erste Anregung zu diesen Untersuchungen erhielt der Verfasser durch Prof. Klein, der im Wintersemester 1890–91 geometrische Methoden zum Studium der linearen Differentialgleichungen entwickelte und dabei die Ansicht äusserte, es möchten ähnliche Ansätze bei Untersuchung der vorbezeichneten Kettenbruchentwickelungen nützlich sein. Ich verweise übrigens auf das unten

* Vgl. die historischen Bemerkungen des zweiten Kapitels.

folgende Kapitel III und wende mich gleich zur näheren Darlegung der hier folgenden Entwicklungen.

Im *ersten Kapitel* werden wir das Integral

$$\int \frac{W_{r-2}(x) \cdot dx}{(x - e_1)^{1-\lambda_1} \dots (x - e_{r+1})^{1-\lambda_{r+1}}}$$

nicht nur durch solche algebraische Funktionen näherungsweise darstellen, welche in der Nachbarschaft eines einzelnen Verzweigungspunktes approximieren, sondern auch durch solche algebraische Funktionen, die dies in der Nähe mehrerer Verzweigungspunkte zu gleicher Zeit thun. Auf diese Weise wird eine mehrfach unendliche Mannigfaltigkeit von Integralen coordiniert und verknüpft. Dabei ergibt sich eine enge Verbindung derselben mit der modernen Theorie der Gruppen und der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Hierauf folgt im *zweiten Kapitel* ein kurzer Ueberblick über die betreffende Literatur. Im *dritten Kapitel* wird sodann der Grund zu einer vollständig neuen, geometrischen Behandlung des Gegenstandes gelegt. Hierauf werden die Kettenbrüche, ihre Irregularitäten, die Wurzeln der in den Restintegralen auftretenden Polynome, u. s. w. geometrisch behandelt und auf diesem Wege für sie eine Reihe grossenteils neuer Sätze gefunden.

In einer späteren Abhandlung gedenke ich Riemann's Relation

$$(P^a P_1^{a_1} - P^a P_1^{a_1})(1 - x)^{-\bar{a}} x^{-\bar{a}} = F(x),$$

wo $F(x)$ eine ganze rationale Funktion bedeutet, auf P -Funktionen auszudehnen, die eine beliebige Anzahl von Verzweigungspunkten besitzen. Es wird sich dann zeigen, dass sich die Theorie unserer jetzigen Kettenbrüche gewissermassen auf einen speciellen Fall dieser Relation gründet.

KAPITEL I.

ANALYTISCHE ENTWICKELUNGEN.

(A). Die Näherungsfunktionen.

Es sei ein Integral

$$\int \frac{W_{r-2}(x) \cdot dx}{(x - e_1)^{1-\lambda_1} \dots (x - e_r)^{1-\lambda_r}}$$

gegeben, wo $e_1, \dots, e_r, \lambda_1, \dots, \lambda_r$ beliebige reelle oder imaginäre Werte haben sollen und wo $W_{r-2}(x)$ ein Polynom mit reellen oder imaginären Coefficienten

bedeutet, das in x von dem durch den Index angegebenen Grade ist. Wenn wir dies Integral in der Nachbarschaft eines seiner Verzweigungspunkte e_1, \dots, e_r, ∞ , z. B. bei e_i in eine Reihe $A_0 + A_1(x - e_i)^{\lambda_i} + A_2(x - e_i)^{\lambda_i + 1} + \dots$ entwickeln, so werden wir sagen, dass eine Näherungsfunktion in der Nachbarschaft dieses Verzweigungspunktes dasselbe mehr oder weniger approximiert, je nachdem ihre Reihenentwicklung in der Nähe dieses Punktes in einer grösseren oder kleineren Anzahl von Gliedern mit der obigen übereinstimmt. Die Integrationsconstante A_0 werden wir gleich Null setzen, oder, wie wir lieber sagen wollen, wir werden die beiden Reihen ohne Rücksicht auf ihr constantes Glied vergleichen. Unter der *Ordnung der Annäherung* verstehen wir dann den um λ_i verminderten Exponenten der ersten Potenz von $x - e_i$, welche in dem *Reste* auftritt, d. h. in der Differenz des Integrals und der Näherungsfunktion.

Der Verzweigungspunkt ∞ spielt dabei genau dieselbe Rolle wie die e . Um die scheinbare Ausnahmestellung, die derselbe bei der allgemein gebräuchlichen Bezeichnungsweise einnimmt, auch äusserlich zu vermeiden, führen wir sogleich homogene Coordinaten ein, indem wir setzen:

$$x = \frac{ax'_1 + bx'_2}{cx'_1 + dx'_2}.$$

Das obige Integral verwandelt sich dadurch in eine Form nullter Dimension in x'_1, x'_2 oder in eine Funktion von $x' = \frac{x'_1}{x'_2}$, nämlich

$$\int \frac{W_{r-2}(x'_1, x'_2) \cdot (x'_1 dx'_2)}{(x'_1 - e'_1 x'_2)^{1-\lambda_1} \dots (x'_1 - e'_r x'_2)^{1-\lambda_r} (x'_1 - e'_{r+1} x'_2)^{1-\lambda_{r+1}}}$$

wo die

$$e'_1, \dots, e'_r, e'_{r+1}$$

den

$$e_1, \dots, e_r, \infty$$

entsprechen und wo

$$\sum_{i=1}^{i=r+1} \lambda_i = 1$$

ist. Wir werden in Zukunft die Accente weglassen und das Integral abkürzend mit $F(x)$ bezeichnen. Wenn es nötig oder wünschenswert ist, die homogene Schreibweise zu verlassen, so z. B. wenn man die Entwicklung in der Nähe nur eines Verzweigungspunktes sucht, wird es genügen

$$x_1 = x, \quad x_2 = 1$$

zu setzen.

Wir werden jetzt zunächst unsere Aufmerksamkeit auf die einfachsten Annäherungsfunktionen richten, nämlich die algebraischen. Man wolle sich der Allgemeinheit halber die λ als gebrochene oder gar als irrationale Zahlen denken, so dass unser Integral in der Umgebung der Verzweigungspunkte keineswegs eindeutig ist. Damit auch in einem solchen Falle unsere Definition der Approximation eine feste und bestimmte Bedeutung habe, werden wir nur solche algebraische Funktionen betrachten, die das Integral unabhängig davon approximieren, ob x irgend einen geschlossenen Umlauf in seiner Ebene macht oder nicht. Da das Integral—bei Vernachlässigung der additiven Constanten—den Faktor $e^{2\pi i \lambda_i}$ aufnimmt, wenn x einen Umlauf um e_i beschreibt, muss die algebraische Funktion bei diesem Umlauf gleichzeitig denselben Faktor aufnehmen, sich also in der Nähe von e_i verhalten wie $(x - e_i)^{\lambda_i + n} P(x - e_i)$, wo n Null oder irgend eine positive oder negative ganze Zahl ist und P eine nach ganzen positiven Potenzen von $x - e_i$ fortschreitende Reihe ist. Erinnern wir uns, dass eine Funktion eine Form von nullter Dimension ist und dass

$$\sum \lambda = 1,$$

so schliessen wir hieraus ohne weiteres:

PROP. I.—Die allgemeinste algebraische Funktion, welche zwecks Approximation der Funktion $F(x)$ bei uns in Betracht kommt, hat die Form

$$\frac{U_{q-1}(x_1, x_2)}{V_q(x_1, x_2)} \prod_{i=1}^{i=r+1} (x_1 - e_i x_2)^{\lambda_i},$$

wo U_{q-1} und V_q Formen in x_1 und x_2 von den angezeigten Graden sind.

Die $2q + 1$ Coefficienten in U_{q-1} und V_q stehen hier zu unserer Disposition und wir können darüber je nach der Art der gesuchten Approximation verfügen. Aus Gründen, die später hervortreten werden, wird es erwünscht sein, dass V_q beliebige positive ganzzahlige Potenzen der Binome $x_1 - e_i x_2$ als Faktoren enthält, zum Beispiel die n_{r+1}^{ste} Potenz von $x_1 - e_{r+1} x_2$, die n_r^{te} von $x_1 - e_r x_2$, bis zur n_{i+1}^{sten} Potenz von $x_1 - e_{i+1} x_2$. Wir wollen deshalb als allgemeinsten Ausdruck der zu betrachtenden Funktion

$$\frac{U_p(x_1, x_2)}{V_q(x_1, x_2)} (x_1 - e_1 x_2)^{\lambda_1} \dots (x_1 - e_i x_2)^{\lambda_i} (x_1 - e_{i+1} x_2)^{\lambda_{i+1} - n_{i+1}} \dots (x_1 - e_{r+1} x_2)^{\lambda_{r+1} - n_{r+1}}$$

annehmen, wo n_{i+1}, \dots, n_{r+1} positive ganze Zahlen sind und

$$p = q - 1 + \sum n.$$

U_p und V_q , wie sie von der einzelnen Lösung geliefert werden, keineswegs ohne gemeinsamen Faktor zu sein brauchen. Vielmehr kann man leicht zeigen, dass die hier resultierenden Lösungen alle identisch werden, sobald man in einer jeden die gemeinsamen Faktoren von U_p und V_q entfernt hat. Sei wie früher $U_{p-\omega_1}$, $V_{q-\omega_1}$ eine Lösung, deren Annäherungsordnung $p + q + 1 - \omega_1$ niedriger oder mindestens ebenso niedrig ist wie die einer anderen Lösung U', V' . Die Wiederholung der Schritte des letzten Paragraphen zeigt dann, dass

$$\frac{U'}{V'} = \frac{U_{p-\omega_1}}{V_{q-\omega_1}},$$

ist und auch ferner, dass kein Polynom U_p, V_q innerhalb der Grenze der für q' gewünschten Grade eine grössere Annäherung liefern kann. So ist das in Prop. II ausgesprochene Theorem als ausnahmslos gültig bewiesen.

Ein wichtiges Corollar, das aus unserer Beweismethode sich ergibt, ist folgendes: Wenn U_p und V_q ohne gemeinsamen Teiler angenommen werden, dann ist die Ordnung der Annäherung, die von der möglichst gut approximierenden Funktion erreicht wird, grösser als die Summe der Grade von U_p und V_q . Aber hauptsächlich ist die Umkehrung dieses Satzes von Nutzen:

PROP. III.—*Irgend eine algebraische Funktion*

$$\frac{U_p(x_1, x_2)}{V_q(x_1, x_2)} (x_1 - e_1 x_2)^{\lambda_1} \dots (x_1 - e_{r+1} x_2)^{\lambda_{r+1} - n_{r+1}},$$

welche in der Nähe des Verzweigungspunktes e_1 von einer höheren Ordnung approximiert, als die Summe der Grade des Zählers und Nenners in dem zugehörigen $\frac{U_p}{V_q}$ angiebt, ist notwendig die bestapproximierende von allen algebraischen Funktionen derselben Klasse, bei denen der Grad von V den Wert q nicht übersteigt.

Zum Beweise ist es nur nötig zu bemerken, dass die $p + q + 1$ Bedingungen auf Seite 5 notwendig sind, um eine so hohe Annäherung zu erreichen, während wir andererseits gerade eben gelernt haben, dass diejenige algebraische Funktion, für welche die Coefficienten von U_p und V_q diese $p + q + 1$ Bedingungen erfüllen, am besten approximiert, so lange ihr q' innerhalb der vorgeschriebenen Grenze liegt, mag nun die Ordnung der Approximation den Wert $p + q + 1$ erreichen oder nicht.

Die bestapproximierenden Funktionen einer gegebenen Klasse kann man jetzt, entsprechend den successiven ganzzahligen Werten von q , die man als

Grenzen für q' festsetzt, in eine Reihe anorden. Dabei ist aber zu beachten, dass dieselbe Funktion zu verschiedenen Werten der Grenze q gehören kann, wenn auch umgekehrt für jede Grenze q nur eine zugehörige Funktion in der betrachteten Klasse existiert. Wir haben daher zunächst die Absicht zu untersuchen, wie oft dieselbe Funktion in einer Klasse auftreten kann. Es wird dabei wünschenswert sein, U_p und V_q ohne gemeinsamen Teiler anzunehmen, was wir durch \overline{U}_p und \overline{V}_q andeuten werden. Bezeichnen dann p und q auch wieder die Grade der so reduzierten Polynome, so haben wir den Satz:

$$\text{Wenn} \quad \frac{\overline{U}_p(x_1, x_2)}{\overline{V}_q(x_1, x_2)} (x_1 - e_1 x_2)^{\lambda_1} \dots (x_1 - e_{r+1} x_2)^{\lambda_{r+1} - n_{r+1}}$$

von der Ordnung $p + q + \omega_1 + 1$ approximiert, so wird es als bestapproximierende Funktion gerade $\omega_1 + 1$ mal in der Klasse auftreten, nämlich für alle Grade von V , die zwischen q und $q + \omega_1$ inclusive liegen.

Nach Voraussetzung werden sich bei der Substitution von \overline{U}_p und \overline{V}_q in die Gleichung (1) alle Potenzen von $x - e_1$ bis zur $\lambda_1 + p + q + \omega_1^{\text{ten}}$ inclusive fort-heben. Multipliziert man nun \overline{U}_p und \overline{V}_q successive mit der 1^{sten}, 2^{ten}, ..., ω_1^{sten} Potenz von $x - e_1$, so werden die entsprechenden Paare von Polynomen resp. die Grade $p + 1, q + 1; p + 2, q + 2; \dots p + \omega_1, q + \omega_1$ besitzen und ihre Substitution in Gleichung (1) wird offenbar alle Potenzen von $x - e_1$ bis zur $\lambda_1 + p + q + \omega_1 + 1^{\text{sten}}$, ..., $\lambda_1 + p + q + 2\omega_1^{\text{sten}}$ zum Fortfall bringen. Entsprechend der im Beweise von Prop. III hervorgehobenen Bemerkung muss deshalb ihr gemeinsamer Quotient $\frac{\overline{U}_p}{\overline{V}_q}$ zu den bestapproximierenden Funktionen gehören, für welche der Grad von V resp. die Grenzen $q + 1, q + 2, \dots q + \omega_1$ sowie die Grenze q hat.

Was wir bisher auseinandergesetzt haben, bestand einfach darin, die gewöhnliche Methode, eine gegebene Funktion in einem ihrer nicht-singulären Punkte durch rationale Brüche zu approximieren, so zu modifizieren, dass man sie auf die Verzweigungspunkte unserer Integrale anwenden kann. Dies haben wir, nicht wie Heine und andere, dadurch erreicht, dass wir zu unserem Integral einen Faktor hinzufügten, der es eindeutig macht, sondern durch die Benutzung mehrdeutiger Approximationsfunktionen. Obgleich für unsere Integrale, wie wir im Vorwort auseinandersetzten, der Unterschied in der Behandlungsweise einfach auf eine Versetzung des Faktors vom Integral zur Approximationsfunktion hinausläuft, ist die Aenderung doch von wichtigen Folgen begleitet.

Diese Funktionen werden wir in verschiedene Klassen teilen, die durch die verschiedenen Wertsysteme der n_{i+1}, \dots, n_{r+1} charakterisiert sind. In jeder Klasse hat offenbar $p - q$ einen bestimmten Wert, und bei einem gegebenen Werte von q haben wir $p + q + 2$ willkürliche Coefficienten zur Verfügung. Diese sind dann so zu bestimmen, dass ein Maximum der Annäherung erreicht wird. Wir werden zunächst unsere Aufmerksamkeit auf die Annäherung in einem einzelnen Verzweigungspunkte, sagen wir e_1 , richten. Das bekannte Fundamentaltheorem für eine solche Annäherung wird in unserer Ausdrucksweise lauten:

PROP. II.— *Unter allen algebraischen Funktionen*

$$\frac{U_p(x_1, x_2)}{V_{q'}(x_1, x_2)} (x_1 - e_1 x_2)^{\lambda_1} \dots (x_1 - e_i x_2)^{\lambda_i} (x_1 - e_{i+1} x_2)^{\lambda_{i+1} - n_{i+1}} \dots (x_1 - e_{r+1} x_2)^{\lambda_{r+1} - n_{r+1}}$$

einer gegebenen Klasse, für die q' eine feste ganze Zahl q nicht überschreitet, kann man eine Funktion finden, welche unser Integral in dem betreffenden Verzweigungspunkt mehr approximiert als irgend eine andere Funktion derselben Art.

Um dies zu beweisen, setze man

$$q' = q, \quad x_1 = x, \quad x_2 = 1$$

und bezeichne den Rest mit $R(x)$. Man betrachte dann die Gleichung:

$$V_q(x) \cdot F(x) - U_p(x) \cdot (x_1 - e_1)^{\lambda_1} \dots (x_1 - e_{r+1})^{\lambda_{r+1} - n_{r+1}} = R(x) \cdot V_q(x). \quad (1)$$

Entwickelt man beide Glieder der linken Seite nach steigenden Potenzen von $x - e_1$, so bekommt man

$$(x - e_1)^{\lambda_1} \{ B_0 + B_1(x - e_1) + B_2(x - e_1)^2 + \dots \} - (x - e_1)^{\lambda_1} \{ C_0 + C_1(x - e_1) + \dots \} = (R(x) - A_0) V_q(x),$$

wo die B homogene lineare Funktionen aller Coefficienten von $V_q(x)$ sind, und in ähnlicher Weise die C homogene lineare Funktionen aller Coefficienten von U_p . Um eine möglichst grosse Annäherung zu erhalten, suche man jetzt die Coefficienten so zu bestimmen, dass die Reihenentwicklung von $R(x)$ hinter dem constanten Gliede mit einer möglichst hohen Potenz von $x - e_1$ beginnt und zu diesem Zwecke setzt man

$$B_0 = C_0, \dots, B_{p+q} = C_{p+q}.$$

Diese $p + q + 1$ homogenen Gleichungen zwischen $p + q + 2$ Unbekannten können immer erfüllt werden. Gewöhnlich genügen sie auch, um die Coeffi-

cienten von U_p und V_q zu bestimmen. Gesetzt, dass V_q das Binom $x - e_1$ nicht selbst noch als Faktor enthält, wird in diesem Falle die Entwicklung rechter Hand mit einer Potenz von $x - e_1$ beginnen, deren Grad, allgemein zu reden, gleich $\lambda_1 + p + q + 1$ ist, aber noch grösser ausfällt, wenn zufälliger Weise noch eine Reihe aufeinanderfolgender Bedingungen $B_i = C_i$ mitbefriedigt werden. Es wird also in diesem Falle eine und nur eine algebraische Funktion innerhalb der gewünschten Grenze für q' geben, welche von der Ordnung $p + q + 1$ oder einer höheren approximiert. Wenn V_q ausnahmsweise gerade durch $x - e_1$ teilbar sein sollte, sagen wir durch $(x - e_1)^{\omega_1}$, dann müssen $B_0, \dots, B_{\omega_1-1}$ alle Null werden und deshalb auch die $C_0, \dots, C_{\omega_1-1}$. Infolgedessen wird dann U_p dieselbe Potenz von $x - e_1$ enthalten. Dieser gemeinsame Faktor mag jetzt entfernt werden, indem man die Polynome auf $U_{p-\omega_1}$ und $V_{q-\omega_1}$ reduciert. Die in $R(x)$ hervortretende niedrigste Potenz von $x - e_1$ zeigt zu gleicher Zeit, dass eine Annäherung von der Ordnung $p + q + 1 - \omega_1$ erreicht ist; eine Ordnung, die, wie wir beiläufig bemerken, um $\omega_1 + 1$ grösser ist als die Summe der Grade von $U_{p-\omega_1}$ und $V_{q-\omega_1}$. Es soll jetzt bewiesen werden, dass keine anderen Werte von $U_{p'}$ und $V_{q'}$ innerhalb der erlaubten Grade eine so hohe Approximation liefern werden. Seien, wenn dies möglich wäre, U', V' solche Polynome. Aus den Gleichungen

$$F - \frac{U_{p-\omega_1}}{V_{q-\omega_1}} (x - e_1)^{\lambda_1} \dots (x - e_{r+1})^{\lambda_{r+1} - n_{r+1}} = R,$$

$$F - \frac{U'}{V'} (x - e_1)^{\lambda_1} \dots (x - e_{r+1})^{\lambda_{r+1} - n_{r+1}} = R',$$

leitet man die folgende ab:

$$(U_{p-\omega_1} V' - U' V_{q-\omega_1}) (x - e_1)^{\lambda_1} \dots (x - e_{r+1})^{\lambda_{r+1} - n_{r+1}} = (R' - R) V_{q-\omega_1} V'.$$

Gemäss der Voraussetzung muss nun $R' - R$ wenigstens durch $(x - e_1)^{\lambda_1 + p + q + 1 - \omega_1}$ teilbar sein und deshalb in gleicher Weise $U_{p-\omega_1} V' - U' V_{q-\omega_1}$ durch $(x - e_1)^{p + q + 1 - \omega_1}$. Dies ist aber sicher unmöglich, da es ein Polynom vom Grade $p + q - \omega_1$ oder einem noch niedrigen Grade ist. Es folgt also, dass jede Seite unserer Gleichung identisch Null sein muss; dass mithin $\frac{U'}{V'} = \frac{U_{p-\omega_1}}{V_{q-\omega_1}}$, was zu beweisen war.

Es bleibt noch der Fall zu prüfen, wo die obigen Gleichungen für die Coefficienten von U_p und V_q nicht unabhängig sind und eine einfach oder mehrfach unendliche Mannigfaltigkeit von Lösungen zulassen. Man beachte, dass die

Bei Heine haben wir ein einzelnes modificiertes Integral, das zu einer einzigen Klasse von approximierenden Funktionen führt. Unsere Auffassung führt dagegen zu einer vielfachen Mannigfaltigkeit von Klassen für dasselbe vorgelegte Integral. Diese würden nach der alten Behandlungsweise nicht coordiniert werden, insofern sie nur durch Approximation verschiedener Funktionen erhalten werden könnten.

Wir wollen jetzt den gewöhnlichen Weg ganz verlassen und unsere Aufmerksamkeit darauf richten, dass wir eine simultane Approximation in der Nachbarschaft von beliebig vielen Verzweigungspunkten e_1, \dots, e_l erhalten. Um die $p + q + 2$ Coefficienten von U_p^c and V_q zu bestimmen, hatten wir oben $p + q + 1$ Bedingungen aufgestellt, die nötig, aber nicht immer ausreichend waren, um eine Approximation der Ordnung $p + q + 1$ bei e_1 zu liefern. Anstatt nun alle diese Bedingungen anzuwenden, benutzen wir jetzt nur die ersten m_1 , die wiederum notwendig sind, um mindestens eine Approximation der Ordnung m_1 zu geben. Von den noch übrigen $p + q + 1 - m_1$ Gleichungen für die Coefficienten wählen wir dann m_2 , so dass sie die notwendigen Bedingungen für eine Approximation der Ordnung m_2 in der Nähe von e_2 liefern, und in entsprechender Weise die übrigen, bis wir $p + q + 1$ Gleichungen erhalten haben. Sofern wir U und V ohne gemeinsamen Teiler wählen, wird nur eine algebraische Funktion mit diesen Bedingungen verträglich sein. Denn nehmen wir an, es gäbe zwei, deren rationale Bestandteile $\frac{U'}{V'}$ und $\frac{U''}{V''}$ sind, so kann man leicht die Gleichung ableiten:

$$(U'V'' - U''V')(x_1 - e_1x_2)^{\lambda_1} \dots (x_1 - e_{r+1}x_2)^{\lambda_{r+1} - n_{r+1}} = V'V''(R' - R').$$

Entsprechend den ersten m_1 Bedingungen muss die erste Potenz, die in der nach steigenden Potenzen von $x - e_1$ fortschreitenden Reihenentwicklung rechter Hand auftritt, mindestens vom Grade $\lambda_1 + m_1$ sein. Daher muss $U'V'' - U''V'$ durch $(x_1 - e_1x_2)^{m_1}$ teilbar sein, aus ähnlichen Gründen durch $(x_1 - e_2x_2)^{m_2}, \dots$ oder, wenn man diese Faktoren alle zusammen nimmt, durch ein Polynom von Grade $p + q + 1$. Nun ist $U'V'' - U''V'$ selbst höchstens vom Grade $p + q$ und deshalb muss es identisch Null sein. Es folgt daraus $\frac{U'}{V'} = \frac{U''}{V''}$, wie zu beweisen war. Wir lernen so:

PROP. IV.—*Unter allen den approximierenden Funktionen*

$$\frac{U_p(x_1, x_2)}{V_q(x_1, x_2)} (x_1 - e_1x_2)^{\lambda_1} \dots (x_1 - e_lx_2)^{\lambda_l} (x_1 - e_{l+1}x_2)^{\lambda_{l+1} - n_{l+1}} \dots (x_1 - e_{r+1}x_2)^{\lambda_{r+1} - n_{r+1}}$$

in einer gegebenen Klasse, in der eine Grenze q für q' vorgeschrieben ist, ist eine einzige mit den Gleichungen verträglich, welche Approximationen der Ordnungen m_1, m_2, \dots, m_i in der Nähe der Verzweigungspunkte e_1, e_2, \dots, e_i ergeben.

Es ist wohl kaum nötig zu betonen, dass diese Gleichungen nicht immer ausreichend sind, um Approximationen von mindestens diesen Ordnungen zu liefern. Die Ordnung wird indessen, genau so wie früher, nur dann fallen, wenn V_q , wie es durch die Gleichungen bestimmt ist, Potenzen der ersten i der Binome, $x_1 - e_i x_2$, z. B. die ω_1^{ste} von $x_1 - e_1 x_2$ enthält. In diesem Falle wird die Approximation im Verzweigungspunkte e_1 sicherlich doch die Ordnung $m_1 - \omega_1$ erreichen. Zu gleicher Zeit können auch die Grade von U_p und V_q um ω_1 erniedrigt werden, wenn man sie von dem gemeinsamen Faktor $(x_1 - e_1 x_2)^{\omega_1}$ befreit. Daraus sieht man, dass die Summe der Grade von \overline{U}_p und \overline{V}_q in unserer bestapproximierenden Funktion geringer sein wird als die Summe der Ordnungen der Approximationen, die sie bewirkt. Umgekehrt wird es gelten, dass irgend eine algebraische Funktion, welche eine grössere Anzahl von Approximationsbedingungen befriedigt, als die Summe der Grade der zugehörigen \overline{U}_p und \overline{V}_q angiebt, eine unserer bestapproximierenden Funktionen ist.

Die Annäherungsfunktionen, welche wir augenblicklich betrachten, schliessen als specielle Fälle alle jene früher behandelten Funktionen ein, welche nur in der Nähe eines Punktes approximieren, und werden die Grundlage für unsere zukünftigen Untersuchungen bilden. Wir werden sie kurz *Approximanten* nennen. Es ist aus dem Vorhergehenden klar, dass bei irgend einer approximierenden Funktion die Kenntniss der n genügt, um die Differenz der Grade des entsprechenden U und V zu bestimmen, während die m bestimmen, wie viele Approximationsbedingungen die Polynome U und V in den einzelnen Verzweigungspunkten e_1, \dots, e_i zu befriedigen haben. Demgemäss können wir, wenn wir den Wert Null unter den Werten m und n zulassen, die früheren Resultate kurz folgendermassen resumieren:

PROP. V.—Die Approximanten sind eindeutig bestimmt durch die Annahme der

$$m_1, \dots, m_i, n_{i+1}, \dots, n_{r+1}.$$

Ferner ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine algebraische Funktion eine Approximante sei, die, dass sie eine grössere Anzahl von Approximationsbedingungen befriedigt, als die Summe der Grade der zugehörigen U und V angiebt.

Wir haben früher schon untersucht, wie oft eine Funktion als Approximante in einer gegebenen Klasse vorkommen kann. Das weitere Problem ist jetzt, die Methode zu finden, vermittelt derer man bestimmen kann, wann und wo dieselbe, nicht einfach in einer Klasse, sondern in der *Gesamtheit aller Klassen* vorkommen kann. Wenn zwei Approximanten gleich werden, so muss es möglich sein, jede in eine solche Gestalt zu setzen, dass sie dieselben charakterischen Zahlen m und n aufweist wie die andere. Wenn nun erstens die n in den beiden Approximanten verschieden sind, so müssen die zu der einen oder der anderen gehörigen Polynome \overline{U}_p und \overline{V}_q Faktoren $x_1 - e_{i+1}x_2, \dots, x_1 - e_{r+1}x_2$ enthalten, welche mit dem irrationalen Teile so vereinigt werden können, dass die beiden Approximanten nach der Vereinigung doch dieselben Werte n aufweisen. Ist dies geschehen, so muss die Funktion von einer Gesamtordnung approximieren, die grösser ist als die um 1 vermehrte Summe der Grade der so veränderten \overline{U}_p und \overline{V}_q . Wenn andererseits ihre n gleich sind, sind sicher ihre m ungleich. Damit dann die beiden so ausgedrückt werden können, dass auch die gleichen m auftreten, muss die eine in einem oder mehreren Verzweigungspunkten e_1, \dots, e_i , mehr Bedingungen erfüllen als ihre Zahl m verlangt, nämlich so viele als die entsprechende Zahl m der anderen fordert. Es folgt daraus wieder, dass die eine von einer grösseren Gesamtordnung approximieren muss, als die um 1 vermehrte Summe der Grade von \overline{U}_p und \overline{V}_q angiebt. Wenn gleiche Faktoren schon von vornherein entfernt waren, wird dieses noch mehr der Fall sein. Wir werden nun sagen, dass eine Approximante *in ihrer einfachsten Gestalt* dargestellt ist, wenn ihre \overline{U}_p und \overline{V}_q von gemeinsamen Faktoren befreit sind und wenn überdies alle möglichen Faktoren $x_1 - ex_2$ mit dem irrationalen Teile vereinigt sind, jedoch unter der allgemeinen Beschränkung, dass die n immer ein negatives Zeichen behalten. Bei Benutzung dieser Bezeichnungsweise haben wir:

PROP. VI.—Die Bedingung für das Auftreten gleicher Approximanten ist die, dass sie in ihrer einfachsten Form

$$\frac{\overline{U}_p}{\overline{V}_q} (x_1 - e_1 x_2)^{\lambda_1} \dots (x_1 - e_{r+1} x_2)^{\lambda_{r+1} - n_{r+1}}$$

ausgedrückt, von einer grösseren Gesamtordnung approximieren, als die um Eins vermehrte Summe der Grade von \overline{U}_p und \overline{V}_q angiebt.

Sei also jetzt eine Approximante vorgelegt, die, in ihrer einfachsten

Form ausgedrückt, den rationalen Faktor $\frac{\overline{U}_p}{\overline{V}_q}$ und die charakteristischen Zahlen $m_1, \dots, m_i, n_{i+1}, \dots, n_{r+1}$ besitzt, wo

$$\Sigma m = p + q + 1$$

ist. Wenn dieselbe dann von einer höheren Ordnung als der normalen approximiert, z. B. von der Ordnung $m_1 + \omega_1$ in der Nähe des Punktes e_1 , so werden wir den Polynomen \overline{U}_p und \overline{V}_q als gemeinsamen Faktor eins von den Binomen $x_1 - e_1 x_2, \dots, x_1 - e_{r+1} x_2$ geben. Wenn es eins von den ersten i dieser Binome ist, zum Beispiel das zweite, so werden wir ein neues

$$U_{p+1} = \overline{U}_p \cdot (x_1 - e_2 x_2) \text{ und } V_{q+1} = \overline{V}_q \cdot (x_1 - e_2 x_2)$$

erhalten, deren Substitution in Gleichung (1)—die indessen in Beziehung auf e_2 statt auf e_1 gebildet ist—alle Potenzen von $x - e_2$ bis zur $m_2 + 1^{\text{sten}}$ inclusive fortschaffen wird. $\frac{U_{p+1}}{V_{q+1}}$ kann deshalb, da es $m_1 + \omega_1, m_2 + 1, m_3, \dots, m_i$

Approximationsbedingungen, im Ganzen also $p + q + \omega_1 + 2$ befriedigt, als der rationale Teil einer Approximante mit den charakteristischen Zahlen $m_1 + 1, m_2 + 1, m_3, \dots, n_{r+1}$ betrachtet werden (Prop. IV). Hätten wir irgend ein anderes der i Binome hinzugefügt, so würde statt m_2 ein anderes von den m den Zuwachs eins erhalten haben. Wäre zum Beispiel $x_1 - e_1 x_2$ hinzugefügt, so würde m_1 einen Gesamtzuwachs von 2 erhalten haben. Wäre andererseits eins von den letzten $r - i + 1$ Binomen, z. B. $x_1 - e_{r+1} x_2$ im Zähler und Nenner hinzugefügt, dann könnte das eine, das im Zähler hinzugesetzt ist, in den irrationalen Teil der Approximante geworfen werden. Infolgedessen würde sich n_{r+1} um 1 vermindern und der rationale Teil der Approximante würde dann aus den Polynomen

$$U_p = \overline{U}_p, \\ V_{q+1} = \overline{V}_q \cdot (x_1 - e_{r+1} x_2)$$

bestehen, wobei natürlich die Summe der Grade der beiden letzten Polynome um 1 kleiner ist als die Summe von $m_1 + 1, m_2, \dots, m_i$. Mit anderen Worten, man kann den vorliegenden Fall so auffassen, als ob die Polynome zu der Approximante $(m_1 + 1, m_2, \dots, n_r, n_{r+1} - 1)$ gehörten. Wäre der mit dem irrationalen Teil verbundene Faktor aus dem Nenner genommen, so würden wir eine Approximante erhalten haben, die dieselben charakteristischen Zahlen besitzt wie die beim vorigen Falle erhaltene, nur dass an Stelle der letzten die Zahl $n_{r+1} + 1$ getreten wäre.

Irgend eine der so durch Hinzufügung eines binomischen Faktors erhaltenen Approximanten befriedigt noch $\omega_1 - 1$ Bedingungen mehr, als ihre charakteristische Zahl für den Punkt e_1 verlangt. Der Process kann nun ein zweites Mal wiederholt werden, indem man ein Binom zu den neuen U und V hinzufügt, wie man es vorher mit dem \overline{U}_p und \overline{V}_q gethan hat. Auf diese Weise kann man den Process schliesslich ω_1 -mal wiederholen und hat dann bei jedem Schritte die Wahl,

- (1). m_1 um zwei Einheiten zu vermehren,
- (2). m_1 um eine Einheit zu vermehren und ein anderes m um den gleichen Betrag,
- (3). m_1 um eine Einheit zu vermehren und irgend ein n um eine Einheit zu vermehren oder zu vermindern.

Wenn im Verlaufe dieser Operationen n sich auf Null reducirt, so wird Approximation in dem entsprechenden Punkte e möglich. Nachher kann man dann, wenn man will, dies e mit unter die e_1, \dots, e_i setzen.

(B). Die verwandten Reste.

Die Reste, welche unseren algebraischen Annäherungsfunktionen

$$\frac{U_{q-1}}{V_q} \Pi(x_1 - e_1 x_2)$$

entsprechen, d. h. die Reste, welche übrig bleiben, wenn man unsere Annäherungsfunktionen von dem gegebenen Integral abzieht, können in der Form eines Integrals ausgedrückt werden, das dem Ausgangsintegral

$$F(x) = \int \frac{W_{r-2} \cdot (x_1 dx_2)}{\Pi(x_1 - e_i x_2)^{1-\lambda_i}}$$

ähnlich ist. Der allgemeine Beweis verläuft analog wie in dem speciellen Falle, den wir hier insbesondere betrachten wollen. Mögen wir uns auf die Approximante

$$\frac{U_p}{V_q} (x_1 - e_1 x_2)^{\lambda_1} \dots (x_1 - e_i x_2)^{\lambda_i} (x_1 - e_{i+1} x_2)^{\lambda_{i+1} - n_{i+1}} \dots (x_1 - e_{r+1} x_2)^{\lambda_{r+1} - n_{r+1}}$$

beschränken. Wenn wir diese direct als eine Funktion von x ausgedrückt haben, so wird die Differentiation nach x liefern:

$$\frac{W(x)}{V_q^3 (x - e_1)^{1-\lambda_1} \dots (x - e_{r+1})^{1-\lambda_{r+1}+n_{r+1}}},$$

wo $W(x)$ vom Grade $p + q + r - 1$ ist, da

$$p + \Sigma \lambda - \Sigma n - q = 0$$

ist. Wenn wir jetzt wieder unsere homogene Schreibweise einführen, das Integralzeichen vorsetzen und unseren Ausdruck von $F(x)$ subtrahieren, werden wir für den Rest erhalten

$$\int \frac{W_{p+q+r-1}(x_1 dx_2)}{V_q^3 (x_1 - e_1 x_2)^{1-\lambda_1} \dots (x_1 - e_{r+1} x_2)^{1-\lambda_{r+1}+n_{r+1}}}.$$

Im allgemeinen ist nun V_q durch die Binome $x_1 - e_1 x_2, \dots, x_1 - e_r x_2$ nicht teilbar, und es müssen daher die Approximationsordnungen in den i Verzweigungspunkten mindestens gleich den resp. charakteristischen Zahlen m_1, \dots, m_i sein, deren Summe $p + q + 1$ ist. Daraus folgt, dass die ersten Potenzen der Binome in den Reihenentwickelungen des Restes für die Umgebung der i Verzweigungspunkte—abgesehen von einem constanten Glied—mindestens die resp. Exponenten $\lambda_1 + m_1, \dots, \lambda_i + m_i$ haben werden. Dies ist nur möglich, wenn $W_{p+q+r-1}$ den Ausdruck

$$(x_1 - e_1 x_2)^{m_1} \dots (x_1 - e_r x_2)^{m_r}$$

enthält. Wenn der Ausnahmefall eintritt, und V_q zum Beispiel durch die ω_1^{ste} Potenz von $x_1 - e_1 x_2$ teilbar ist, so braucht die Approximation nur bis zur $(m_1 - \omega_1)^{\text{sten}}$ Ordnung zu steigen. Insofern dann V_q^3 das Binom in der Potenz $2\omega_1$ enthält, muss $W_{p+q+r-1}$ durch $(x_1 - e_1 x_2)^{m_1 + \omega_1}$ teilbar sein; also durch eine Potenz, die einen um ω_1 grösseren Exponenten besitzt als im gewöhnlichen Falle. Wenn es gestattet ist, hier einen Excurs zu machen, und Späteres vorweg zu nehmen, so mag erwähnt werden, dass, wenn V_q die $\omega_{r+1}^{\text{ste}}$ Potenz von $x_1 - e_{r+1} x_2$ enthält, $W_{p+q+r-1}$ dieselbe Potenz enthalten muss. Dies erkennt man leicht, wenn man den betreffenden Faktor von V_q vor der Differentiation abtrennt, in den irrationalen Teil wirft und das resultierende Integral vergleicht, mit der Form, in welcher es hier gegeben war. Jeder von den $r + 1$ binomischen Faktoren $x_1 - e_i x_2$ in V_q wird dann notwendig einen neuen in $W_{p+q+r-1}$ hervorrufen. Auf alle Fälle muss also, um diesen Excurs zu beenden, $W_{p+q+r-1}$ das Glied

$(x_1 - e_1 x_2)^{m_1} \dots (x_1 - e_r x_2)^{m_r}$ enthalten. Wirft man dann letzteres vom Zähler in den Nenner, so kommt man zu

PROP. VII.—Die Reste haben immer die Form

$$\int \frac{W_{r-2} \cdot (x_1 dx_2)}{V_q^2 \cdot (x_1 - e_1 x_2)^{1-\lambda_1-m_1} \dots (x_1 - e_{r+1} x_2)^{1-\lambda_{r+1}+n_{r+1}}}.$$

Vergleicht man jetzt die Exponenten irgend eines Restes mit denen von $F(x)$, so wird ein Zuwachs m von λ eine Approximation in der Nähe von e anzeigen, die gewöhnlich von der Ordnung m ist, während eine Abnahme n eine Erniedrigung der Exponenten in dem irrationalen Teile der Approximante entspricht.

Die Auswahl der ganzen Zahlen m und n unterliegt keiner Beschränkung, abgesehen davon, dass eine Approximation für mindestens einen Punkt gesucht werden muss, oder mit anderen Worten, dass mindestens ein m grösser als Null sein muss. Dies liegt auch implicit schon in der Gleichung:

$$p + q + 1 = \Sigma m.$$

Wenn man diese mit der Gleichung

$$p - q = \Sigma n - 1$$

combiniert, so kann die Bedingung so geschrieben werden:

$$\Sigma m - \Sigma n = 2q.$$

Bezeichnen wir noch die Exponenten des Integrals mit $1 - \lambda'$, so werden wir haben:

$$\Sigma \lambda' = \Sigma m - \Sigma n + \Sigma \lambda = 2q + 1.$$

Dies ist auch *a priori* klar; denn das Integral ist in Folge seiner Herstellung eine Funktion, und deshalb muss der Integrand vom $(-2)^{\text{ten}}$ Grade in x_1, x_2 sein, was die letzte Gleichung aussagt. Natürlich ist es selbstverständlich, dass die Veränderungen der Werte von λ' damit verträglich sein müssen, dass das Integral eine „Funktion“ ist, und diese Bedingung hat man sich immer als erfüllt zu denken, auch wenn sie der Kürze halber auslassen.

Wir haben gelernt, dass jede Approximante vollständig durch die charakteristischen Zahlen m und n bestimmt ist. In gleicher Weise ist natürlich der Rest durch die Zahlen m und n bestimmt, und daher auch durch die λ' . So haben wir

PROP. VIII.—Für irgend welche Werte der λ' , die sich von den entsprechenden Werten λ des Fundamentalintegrals durch positive oder negative ganze Zahlen (mit

Einschluss der Null) unterscheiden, giebt es immer einen und nur einen unter den Resten

$$\int \frac{W_{r-2} \cdot (x_1 dx_2)}{V_q^2 \cdot (x_1 - e_1 x_2)^{1-\lambda_1} \dots (x_1 - e_{r+1} x_2)^{1-\lambda_{r+1}}}$$

Derselbe Rest kann aber umgekehrt zu verschiedenen Wertsystemen λ' gehören. Die Reste für verschiedene Wertsysteme können nämlich zusammenfallen, wenn W_{r-2} oder V_q Faktoren haben, welche in den irrationalen Teil des Integrals gesetzt werden können. Um ein Criterium zu erhalten, wann Reste gleich sein können, gehen wir auf die Approximanten zurück. Wenn mehrere von diesen gleich waren und in ihrer einfachsten Gestalt ausgedrückt wurden, so stellten dieselben eine Approximante da, deren Gesamtapproximationsordnung grösser als die um 1 vermehrte Summe der Grade von \overline{U}_p und \overline{V}_q war. Umgekehrt waren auch immer Approximanten gleich, wenn dies stattfand. Nun haben wir oben gesehen, dass in dem Polynom W_{r-2} der Faktor $(x_1 - e_1 x_2)^{\omega_1}$ auftrat, wenn die Ordnung der Approximation in der Nähe des Punktes e_1 die normale um ω_1 übertraf. Wenn wir deshalb die Summe dieser Ueberschüsse in den verschiedenen Verzweigungspunkten, wo eine Approximation stattfindet, mit ω bezeichnen, so müssen ω Faktoren in W_{r-2} auftreten, welche man mit den irrationalen Teile des Nenners des Restes vereinigen kann.

PROP. IX.—*Das Criterium für das Auftreten gleicher Reste ist das, dass man das betreffende W_{r-2} auf einen niedrigen als den $(r-2)^{\text{ten}}$ Grad reducieren kann, indem man die Faktoren $x_1 - ex_2$ mit dem irrationalen Teile des Restes vereinigt.*

Die Frage, welche Reste gleich werden, wird im nächsten Teil dieses Kapitels beantwortet werden.

Wir haben jetzt unsere Aufmerksamkeit, statt auf einen einzelnen Rest auf die Gesamtheit aller Reste zu richten und gewinnen hiermit den eigentlichen Kernpunkt unserer analytischen Entwicklungen. *Die in diesen Resten sich darbietenden Integrale werden wir „verwandt“ nennen.* Den mit diesem Wort bezeichneten Zusammenhang zwischen den Integralen kann man auch ohne Rücksicht auf unsere Approximationsprocesse dadurch definieren, dass man diejenigen gemeinsamen Eigenschaften angiebt, welche die verwandten Integrale völlig festlegen. Zunächst haben sie alle die Verzweigungspunkte e gemeinsam und ihre zu demselben Verzweigungspunkte gehörigen Exponenten unterscheiden sich nur um positive oder negative ganze Zahlen. Was die übrigen Verzweigungspunkte der verschiedenen Integrale angeht, so sind die Wurzeln von

$V_q = 0$ auszuschliessen, weil sie überhaupt keine Verzweigungspunkte des Integrals liefern. Dies erkennt man leicht, wenn man ein Integral in der Nachbarschaft einer Wurzel seines V_q entwickelt. Es kann dabei kein logarithmisches Glied auftreten, insofern kein solches Glied in der Entwicklung der entsprechenden Approximante und des Fundamentalintegrals für denselben Punkt enthalten ist. Die einzigen anderen Verzweigungspunkte müssen deshalb die Wurzeln von $W_{r-2} = 0$ sein. Diese werden wir mit ρ bezeichnen. Der zu irgend einem von ihnen gehörige Exponent, den man durch Reihenentwicklung erhält, wird 2 oder eine grössere positive Zahl sein, wenn ρ eine vielfache Wurzel ist. Wir schlagen für diese Punkte die Bezeichnung *ganzzahlige Punkte* vor. Sie sind im Allgemeinen verschieden bei den verschiedenen Integralen und ihre Anzahl kann niemals $r - 2$ übersteigen.

Auf diese Grenze ist hier Gewicht zu legen. Hätten wir andere algebraische Annäherungsfunktionen als unsere Approximanten ausgewählt, so würden wir, wie schon gesagt, auch zu einer Integralform für den Rest geführt sein, aber der Parallelismus mit dem Ausgangsintegral würde insofern gefehlt haben, als die Zahl der ganzzahligen Punkte nicht der obigen Beschränkung unterworfen gewesen wäre. Zugleich mit dieser Beschränkung würde auch die Eindeutigkeit der Bestimmung der Integrale durch die \mathcal{N} verloren gegangen sein.

Aber diese Eigenschaften, die die Verzweigungspunkte und die Exponenten betreffen, genügen noch nicht zur Charakterisierung unserer verwandten Integrale. Wir haben bereits gelernt, dass die Differenz zwischen irgend einem von ihnen und dem sogenannten Fundamentalintegral eine Approximante ist. Daraus schliesst man sofort, dass der Unterschied zwischen irgend zweien von ihnen eine algebraische Funktion von der Form

$$\frac{U_{q'-1}}{V_{q'}} \Pi (x_1 - e_i x_2)^{\lambda_i}$$

ist. Diese hinzutretende Eigenschaft setzt uns in den Stand, die verwandten Integrale, wie wir es wünschten, durch ihre wechselseitige Beziehung zu charakterisieren. Wir haben nämlich den Satz:

PROP. X.—*Die verwandten Reste enthalten sämtliche Integrale der Form*

$$\int \frac{W_{r-2} \cdot (x_1 dx_2)}{V_q^2 \Pi (x_1 - e_i x_2)^{1-\lambda_i}} \quad \lambda'_i - \lambda_i \equiv 0 \pmod{1}$$

mit $r + 1$ gemeinsamen Verzweigungspunkten e und nicht mehr als $r - 2$ ganzzahligen Punkten, welche sich durch algebraische Funktionen $\frac{U_{q-1}}{V_q} \Pi (x_1 - e_i x_2)^{\lambda_i}$ unterscheiden.

Den Beweis des Satzes führen wir indirect. Es seien, wenn möglich,

$$\int \frac{W_{r-2} \cdot dx}{V_q^2 \cdot \Pi (x - e_i)^{1-\lambda_i}} \quad \text{und} \quad \int \frac{W'_{r-2} \cdot dx}{V'_q \cdot \Pi (x_1 - e_i)^{1-\lambda'_i}}$$

zwei Integrale mit denselben Exponenten $\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_{r+1}$. Setzen wir dann zunächst voraus, dass V_q und V'_q keine Potenz von irgend einem $x - e_i$ enthalten, so muss die erste Potenz dieses Binoms, die in der Reihenentwicklung der Differenz der beiden Integrale in der Umgebung der einzelnen Verzweigungspunkten e_i auftritt, den Exponenten λ'_i oder einen grösseren haben und es müssen deshalb dieselben Potenzen als Faktoren in der algebraischen Differenz enthalten sein. Abgesehen von einigen Punkten e , die möglicher Weise als Unendlichkeitspunkte der Integrale und deshalb auch ihrer Differenz auftreten können, kann letztere nur da noch unendlich werden, wo V_q oder V'_q Null wird. Die Differenz ist deshalb ausdrückbar durch

$$\frac{\Pi (x_1 - e_i x_2)^{\lambda'_i} \cdot P(x_1, x_2)}{V_q \cdot V'_q},$$

wo P eine ganze rationale Form ist. Da indessen die Differenz als Funktion von x vom nullten Grade in x_1, x_2 ist, so muss, da

$$\Sigma \lambda' = 2q + 1$$

ist, P von dem $(-1)^{\text{sten}}$ Grad sein. Die Forderungen sind ersichtlich unverträglich und deshalb können, so lange V_q und V'_q keine der Binome enthalten, keine zwei Integrale mit denselben charakteristischen Zahlen λ' gefunden werden. Setzen wir jetzt weiter voraus, dass V_q und V'_q , entweder das eine oder beide, einige der Binome enthalten. Es trete z. B. die höchste Potenz von $x_1 - e_i x_2$ in V_q auf, etwa die ω_i^{ste} . Wenn dieselbe nicht in W_{r-2} enthalten ist (vgl. S. 14), werden wir übereinkommen $(x_1 - e_i x_2)^{2\omega_i}$ von V_q^2 in den irrationalen Teil des Integrals zu werfen und demnach das Integral zu einem anderen System λ' als dem vorhin angenommenen rechnen. Wenn dagegen dieselbe Potenz in W_{r-2} auftritt, dann muss die erste Potenz, die in der Entwicklung der beiden Integrale auftritt die $(\lambda_i - \omega_i)^{\text{ste}}$ sein. Da das Gleiche für die Differenz gelten muss,

und der oben aufgestellte Ausdruck mit dieser Bedingung verträglich ist, so schliesst man wie vorher, dass die Differenz in der obigen Form dargestellt werden kann, was wieder zu demselben Widerspruche führt. Für gegebene Werte von λ' kann deshalb nur ein Integral gefunden werden. Nun giebt es aber sicher für jedes Wertsystem λ' ein Integral unter unseren verwandten Resten, woraus die Wahrheit des oben aufgestellten Satzes erhellt.

Der Zielpunkt dieses Kapitels ist so erreicht. *Unsere verwandten Integrale sind vollständig unabhängig von dem Approximationsprocess definiert und deshalb sind sie jetzt als das Wesentliche an Stelle der Approximanten zu betrachten.* Innerhalb ihrer Gesamtheit sind alle unsere Integrale gleichberechtigt. Irgend eins bestimmt durch seine e und λ' die Gesamtheit. Die Auswahl unseres Fundamentalintegrals als Basis der Approximation war rein zufällig. Irgend ein anderes $\int \frac{W_{r-2} \cdot (x_1 dx_2)}{\prod (x_1 - e_i x_2)^{1-\lambda'_i}}$, in welchem V_q sich auf eine Constante reduciert, würden wir ebensowohl gewählt haben können. Man würde dann zu einem ganz neuen System von Approximanten geführt worden sein, das aber nichtsdestoweniger dasselbe System von den V_q ergeben haben würde, da diese Polynome eine invariante Charakteristik der Integrale sind und eine selbstständige Bedeutung haben. Die alten Zähler würden indessen in dem neuen Systeme von Approximanten nicht wieder auftreten. Sie sind Elemente, die unseren Integralen von unserem neuen Gesichtspunkte aus fremd sind.

Die Wichtigkeit und Bedeutung unseres Begriffes „Verwandtschaft“ werden wir besser mit Hülfe der Gruppentheorie verstehen. Die Gestalt der zum Integral

$$\eta = \int \frac{W_{r-2} \cdot (x_1 dx_2)}{V_q^2 \cdot \prod (x_1 - e_i x_2)^{1-\lambda'_i}}$$

gehörigen Substitutionsgruppe ist wohl bekannt. Wenn x einen Umlauf um einen ganzzahligen Punkt ρ beschrieben hat, kehrt η zu seinen Anfangswert zurück. Deshalb werden die Substitutionen der Gruppe nur erzeugt durch Umläufe des x um die Verzweigungspunkte e_i . Andererseits wird jedes Element des Integrals dann mit $e^{2\pi i \lambda'_i}$ multipliciert; die erzeugenden Substitutionen der Gruppe, welche η erleidet, müssen also von der Form

$$\eta' = e^{2\pi i \lambda'_i} \eta + b$$

sein. Deshalb gilt allgemein

PROP. XI.—*Die Gruppe von Substitutionen unseres Integrals η hat die Form einer linearen Transformation $\eta' = a\eta + b$.*

Um die Gruppen der verschiedenen Integrale zu vergleichen, haben wir auf die Gleichung

$$\int \frac{W_{r-2} \cdot (x_1 dx_2)}{\Pi (x_1 - e_i x_2)^{1-\lambda_i}} = \frac{U_p}{V_q} \Pi (x_1 - e_i x_2)^{\lambda_i} + \int \frac{W'_{r-2} \cdot (x_1 dx_2)}{V_q^3 \cdot \Pi (x_1 - e_i x_2)^{1-\lambda'_i}} \quad (2)$$

zurückzugreifen, wo λ_i die algebraisch kleinste von den Zahlen λ_i und λ'_i bedeutet. Bezeichnet man das Ausgangsintegral mit η_1 , die Approximante mit η_2 , den Rest mit η_3 , so hat man für die erzeugenden Substitutionen ihrer respectiven Gruppen:

$$\begin{aligned} \eta'_1 &= e^{2i\pi\lambda_1} \eta_1 + b, \\ \eta'_2 &= e^{2i\pi\lambda_1} \eta_2, \\ \eta'_3 &= e^{2i\pi\lambda_1} \eta_3 + b'. \end{aligned}$$

Da aber gemäss der obigen Gleichung:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \eta_2 + \eta_3, \\ \eta'_1 &= \eta'_2 + \eta'_3 \end{aligned}$$

und

ist, so folgt

$$b = b'.$$

Man schliesst daher sogleich:

PROP. XII.—Die Gesamtheit unserer verwandten Integrale besitzt eine gemeinsame Gruppe.

Nun kann man sehr leicht die Umkehrung von Prop. XI nachweisen, nämlich dass jede Funktion ohne wesentlich singuläre Punkte, die durch die erzeugenden Substitutionen

$$\eta' = e^{2i\pi\lambda} \eta + b$$

charakterisiert ist, durch ein solches Integral wie das obige η dargestellt werden kann, wobei nur die Beschränkung betreffs der Anzahl der ganzzahligen Punkte fallen gelassen werden muss. Wenn wir jetzt noch die Bedingung hinzufügen, dass zwei solche Integrale nicht nur dieselbe Gruppe, sondern auch die Verzweigungspunkte gemeinsam haben, welche zu der Gruppe Veranlassung geben, dann verhält sich ihre Differenz multiplicativ bei irgend welchen Umläufen von x . Daraus ist leicht nachzuweisen, dass sie ihrerseits eine algebraische Funktion $\frac{U_{q'-1}}{V_{q'}} \Pi (x_1 - e_i x_2)^\lambda$ ist, wo die e die Verzweigungspunkte der Gruppe bedeuten und die λ sich nur um ganze Zahlen von den entsprechenden λ' der Integrale unterscheiden. Nun haben wir in unserer Gesamtheit alle Integrale der betrachteten Gestalt mit nicht mehr als $r-2$ ganzzahligen Punkten, welche sich

durch algebraische Funktionen der obigen Art unterscheiden. Daher erkennt man die Richtigkeit von

PROP. XIII.—Die Gesamtheit unserer verwandten Integrale umfasst alle diejenigen Integrale mit nicht mehr als $r - 2$ ganzzahligen Punkten, die eine Gruppe $\eta' = a\eta + b$ und die zugehörigen Verzweigungspunkte gemein haben.

Es erübrigt noch, kurz den Zusammenhang unserer Integrale mit der Theorie der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu charakterisieren. Möge eine reguläre Gleichung dieser Art, die eine einzige algebraische Lösung besitzt, für den Augenblick betrachtet werden. Der Quotient einer transcendenten und der algebraischen Lösung kann in die Form unserer Integrale gesetzt werden, und umgekehrt kann jedes derartige Integral als der eben bezeichnete Quotient zweier Lösung einer solchen Differentialgleichung der zweiten Ordnung angesehen werden. Die Differentialgleichung kann ferner so transformiert werden, dass sie geradezu das Polynom V als Lösung darbietet. Thut man dies, so erhält man:

PROP. XIV.—Das im Integral $\int \frac{W_{r-2} \cdot (x_1 dx_2)}{V^2 \cdot \Pi (x_1 - e_i x_2)^{1-\lambda_i}}$ auftretende Polynom V ist eine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \left(\frac{1 - \lambda'_1}{x - e_1} + \dots + \frac{1 - \lambda'_{r+1}}{x - e_{r+1}} - \frac{1}{x - \rho_1} - \dots - \frac{1}{x - \rho_{r-2}} \right) \frac{dy}{dx} + \frac{(A_0 x^{2r-5} + A_1 x^{2r-4} + \dots) y}{(x - e_1) \dots (x - e_{r+1})(x - \rho_1) \dots (x - \rho_{r-2})} = 0,$$

in der wir die accessorischen Parameter A in geeigneter Weise bestimmt denken müssen.

Falls keine ganzzahlige Punkte in dem Integrale vorhanden sind und $e_{r+1} = \infty$ gesetzt wird, wird diese Gleichung die Form annehmen:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \left(\frac{1 - \lambda'_1}{x - e_1} + \dots + \frac{1 - \lambda'_r}{x - e_r} \right) \frac{dy}{dx} + \frac{(A'_0 x^{r-2} + A'_1 x^{r-3} + \dots) y}{(x - e_1) \dots (x - e_r)} = 0.$$

Solchen Gleichungen genügen Polynome V , welche den grösst möglichen Irregularitäten in den später zu betrachtenden Fällen entsprechen.

Die Gruppeneigenschaften der verwandten Integrale können nun sofort auf die Differentialgleichungen für die Polynome V übertragen werden. Möge y_1 eine

transcendente Lösung der Differentialgleichung für eins der Polynome V bezeichnen, so dass

$$y_1 = V \int \frac{W_{r-2} \cdot (x_1 dx_2)}{V^2 \cdot \Pi (x_1 - e_i x_2)^{1-\lambda_i}}$$

ist. Aus der Gruppe des Integrals resultiert dann die für die Differentialgleichung, nämlich

$$y'_1 = ay_1 + bV.$$

Als Aequivalent von Prop. XIV leiten wir so ab:

PROP. XV.—*Unsere Polynome V umfassen alle Polynome, deren Differentialgleichungen ausser den Verzweigungspunkten e auch noch die Substitutionsgruppe $y'_1 = ay_1 + bV$ gemein haben und übrigens nicht mehr als $r - 2$ ganzzahlige Punkte enthalten.*

Auf diese Weise dehnt man Heun's Auffassung der Gruppeneigenschaften der Reste und Näherungsnenner gewisser Kettenbrüche (vgl. Kap. II, A.) auf die weit ausgedehntere Mannigfaltigkeit unserer Restintegrale und Polynome aus.

(C). Die Kettenbrüche.

Die Methode, die man zur näherungsweisen Darstellung einwertiger Funktionen gewöhnlich benutzt, bedient sich der so genannten algebraischen Ketten-

brüche
$$v_0 + \frac{\mu_1}{v_1 + \frac{\mu_2}{v_2 + \frac{\mu_3}{v_3 + \dots}}}$$
, wo die μ und v ganze rationale Funktionen

von x sind. Der Einfachheit halber werden wir dieselben in folgender Form schreiben: $v_0 + \frac{\mu_1}{v_1} + \frac{\mu_2}{v_2} + \frac{\mu_3}{v_3} + \dots$. In Wirklichkeit ist der Kettenbruch nicht mehr und nicht weniger als eine systematische Anordnung gewisser Annäherungsfunktionen, die man Näherungsbrüche nennt. Die Anordnung wird dabei so gewählt, dass im Allgemeinen die Grösse der Annäherung mit jedem Fortschreiten in der Reihe der Näherungsbrüche wächst. Betrachtet man in ähnlicher Weise $\int \frac{W_{r-2} \cdot dx}{V^2 \cdot \Pi (x - e_i)^{1-\lambda_i}}$, wo x' einen festen, x einen variablen Punkt bedeutet, so stehen einem zwei Wege offen. Entweder kann man das Integral durch $\Pi (x - e_i)^{\lambda_i}$ teilen, um es in der Nähe der Verzweigungspunkte

einwertig zu machen und dann eine Approximation durch einen solchen Kettenbruch suchen, oder man kann direct die Approximation durch

$$F_1(x) = \Pi(x - e_i)^{\lambda_i} \cdot \left(\nu_0 + \frac{\mu_1}{\nu_1} + \frac{\mu_2}{\nu_2} + \dots \right)$$

in Ansatz bringen. Diese Funktion $F_1(x)$ werden wir eine erzeugende Funktion des Kettenbruchs oder schlechtweg eine *Erzeugende* nennen. Die beiden Methoden sind natürlich nur verschiedene Darstellungen derselben Sache. Die Näherungsbrüche der ersteren Methode, multipliciert mit $\Pi(x - e_i)^{\lambda_i}$, geben die Approximanten der letzteren. Wir werden hier vorzugsweise die zweite Behandlungsweise benutzen und auch so weit als möglich unsere homogene Schreibweise beibehalten. Unter den μ und ν werden wir deshalb gewöhnlich Formen von x_1, x_2 verstehen, welche man, wenn es wünschenswert scheint, durch die Substitution

$$x_1 = x, \quad x_2 = 1$$

in Funktionen umsetzen kann. *Diese homogene Bezeichnung ist, so weit ich weiss, hier zum ersten Mal auf einen Kettenbruch angewandt und hat, wie wir finden werden, für uns einen grossen Vorteil gegenüber der üblichen nicht homogenen.* Man kann deshalb vermuten, dass sie auch in der Theorie der Kettenbrüche im Allgemeinen mit Vorteil zu benutzen sein wird.—Wir werden auch in Zukunft die untere constante Grenze der Integration fortlassen, welche sich der Leser für alle verwandten Integrale in derselben Weise hinzudenken möge.

Unser Problem ist offenbar, ein Arrangement der Approximanten oder Restintegrale zu suchen, das zu einer Erzeugenden $F_1(x)$ führt. Zunächst müssen wir aber ein Uebereinkommen betreffs der Natur der hier einzuführenden Kettenbrüche treffen. Wir werden die Convention, dass die Annäherung beim Fortschreiten in der Reihe der Näherungsbrüche stets wächst, hier behalten, wollen dabei aber immer die *Gesamtapproximation* in der Nähe der verschiedenen Verzweigungspunkte, bei denen wir approximieren wollen, in Rechnung ziehen. Möge jetzt Z_n, N_n, R_n Zähler und Nenner des n^{ten} Näherungsbruchs und den n^{ten} Rest bezeichnen. Für den letzteren hat man die wohlbekannte Formel:

$$R_n = \pm \mu_1 \mu_2 \dots \mu_{n+1} \left(\frac{1}{N_n N_{n+1}} - \frac{\mu_{n+2}}{N_{n+1} N_{n+2}} + \frac{\mu_{n+2} \mu_{n+3}}{N_{n+2} N_{n+3}} - \dots \right)^*$$

* Heine, Handbuch der Kugelfunctionen, Bd. I, S. 268.

Seien e_1, \dots, e_i die Punkte, bei denen eine Annäherung gesucht wird. Um eine möglichst grosse Gesamtannäherung in diesen Punkten zu erzielen, hat man nur dafür Sorge zu tragen, dass die Summe der Exponenten mit welchen die Binome $x - e_1, \dots, x - e_i$ zuerst in den Reihenentwickelungen von R_n in der Nähe der betreffenden Punkte auftreten, möglichst gross sei. Ein Blick auf die letzte Gleichung zeigt, dass zu diesem Zwecke die Partialzähler nur Faktoren $x - e_1, \dots, x - e_i$ enthalten dürfen. Als Typus unseres Kettenbruches werden wir deshalb einen solchen nehmen, bei dem die Partialzähler μ nur aus Potenzen der Binome $x_1 - ex_2$ zusammengesetzt sind.

Nachdem wir uns über die Form unserer Kettenbrüche verständigt haben, haben wir jetzt zu untersuchen, wie die Integrale und Approximanten ausgewählt werden müssen, damit sie successive zu einer Erzeugenden gehören. Die notwendige und hinreichende Bedingung, damit eine Reihe von rationalen Funktionen oder Formen $\frac{Z_1}{N_1}, \frac{Z_2}{N_2}, \dots, \frac{Z_n}{N_n}$, wo Zähler und Nenner jedes Bruches als teilerfremd vorausgesetzt werden, die Näherungsbrüche eines Kettenbruches bildet, dessen Partialzähler und Nenner Polynome in x , resp. Formen in x_1, x_2 sind, ist nun die, dass die Differenz zwischen irgend zwei aufeinanderfolgenden Brüchen der Reihe $\frac{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}{N_{n-1} N_n}$ ist. Der Zähler einer jeden solchen Differenz wird dann aus dem Zähler der vorhergehenden durch Multiplication mit einem neuen Partialzähler μ erhalten, und es werden auch folgende Relationen zwischen den N , bez. Z und RN bestehen:

$$\left. \begin{aligned} N_n &= v_n N_{n-1} & + \mu_n N_{n-2}, \\ Z_n &= v_n Z_{n-1} & + \mu_n Z_{n-2}, \\ R_n N_n &= v_n R_{n-1} N_{n-1} + \mu_n R_{n-2} N_{n-2}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Nach Voraussetzung sollen nun in $F_1(x)$ die μ aus den $x_1 - ex_2$ zusammengesetzt werden. Deshalb muss der Zähler der Differenz zwischen zwei successiven Approximanten oder, wie wir hier lieber sagen wollen, zwischen den beiden entsprechenden Integralen ein aus lauter Faktoren $x_1 - ex_2$ zusammengesetztes Produkt sein.

Bevor wir diese Bedingung zu erfüllen suchen, wollen wir zunächst in Anlehnung an die gewöhnliche Theorie der Kettenbrüche zwei Fälle unterscheiden. In demjenigen Falle, den wir den *Normalfall* nennen wollen, ist jede

Approximante und auch jeder Rest verschieden von jedem anderen. In dem *anormalen Falle* werden eine Anzahl von ihnen resp. gleich sein. Wir werden zuerst den ersten Fall erledigen. Hier ist die Gesamtordnung der Approximation genau um 1 grösser als die Summe der Grade der entsprechenden U_p und V_q , diese sind notwendigerweise relativ prim zu einander und die V_q und W_{r-2} in den Integralen enthalten keinen Faktor $x_1 - ex_2$. Es möge jetzt verlangt werden, dass man die Differenz zwischen den beiden Integralen

$$\int \frac{W'_{r-2} \cdot (x_1 dx_2)}{V_q^2 \cdot \Pi (x_1 - e_i x_2)^{1-\lambda'_i}} \text{ und } \int \frac{W''_{r-2} \cdot (x_1 dx_2)}{V_{q''}^2 \cdot \Pi (x_1 - e_i x_2)^{1-\lambda''_i}}$$

in der oben auseinandergesetzten Weise ausdrücken kann. Möge $\bar{\lambda}_i$ der algebraisch kleinste der beiden Exponenten λ'_i und λ''_i sein, $\Delta\lambda_i$ ihre numerische Differenz. Dann wird in der für die Umgebung des Punktes e_i geltenden Reihenentwicklung der Differenz der Integrale die niedrigste Potenz von $x - e_i$ die $\bar{\lambda}_i$ te sein, abgesehen von gewissen möglicher Weise eintretenden Ausnahmefällen, in denen λ'_i und λ''_i gleich sind. In diesen Fällen kann die niedrigste auftretende Potenz einen grösseren Exponenten haben. Abgesehen von Punkten e wird unsere Differenz keine anderen Unendlichkeitspunkte als die Wurzeln von $V_q = 0$ und $V_{q''} = 0$ haben. Deshalb kann man sie in der Form ausdrücken:

$$\frac{\Pi (x_1 - e_i x_2)^{\bar{\lambda}_i} \cdot P_{q'+q''-\Sigma\bar{\lambda}}}{V_q \cdot V_{q''}},$$

wo P eine ganze rationale Form des angezeigten Grades ist, welche keine Faktoren $x_1 - ex_2$ enthält. Da jetzt

$$2q' + 1 = \Sigma\lambda',$$

$$2q'' + 1 = \Sigma\lambda'',$$

und $\Sigma\lambda' + \Sigma\lambda'' = 2\Sigma\bar{\lambda} + \Sigma\Delta\lambda$ ist, kann der Grad von P in der einfacheren Form $\frac{\Sigma\Delta\lambda - 2}{2}$ ausgedrückt werden. Wollen wir nun verlangen, dass der Zähler nur

Potenzen von $x_1 - ex_2$ enthalten soll, so muss P eine Constante sein oder

$$\Sigma\Delta\lambda = 2.$$

Unser Resultat können wir in folgendes Theorem zusammenfassen:

In dem Normalfalle ist eine notwendige Bedingung, damit zwei der Integrale successive Reste einer Kettenbrucherzeugenden $F_1(x)$ sind, die, dass die Summe der numerischen Differenzen ihrer Exponenten 2 ist.

Irgend zwei solche Integrale werden wir deshalb *benachbarte Integrale* nennen. Es giebt zwei Möglichkeiten für sie: entweder können sich zwei Exponenten des einen Integrals von den entsprechenden zwei des anderen um eine Einheit unterscheiden oder ein einzelnes Paar um zwei Einheiten.

Es erübrigt jetzt noch, obige notwendige Bedingung in eine hinreichende zu verwandeln. Die Differenz ist in der gewünschten Weise durch den Quotienten $\frac{\Pi (x_1 - e_i x_2)^{\lambda_i}}{V_q V_{q''}}$ ausgedrückt. Es soll jetzt erzwungen werden, dass jede folgende Differenz aus der vorhergehenden durch Hinzufügung eines neuen Faktors, nämlich eines Produkts von Potenzen der $x_1 - ex_2$, im Zähler entsteht. Da der Exponent einer Potenz Null sein kann, so wird es genügen, zu verlangen, dass keine Potenz eines $x_1 - ex_2$, d. h. kein $\bar{\lambda}$ beim Fortschreiten in der Reihe abnimmt. Dies wird sicher der Fall sein, so lange die Incremente $\Delta\lambda$, successive von Integral zu Integral genommen, positiv sind. Aber man darf daraus nicht schliessen, dass sie niemals negativ sein dürften. Es kann in der That wohl sein, dass sich ein N_n , d. h. der Nenner einer Approximante, von dem entsprechenden V_q durch Potenzen der $x_1 - ex_2$ unterscheidet. Man hat dann im Zähler und Nenner der entsprechenden Integralendifferenzen dieselben Potenzen hinzuzufügen. Hat man auf diese Weise in der n^{ten} Differenz der Verminderung der $\bar{\lambda}$ das Gegengewicht gehalten, so ist man dann berechtigt, die Differenz dem Ausdruck $\frac{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n}{N_{n-1} N_n} \Pi (x_1 - e_i x_2)^{\lambda_i}$ gleich anzusetzen. Wenn dagegen die Potenz eines $x_1 - ex_2$ in dem so modificierten Zähler noch kleiner bleibt als in der gerade vorangehenden Differenz, so kann man folgenderweise verfahren. Man führt in den Zähler und Nenner der betrachteten Differenz geeignete Potenzen dieses Binoms ein, auch in Z_n und N_n , so dass sie nicht mehr teilerfremd sind. Thut man dies, so hat man in der Reihe der so modificierten Approximanten $\frac{Z_n}{N_n} \Pi (x_1 - e_i x_2)^{\lambda_i}$ die gesuchte Erzeugende. Fälle dieser Art kommen nicht in dieser Abhandlung zu einer expliciten Darstellung, und deshalb überspringen wir den Beweis der letzten Behauptung. Jedenfalls aber ist die oben formulierte Bedingung ebensowohl notwendig als hinreichend, mit anderen Worten:

PROP. XVI.—*Die hinreichende Bedingung, dass eine Reihe von verwandten Integralen die successiven Reste einer Kettenbrucherzeugenden der gewollten Art sind, ist die, dass sie successive benachbart sind.*

Wir schlagen zunächst das Studium einiger der möglichen Kettenbrüche vor. Zu Anfang ist ein Fundamentalintegral als Basis der Approximation auszuwählen. Die wichtigsten Kettenbrüche für dieses sind dann diejenigen, welche man „regulär“ nennt. Mit diesem Ausdruck bezeichnet man einen Kettenbruch, dessen Theilzähler nach dem ersten sämtlich gleich sind, bei welchen also die Approximation von Rest zu Rest stets für dieselben Punkte und für diese im gleichen Betrage zunimmt. Da wir nur höchstens zwei Exponenten von Rest zu Rest variieren können, so können wir nur solche reguläre Kettenbrüche finden, die in der Nähe von höchstens zwei Verzweigungspunkten approximieren. Mögen diese e_1 und e_2 sein. Um die Verhältnisse besser zu überschauen, werden wir die Integrale und die entsprechenden Approximanten in Tabellen eintragen, in welchen alle Exponenten mit Ausnahme von λ'_1, λ'_2 constant erhalten werden.

Approximation von $F(x) = \int \frac{W_{r-2} \cdot (x_1 dx_2)}{\Pi (x_1 - e_i x_2)^{1-\lambda_i}}$ durch

$$F_1(x) = \Pi (x_1 - e_i x_2)^{\lambda_i} \left\{ \nu_0 + \frac{\mu_1}{\nu_1} + \frac{\mu_2}{\nu_2} + \dots \right\},$$

wo die μ aus lauter Faktoren $x_1 - e_1 x_2$ und $x_1 - e_2 x_2$ bestehen.

TABELLE I.—Die Approximanten $\frac{Z_n}{N_n} \Pi (x_1 - e_i x_2)$.

	$\frac{Z_n}{N_n}$			
	0	1	2	3
0	—	$\frac{U_{01}}{x_1 - e_2 x_2}$	$\frac{U_{02}}{(x_1 - e_2 x_2)^2}$	$\frac{U_{03}}{(x_1 - e_2 x_2)^3}$
1	$\frac{U_{10}}{V_{10}}$	$\frac{U_{11}}{V_{11}}$	$\frac{U_{12}}{V_{12} \cdot (x_1 - e_2 x_2)}$	$\frac{U_{13}}{V_{13} \cdot (x_1 - e_2 x_2)^2}$
2	$\frac{U_{20}}{V_{20}}$	$\frac{U_{21}}{V_{21}}$	$\frac{U_{22}}{V_{22}}$	$\frac{U_{23}}{V_{23} \cdot (x_1 - e_2 x_2)}$
3	$\frac{U_{30}}{V_{30}}$	$\frac{U_{31}}{V_{31}}$	$\frac{U_{32}}{V_{32}}$	$\frac{U_{33}}{V_{33}}$

TABELLE II.—Die entsprechenden Reste.

0	1	2	3
$F(x)$	$\int \frac{W^{(01)} \cdot (x_1 dx_3)}{(x_1 - e_1 x_2)^{-\lambda_1} (x_1 - e_3 x_2)^{-\lambda_2 + 2}}$	$\int \frac{W^{(02)} \cdot (x_1 dx_2)}{(x_1 - e_1 x_2)^{-\lambda_1 - 1} (x_1 - e_2 x_2)^{-\lambda_2 + 3}}$	$\int \frac{W^{(03)} \cdot (x_1 dx_2)}{(x_1 - e_1 x_2)^{-\lambda_1 - 2} (x_1 - e_3 x_2)^{-\lambda_2}}$
$\frac{W^{(10)} \cdot (x_1 dx_2)}{(x_1 - e_1 x_2)^{-\lambda_1} (x_1 - e_2 x_2)^{-\lambda_2}}$	$\int \frac{W^{(11)} \cdot (x_1 dx_3)}{V_{11}^2 \cdot (x_1 - e_1 x_2)^{-\lambda_1 - 1} (x_1 - e_3 x_2)^{-\lambda_2 + 1}}$	$\int \frac{W^{(12)} \cdot (x_1 dx_2)}{V_{12}^2 \cdot (x_1 - e_1 x_2)^{-\lambda_1 - 2} (x_1 - e_2 x_2)^{-\lambda_2 + 2}}$	$\int \frac{W^{(13)} \cdot (x_1 dx_3)}{V_{13}^2 \cdot (x_1 - e_1 x_2)^{-\lambda_1 - 3} (x_1 - e_3 x_2)^{-\lambda_2 - 1}}$
$\frac{W^{(20)} \cdot (x_1 dx_2)}{(x_1 - e_1 x_2)^{-\lambda_1 - 1} (x_1 - e_2 x_2)^{-\lambda_2 - 1}}$	$\int \frac{W^{(21)} \cdot (x_1 dx_3)}{V_{21}^2 \cdot (x_1 - e_1 x_2)^{-\lambda_1 - 2} (x_1 - e_3 x_2)^{-\lambda_2}}$	$\int \frac{W^{(22)} \cdot (x_1 dx_2)}{V_{22}^2 \cdot (x_1 - e_1 x_2)^{-\lambda_1 - 3} (x_1 - e_2 x_2)^{-\lambda_2 + 1}}$	$\int \frac{W^{(23)} \cdot (x_1 dx_2)}{V_{23}^2 \cdot (x_1 - e_1 x_2)^{-\lambda_1 - 4} (x_1 - e_3 x_2)^{-\lambda_2 - 1}}$
$\frac{W^{(30)} \cdot (x_1 dx_2)}{(x_1 - e_1 x_2)^{-\lambda_1 - 2} (x_1 - e_3 x_2)^{-\lambda_2 - 2}}$	$\int \frac{W^{(31)} \cdot (x_1 dx_3)}{V_{31}^2 \cdot (x_1 - e_1 x_2)^{-\lambda_1 - 3} (x_1 - e_2 x_2)^{-\lambda_2 - 1}}$	$\int \frac{W^{(32)} \cdot (x_1 dx_2)}{V_{32}^2 \cdot (x_1 - e_1 x_2)^{-\lambda_1 - 4} (x_1 - e_3 x_2)^{-\lambda_2 - 2}}$	$\int \frac{W^{(33)} \cdot (x_1 dx_2)}{V_{33}^2 \cdot (x_1 - e_1 x_2)^{-\lambda_1 - 5} (x_1 - e_3 x_2)^{-\lambda_2 - 3}}$

In diesen Tabellen sind diejenigen Formen von x_1, x_2 , welche von Glied zu Glied sich ändern mit Doppelindices versehen, die den Reihen und Columnen entsprechen. Wenn wir eine Horizontalreihe nach rechts entlang oder eine Vertikalreihe hinabgehen, so wächst der Exponent λ'_1 in der zweiten Tabelle und damit die Charakteristik m_1 für e_1 in der ersten Tabelle. Längs einer Horizontalreihe vermindert sich λ'_2 und damit m_2 , in der Vertikalreihe wachsen sie nach unten zu. Ein dadurch entstehendes negatives m_2 ist das, was wir früher mit $-n_2$ bezeichneten. Der erste Index von V giebt seinen Grad an. Den Grad eines U kann man sich dann durch die Ueberlegung bestimmen, dass der Unterschied der Grade von N_n und Z_n in Tabelle I eins sein muss. Es mag bemerkt werden, dass die Tabellen, um sie zu vervollständigen, ebensowohl nach links wie nach rechts fortgesetzt werden sollten. Dies kann leicht geschehen, da die Hälfte, die man linker Hand von der ersten Columnne hinzufügen hat, in jeder Beziehung mit der rechter Hand symmetrisch sein muss, abgesehen davon, dass e_1 und e_2 ihre Rolle vertauscht haben. Die hier gegebene halbe Tabelle genügt indessen für unseren Zweck.

Drei reguläre Anordnungen in Bezug auf das Fundamentalintegral $F(x)$ sind sofort evident. Man kann

- I) längs der Diagonale,
- II) längs der ersten Vertikalcolumne,
- III) längs der ersten Horizontalreihe vorwärts schreiten.

Diesen drei Wegen werden wir noch einen vierten hinzufügen, den man erhält, wenn man gewissermassen eine Treppenlinie von der Ecke der Tabelle abwärts beschreibt, d. h. abwechselnd einen Schritt nach rechts und dann einen nach unten macht.

Reguläre Kettenbrüche.

Typus I.—Wenn wir die Diagonale von Tabelle II entlang gehen, so bleibt von Integral zu Integral der Exponent λ'_2 für e_2 ungeändert, während λ'_1 gleichförmig um zwei Einheiten wächst. Die Ordnung der Approximation in e_1 , die durch die in der Diagonale stehenden Approximanten der anderen Tabelle geliefert wird, wächst deshalb in derselben Masse, und die successiven Teilzähler der Erzeugenden müssen $(x_1 - e_1 x_2)^2$ enthalten. Die Grade der Teilzähler und Nenner können sofort durch die Recursionsformel (3) für N , nämlich

$$V_{n,n} = \nu_n V_{n-1,n-1} + \mu_n V_{n-2,n-2}$$

bestimmt werden. Wir schliessen deshalb, dass der erste Typus von regulären Kettenbrüchen die Form hat:

$$\frac{1}{a_0x_1 + b_0x_2} + \frac{(x_1 - e_1x_2)^2}{a_1x_1 + b_1x_2} + \frac{(x_1 - e_1x_2)^2}{a_2x_1 + b_2x_2} + \dots$$

Dies ist die am meisten gebräuchliche Art von Kettenbrüchen. Die entsprechende Erzeugende umfasst das, was wir eine Klasse von Approximanten nannten, und liefert die beste Approximation in nur einem Verzweigungspunkte.

Typus II.—Wenn man die Vertikalcolumnne von Tabelle II hinabgeht, so wachsen die zu e_1 und e_2 gehörenden Exponenten λ' beständig um eine Einheit. Wir schliessen daraus in ähnlicher Weise wie oben, dass die Teilzähler $(x_1 - e_1x_2)(x_1 - e_2x_2)$ sind und die Teilnenner linear. Der zweite Typus von regulären Kettenbrüchen ist also dieser:

$$\frac{1}{a_0x_1 + b_0x_2} + \frac{(x_1 - e_1x_2)(x_1 - e_2x_2)}{a_1x_1 + b_1x_2} + \frac{(x_1 - e_1x_2)(x_1 - e_2x_2)}{a_2x_1 + b_2x_2} + \dots$$

Jede der folgenden Approximanten approximiert $F(x)$ in der nächst höheren Ordnung sowohl bei e_1 wie e_2 .

Typus III.—Wenn man der ersten Horizontallinie nach rechts folgt, so wächst der Exponent λ'_1 für e_1 successive um eine Einheit, während sich derjenige für e_2 um denselben Betrag vermindert. Aber die N enthalten Potenzen von $x_1 - e_2x_2$, und wenn wir dieselben Potenzen im Zähler und Nenner der betreffenden Differenzen der Integrale hinzufügen, so finden wir, dass dann die im Zähler stehende Potenz dieses Binoms stets um 1 von einer Differenz zu der nächsten wächst. Deshalb enthält jedes μ_n den Faktor $x_1 - e_2x_2$. Dasselbe wird andererseits durch die Recursionsformel (3) verlangt:

$$(x_1 - e_2x_2)^n = v_n(x_1 - e_2x_2)^{n-1} + \mu_n(x_1 - e_2x_2)^{n-2},$$

während μ_n auch wegen der wachsenden Approximation bei e_1 durch $x_1 - e_1x_2$ theilbar ist. Der dritte Typus von Kettenbrüchen hat daher dieselbe Form wie Typus II, aber das $x_1 - e_2x_2$ in den Teilzählern bringt kein Zunehmen der Approximation bei e_2 wegen der in N auftretenden Potenzen dieses Binoms mit sich.

Typus IV.—Wenn man einer Treppenlinie von der Ecke der Tabelle abwärts folgt, dann wächst der Exponent λ'_1 regelmässig von Glied zu Glied um eine

Einheit, und jedes μ muss deshalb $x_1 - e_1 x_2$ enthalten. Andererseits schwankt λ'_2 zwischen zwei festen Werten auf und ab, die sich um eine Einheit unterscheiden; $\bar{\lambda}_2$ indessen bleibt constant und deshalb werden die μ dadurch nicht beeinflusst. Da indessen entweder das N_n oder das erste Glied der für die $R_n N_n$ gültigen Reihenentwicklung in der Nähe von e_2 abwechselnd eine höhere Potenz von $x - e_2$ enthält, so folgt aus den Recursionsformeln (3), dass $x_1 - e_2 x_2$ ein Faktor jedes anderen Teilnenners ist. Daher stellt

$$\dot{+} \frac{x_1 - e_1 x_2}{a_1} \dot{+} \frac{x_1 - e_1 x_2}{a_2 (x_1 - e_2 x_2)} \dot{+} \frac{x_1 - e_1 x_2}{a_3} \dot{+} \frac{x_1 - e_1 x_2}{a_4 (x_1 - e_2 x_2)} \dot{+}$$

diesen Typus von Kettenbrüchen dar. Ähnlich wie bei Typus I approximiert die Erzeugende $F_1(x)$ nur in der Nähe eines einzelnen Verzweigungspunktes, aber die Annäherung an das Integral $F(x)$ geschieht nur halb so schnell wie im Falle I.

Wir dürfen nicht vergessen zu bemerken, dass in allen Fällen abgesehen von Typus III die Ordnung der Approximation irgend einer Approximante bei e_1 oder e_2 erhalten werden kann, wenn man die Grade der entsprechenden Binome in den Teilzählern bis zu der Stelle, wo man den Kettenbruch abgebrochen hat, summiert, einschliesslich des ersten nach dieser Stelle. Das Gleiche gilt für Typus III, nur muss man den Punkt e_2 auslassen.

Wären wir irgend einer der vier Arten von Linien gefolgt (im Falle des Typus III muss man wegen der Anwesenheit eines abnehmenden $\bar{\lambda}$ sorgfältig verfahren), indem wir von irgend einem anderen Punkte der Tabelle anstatt von einer Ecke ausgegangen wären, so würden wir zu Kettenbrucherzeugenden von ähnlicher Form geführt sein, die mit Irregularitäten in den ersten beiden Teilzählern und Nennern behaftet sind. In der That war die Ableitung der Form von ν und μ auf Recursionsformeln zwischen drei aufeinanderfolgenden Näherungsnennern und auf die Natur der Reste basiert; sie ist deshalb unabhängig von dem Platze der Tabelle, von welchem man ausgeht. Nur die ersten beiden Partialzähler und Nenner werden auf diese Weise nicht bestimmt. In ähnlicher Weise wurden die Irregularitäten in unsere ersten μ und ν eingeführt, was wir mit Stillschweigen übergangen.

In Tabelle II hätten wir an Stelle unseres Fundamentalintegrals irgend ein anderes, das an der eventuell verlängerten Horizontalgrenze liegt, als Basis der Approximation auswählen können. Eine neue Tabelle von Approximanten würde dem entsprechen. Man könnte natürlich wieder die vier Typen von

regulären Kettenbrüchen ableiten, wenn man jetzt die vier Arten von Linien zieht. Man bemerkt auch, dass für eine Senkrechte zur Diagonale dasselbe gilt wie für die Diagonale selbst oder eine Parallele zu ihr, nur dass λ'_1 und λ'_2 ihre Rollen vertauscht haben; λ'_1 bleibt unverändert, während λ'_2 regelmässig um zwei Einheiten wächst. Die zur Diagonale senkrechte Linie giebt deshalb einen Kettenbruch von Typus I. In ähnlicher Weise würden Horizontal- oder Treppenlinien, die nach links anstatt nach rechts laufen, Erzeugende vom Typus III und IV liefern, nur dass e_1 und e_2 vertauscht sind.

Man kann leicht nachweisen, dass dies die sämtlichen Typen von regulären Kettenbrüchen sind. *Einige der irregulären sind indessen auch bemerkenswert und können bestimmten Gesetzen folgen.* So könnte z. B. eine Zickzacklinie von einem am Rande gelegenen Integral nach unten gezogen werden, indem man abwechselnd einen Schritt längs der Diagonale und einen senkrecht zu ihr naht, aber dabei immer nach unten geht. Die Approximation der entsprechenden Erzeugenden wächst abwechselnd bei e_1 und e_2 um zwei Einheiten, und der Kettenbruchteil derselben ist

$$\frac{1}{a_0x_1 + b_0x_2} + \frac{(x_1 - e_1x_2)^2}{a_1x_1 + b_1x_2} + \frac{(x_1 - e_2x_2)^2}{a_2x_1 + b_2x_2} + \frac{(x_1 - e_1x_2)^2}{a_3x_1 + b_3x_2} + \dots$$

Wir gehen jetzt zu den „anormalen“ Fällen über, in denen ein oder mehrere Integrale mehrmals in der Gesamtheit auftreten können. Wir werden uns wieder auf Erzeugende beschränken, die für zwei Verzweigungspunkte approximieren. Es mögen die Tafeln der Integrale und Approximanten genau wie vorher konstruiert sein, indem man alle Exponenten, abgesehen von λ'_1 und λ'_2 , constant lässt, während diese innerhalb unserer Tabelle auf alle mögliche Weise variieren können. Alle Faktoren $x_1 - ex_2$ in W_{r-2} oder V kann man sich in den irrationalen Teil des Integrals geworfen denken. Wenn dann ein Integral

$$\int \frac{W_{r-2-\omega} \cdot (x_1 dx_2)}{V_q^2 \cdot (x_1 - e_1x_2)^{1-\lambda'_1-\omega} (x_1 - e_2x_2)^{1-\lambda'_2} \dots (x_1 - e_{r+1}x_2)^{1-\lambda'_{r+1}}}$$

in der Gesamtheit vorkommt, so ist die Auffassung gestattet, dass irgend einer der Exponenten λ' durch die Vereinigung von ω Faktoren des Zählers mit dem entsprechenden binomischen Faktor des Nenners, um ω grösser geworden ist als er im normalen Falle wäre, sagen wir z. B., dass bei e_1 die Approximationsordnung um ω grösser sei, als die Charakteristik λ'_1 verlangt. Dementsprechend kann das Integral in das durch $\lambda'_1, \dots, \lambda'_{r+1}$ charakterisierte Quadrat gesetzt

werden. Um zu finden, wo es sonst noch in der Tabelle auftritt, wollen wir zu den am Ende des Kap. I, A, angeführten Principien zurückkehren. Man kann jede der beiden ersten Charakteristiken λ'_1, λ'_2 um eine Einheit vermehren und so zu dem nächst unteren Quadrat in der Tabelle übergehen. Oder man kann den ersten Exponenten um eine Einheit vermehren und den zweiten um denselben Betrag vermindern, indem man sich so in das nach rechts liegende Quadrat bewegt. Oder endlich man kann λ'_1 allein um zwei Einheiten vermehren und dadurch das Integral in das auf der Diagonale rechts zunächst liegende Quadrat versetzen. Diese Prozesse können ω Male auf alle mögliche Weise wiederholt werden, woraus man ersieht, dass das Integral in einem quadratischen Raume der Tabelle auftritt, der $(\omega + 1)^2$ Quadrate umfasst. Derselbe Raum würde von einer anderen Ecke aus überstrichen, wenn man die andere Auffassung festhielte, dass λ'_2 um ω grösser als gewöhnlich wäre, $\lambda'_1 + \omega$ dagegen der normale Exponent.

Um besser zu verstehen, wie die Exponenten andere Werte als die normalen annehmen, bemerken wir hier nochmals, dass ein Exponent λ' um eine Einheit vermehrt wird, wenn sich ein linearer Faktor von W_{r-2} mit einem binomischen Faktor des Nenners verbinden lässt; dagegen um eine Einheit vermindert wird, wenn zu gleicher Zeit das Quadrat desselben aus V^2 fortgeschafft werden kann.

Ein Beispiel eines solchen quadratischen Raumes ist in Tabelle III gegeben. Hier ist in dem zweiten Gliede der ersten Columnne der Grad von W um zwei Einheiten kleiner als im normalen Falle. Dasselbe Integral ist deshalb in jedes Quadrat des in der Tabelle angezeigten quadratischen Raumes zu setzen. Dementsprechend giebt es auch einen quadratischen Raum von unter sich gleichen Approximanten.

Betrachten wir jetzt irgend eine von unseren vier Linienarten. Wenn sie in keinen von den quadratischen Räumen eintritt, die zufällig in der Tabelle liegen, so werden alle Glieder, welche sie ausschneidet, ungleich sein, und wir haben genau wie im normalen Falle einen regulären Kettenbruch. Sollte sie indessen einen solchen Raum durchschneiden, so gelten die vorher im Normalfalle gemachten Untersuchungen nur vor dem Eintritt in den betreffenden Raum und nach dem Verlassen desselben. Dazwischen liegt eine Discontinuität. Wir können über dieselbe hinwegkommen, indem wir bemerken, dass das im Raume stehende Integral zu dem letzten auf der Linie vor dem Raume gefundenen Integral benachbart ist, ebenso zu dem ersten nach dem Raume. Man sieht sofort wie im normalen Falle, dass die Differenzen dieser Paare benach-

TABELLE III.

	0	1	2	3
0	$\int \frac{W_{r-\frac{1}{2}}^{(00)} \cdot (x_1 dx_2)}{(x_1 - e_1 x_2)^{-\lambda_1+1} (x_1 - e_2 x_2)^{-\lambda_2+1}}$	$\int \frac{W_{r-\frac{1}{2}}^{(01)} \cdot (x_1 dx_2)}{(x_1 - e_1 x_2)^{-\lambda_1} (x_1 - e_2 x_2)^{-\lambda_2+2}}$	$\int \frac{W_{r-\frac{1}{2}}^{(02)} \cdot (x_1 dx_2)}{(x_1 - e_1 x_2)^{-\lambda_1-1} (x_1 - e_2 x_2)^{-\lambda_2+3}}$	$\int \frac{W_{r-\frac{1}{2}}^{(03)} \cdot (x_1 dx_2)}{(x_1 - e_1 x_2)^{-\lambda_1-2} (x_1 - e_2 x_2)^{-\lambda_2+4}}$
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				

barter Integrale und daher auch der entsprechenden Approximanten die auf S. 26 aufgestellte Form hat. In der That ist der dort angegebene Beweis nur dadurch zu modificieren, dass man in V_q und W_{r-2} Faktoren $x_1 - ex_2$ zulässt. Die Wiederholung der im normalen Falle danach folgenden Betrachtungen liefert dann den Satz:

Auch in anormalen Falle definiert irgend eine unserer vier Linienarten wie im Normalfalle eine Erzeugende der gesuchten Art, vorausgesetzt, dass wir bei einer Aufeinanderfolge von gleichen Elementen alle nach dem ersten weglassen.

Wir fragen nun zunächst nach der Form der Erzeugenden. Bis zu der Stelle, wo die Linie einem Raum von $(\omega + 1)^2$ gleichen Elementen begegnet und nach dem Verlassen desselben haben die μ und ν die schon angegebene reguläre Form. Wenn man von dem letzten vor dem Raume liegenden Quadrat zum ersten in demselben befindlichen übergeht, dann wächst die Ordnung der Approximation bei e_1 und der Exponent λ'_1 stärker als gewöhnlich. Der Ueberschuss wird variieren, je nach der Lage des Quadrates, mit dem man in den Raum eintritt. Die hierbei auftretenden Irregularitäten der vier Typen von Kettenbrüchen werden wir gesondert betrachten.

Typus I.—Wir haben schon gesagt, dass der Diagonale eine Klasse von Approximanten entspricht. Es folgt daher aus der Umkehrung eines früheren Satzes Kap. I, A dass die Ordnung der Approximation beim Eintritt in den Raum um ω_1 mehr als gewöhnlich, nämlich um $\omega_1 + 2$ steigt, vorausgesetzt dass auf der Linie $\omega_1 + 1$ gleiche Elemente liegen. Beim Verlassen des Raumes steigt der Exponent λ'_1 wieder um $\omega_1 + 2$. So geht z. B. die Diagonale in Tabelle III durch zwei Quadrate des Raumes, und der Zuwachs von λ'_1 beim Betreten und Verlassen des Raumes ist 3. Entsprechend diesem Zuwachs müssen dann die beiden irregulären μ durch $(x_1 - e_1 x_2)^{\omega_1 + 2}$ teilbar sein. Bezeichnet nun n' den Grad des letzten vor dem betreffenden Raume auftretenden N , so sind die Grade der nächsten drei ungleichen $n' + 1$, $n' + \omega_1 + 2$, $n' + \omega_1 + 3$. Die Gleichungen (3) zeigen, dass das dritte dieser vier N aus den beiden vorhergehenden durch Polynome μ und ν von den resp. Graden $\omega_1 + 2$ und $\omega_1 + 1$ und das letzte aus den beiden vorhergehenden durch Polynome μ und ν von den resp. Graden $\omega_1 + 2$ und 1 abgeleitet wird. Es folgt so: *Der irreguläre Teil des Kettenbruches hat die Form:*

$$\frac{(x_1 - e_1 x_2)^{\omega_1 + 2}}{R_{\omega_1 + 1}(x_1, x_2)} + \frac{(x_1 - e_1 x_2)^{\omega_1 + 2}}{ax_1 + bx_2} + \dots,$$

wo $R_{\omega_1 + 1}$ eine ganze Form des durch den Index angegebenen Grades bezeichnet.

Typus II.—Die Vertikalreihe geht durch eine ganze Columne des Raumes, und λ'_1, λ'_2 erhalten beim Eintritt und Verlassen desselben die resp. Incremente $\omega' + 1, \omega - \omega' + 1$ und $\omega - \omega' + 1, \omega' + 1$, wo ω' einen von den Werten $\omega, \omega - 1, \dots, 0$ hat, jenachdem die Linie durch die 1^{ste}, 2^{te}, $\dots, (\omega + 1)^{\text{ste}}$ Columne des Raumes geht. Die Irregularität ist also, wie leicht zu sehen, durch das Schema gegeben:

$$+ \frac{(x_1 - e_1 x_2)^{\omega'+1} (x_1 - e_2 x_2)^{\omega-\omega'+1}}{R_{\omega+1}(x_1, x_2)} + \frac{(x_1 - e_1 x_2)^{\omega-\omega'+1} (x_1 - e_2 x_2)^{\omega'+1}}{ax_1 + bx_2} +$$

Dieser und der nächste Typus sind von besonderem Interesse, da in den Irregularitäten der Teilzähler, wie zu erwarten war, sowohl e_1 wie e_2 auftritt.

Typus III.—Die Irregularität ist von derselben Form wie beim Typus II. Wenn wir uns wie früher auf die erste Horizontallinie beschränken, dann ist $\omega' = \omega$.

Typus IV.—Die Treppenlinie schneidet immer eine ungerade Anzahl von gleichen Elementen in dem Raume aus, nämlich $2\omega' + 1$, wo ω' dieselbe Bedeutung wie vorher hat. Die Irregularität kann daher entweder

$$+ \frac{(x_1 - e_1 x_2)^{\omega'+1}}{R_{\omega'+1}(x_1, x_2)} + \frac{(x_1 - e_1 x_2)^{\omega'+1}}{a} +$$

oder

$$+ \frac{(x_1 - e_1 x_2)^{\omega'+1}}{R_{\omega'}(x_1, x_2)} + \frac{(x_1 - e_1 x_2)^{\omega'+1}}{a(x_1 - e_2 x_2)} + \text{sein.}$$

Wir werden nun einen irregulären Kettenbruch als Grenze eines regulären auffassen, von dem einige Näherungsbrüche im Begriffe sind, gleich zu werden. Die Ordnung der Irregularität werden wir als die um 1 verminderte Zahl der aufeinanderfolgenden gleichen Reste oder Approximanten definieren; mit anderen Worten, in den ersten drei Fällen als die halbe Summe der Ueberschüsse der Grade der beiden irregulären Teilzähler über den Normalfall, beim vierten Typus als die ganze Summe. Eine Grenze für die Ordnung der Irregularität kann man leicht ableiten. Die grösste Anzahl von Quadraten in einem Raum von $(\omega + 1)^3$ gleichen Elementen, die irgend eine diagonale, horizontale oder vertikale Linie schneiden kann, ist $\omega + 1$; die, welche eine Treppenlinie schneiden kann, $2\omega + 1$. Die Zahl ω gab nun früher die Verminderung des Grades des W_{r-2} in den Zählern der gleichen Integralreste an. Diese kann natürlich nicht $r - 2$ übersteigen. Wir schliessen daraus:

PROP. XVII.—Die Ordnung einer Irregularität kann im Falle der drei ersten Typen nicht $r - 2$, beim vierten nicht $2r - 4$ übersteigen.

Ein wichtiges Corollar dieses Satzes erhalten wir, wenn $r = 2$ ist und keine ganzzahligen Punkte vorhanden sind.

PROP. XVIII.—*Im hypergeometrischen Falle, wo die Anzahl der Verzweigungspunkte drei ist, muss die Tabelle normal sein, und es können keine Irregularitäten in dem Kettenbruche auftreten.*

Zum Schlusse dieses Kapitels wollen wir noch drei Bemerkungen, die sich auf die vorhergehenden Untersuchungen beziehen, hinzufügen.

Die erste Bemerkung bezieht sich auf eine Erweiterung der Tabelle für n Dimensionen. Wir haben die Gestalt des Raumes, der von den gleichen Elementen im Falle einer Irregularität eingenommen wird, für zwei Dimensionen gegeben. Die Diagonalen unseres quadratischen Raumes, längs deren λ'_1 und λ'_2 resp. constant waren, können wir als λ' -Koordinatenachsen ansehen. Wenn wir drei Coordinaten variieren lassen und die Integrale in eine räumliche Tabelle anordnen, wie wir es vorher in der Ebene gethan haben, so wird das Gebilde, welches die gleichen Elemente im Falle einer Irregularität enthält, ein reguläres Gebilde mit drei gleichen Diagonalen, d. h. ein Oktaeder sein. Im Falle von n Dimensionen haben wir in ähnlicher Weise ein reguläres Gebilde mit n gleich langen Diagonalen, die sich wechselseitig halbieren.

Zweitens kann man für jede Funktion, wie auch immer die Punkte e_1 und e_2 als zwei nicht singuläre Punkte angenommen sein mögen, eine Tabelle von rationalen Approximanten $\frac{Z_n}{N_n}$, jedoch ohne die Reste, wie auf S. 27 herstellen, und zwar mit der notwendigen Abgrenzung von quadratischen Räumen, wenn die Tabelle nicht normal sein sollte. Mit Hülfe eines Raisonnements, das sich wieder auf die ersten Glieder der Reihentwicklung bei e_1 und e_2 stützt, kann man dann wieder leicht beweisen, dass die verschiedenen Linien Kettenbrüche der oben angegebenen Formen ausschneiden.

Drittens ist es zur Vorbereitung für das nächste Kapitel und zum Vergleich mit den Arbeiten anderer wünschenswert die Typen I und IV in nicht-homogene Gestalt zu setzen. Zu diesem Zwecke wählt man im Falle des Typus I $e_1 = \infty$ als den Punkt, bei welchem man approximiert, und wir haben daher $x_1 - e_1 x_2$ durch eine Constante zu ersetzen und ferner $x_1 = x$, $x_2 = 1$ zu setzen. So erscheint der Kettenbruch in der Gestalt:

$$+ \frac{1}{a_{n-1}x + b_{n-1}} + \frac{1}{a_n x + b_n} + ;$$

die Irregularität in diese:

$$\frac{1}{R_{\omega}(x)} + \frac{1}{ax + b}.$$

Die Relation (2) zwischen dem Fundamentalintegral, der n^{ten} Approximante und dem Rest kann dann in der Form geschrieben werden:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(x - e_2)^{\lambda_2} \dots (x - e_{r+1})^{\lambda_{r+1}}} \int \frac{W_{r-2} dx}{(x - e_2)^{1-\lambda_2} \dots (x - e_{r+1})^{1-\lambda_{r+1}}} \\ &= \frac{Z_n}{N_n} + \frac{1}{(x - e_2)^{\lambda_2} \dots (x - e_{r+1})^{\lambda_{r+1}}} \int \frac{W_{r-2}^{(n)} dx}{(x - e_2)^{1-\lambda_2} \dots (x - e_{r+1})^{1-\lambda_{r+1}}}. \end{aligned}$$

In Typus IV andererseits approximiert man gewöhnlich bei $e_1 = 0$ und nimmt als Hülfsunkt $e_2 = \infty$. Ein regulärer Kettenbruch transformiert sich dann in die Gestalt:

$$+ \frac{x}{a_{n-1}} + \frac{x}{a_n} + ,$$

die Irregularität in diese:

$$\frac{x^{\omega'+1}}{R_{\omega'+1}(x)} + \frac{x^{\omega'+1}}{a}$$

oder in

$$\frac{x^{\omega'+1}}{R_{\omega'}(x)} + \frac{x^{\omega'+1}}{a}.$$

Diese Modificationen haben Nachteile im Gefolge, von denen wir bei dieser Gelegenheit reden wollen. In der homogenen Gestalt des Typus I, II und IV—um uns der Kürze halber auf diese zu beschränken—zeigt sich das Anwachsen der Approximationsordnung direct in den Graden der Teilzähler. Um nämlich die Ordnung der Approximation bei e_1 oder e_2 , die erhalten wird, wenn man den Kettenbruch bei einem gegebenen Teilbruch abbricht, zu finden, hat man nur die Grade der $x_1 - e_1 x_2$ und $x_1 - e_2 x_2$ in den Teilzählern zu summieren einschliesslich des ersten nach der Abbruchsstelle. Die homogene Schreibweise giebt ferner eine Probe für die Verträglichkeit der Grade von μ und ν durch die Recursionsformel (3) für die N . Dieser letzte Vorteil wird allemal aufgehoben, wenn man die nicht homogene Bezeichnungsweise einführt, ausserdem der erstere, wenn man als Approximationspunkt $e_1 = \infty$ nimmt.—Wir bemerken ferner, dass oben beim Typus I der zweite Teilbruch im Falle einer Irregularität scheinbar zu dem regulären Teile des Kettenbruchs gehört. Die homogene Schreibweise zeigt aber, dass es nicht so ist.

KAPITEL II.

HISTORISCHE BEMERKUNGEN.

(A). Die Kettenbrüche.

Es ist meine Absicht, in dem historischen Ueberblick, den das vorliegende Kapitel enthalten soll, systematisch die früher angestellten Untersuchungen zu besprechen, die sich auf die von uns behandelten Integrale und die Wurzeln der in ihnen auftretenden Polynome beziehen. Der letztere Gegenstand und ein oder zwei andere, welche wir berühren, beziehen sich, genau genommen, erst auf die folgenden Kapitel unserer eigenen Untersuchung, wir führen sie aber lieber hier als später an, um den historischen Bericht einheitlicher zu gestalten.

Die Approximierung der Integrale ist fast ausnahmslos mit Hülfe nicht-homogener Kettenbrüche vom ersten Typus bewerkstelligt worden, und diese Art werden wir auch weiterhin immer meinen, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt ist. Ausserdem werden in diesem Kapitel und auch in den folgenden sämtliche λ und e als reell vorausgesetzt werden.

Das erste Beispiel solcher Approximation scheint von Gauss* in seiner Abhandlung: „Methodus nova integralium valores“ u. s. w. gegeben zu sein. Hier entwickelte er $\frac{1}{2} \log \frac{x+1}{x-1}$, welches man als $\frac{1}{x} F(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, x^{-2})$ oder als $-\int \frac{dx}{(x+1)(x-1)}$ schreiben kann, in einen Kettenbruch und zeigte, dass der Nenner irgend eines Annäherungsbruches und der entsprechende Rest, jetzt als Kugelfunktionen erster und zweiter Art bekannt, bis auf einen Faktor hypergeometrische Reihen seien. Heine† fügte dem hinzu, dass sie algebraische und transcendente Lösungen einer gemeinsamen Differentialgleichung seien. Die hypergeometrischen Bestandteile sind „verwandt,“ d. h. hypergeometrische Reihen $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, deren entsprechende drei Elemente sich nur um ganze Zahlen unterscheiden. Die Bedeutung dieser Thatsache ist durch die moderne Gruppentheorie zu Tage getreten, mit Hülfe deren man erkennt, dass die Kugelfunktionen erster und zweiter Art sämtlich Lösungen von Differentialgleichungen sind, die eine gemeinsame Gruppe besitzen.

Analoge Resultate wurden zunächst von Heine auf Jacobi's Veranlassung für $F(\alpha, 1, \gamma, x)$ abgeleitet. Er entwickelte diese Funktion in Kettenbrüche

* Ges. Werke, Bd. III, S. 163, 1814.

† Crelle, Bd. 26, S. 192, 1843.

sowohl vom ersten* wie vom vierten† Typus. Bei der Betrachtung des ersten Typus ersetzte er $F(\alpha, 1, \gamma, x)$ durch ein bestimmtes Integral zwischen zwei Verzweigungspunkten, welches wir nach Vertauschung von Argument und Parameter in folgendes unbestimmte verwandeln können:

$$\frac{1}{x^{1-\alpha}(x-1)^{1+\alpha-\gamma}} \int \frac{dx}{x^\alpha(x-1)^{\gamma-\alpha}},$$

oder in unserer Schreibweise:

$$\frac{1}{(x-e_1)^{\lambda_1}(x-e_2)^{\lambda_2}} \int \frac{dx}{(x-e_1)^{1-\lambda_1}(x-e_2)^{1-\lambda_2}}.$$

Wir werden uns die Freiheit nehmen, auch in Zukunft seine oder Heun's oder Humbert's Integrale ohne Weiteres in dieser Weise zu übersetzen, so weit dies notwendig scheint. In der That ist der Zusammenhang unseres Gegenstandes mit solchen bestimmten Integralen, so schön er sein mag, doch vielleicht mehr für ein zufälliges als für ein wesentliches Moment zu halten. Die Einführung bestimmter Integrale bringt übrigens eine notwendige Beschränkung auf Exponenten λ mit sich, die für sämtliche *endliche* Verzweigungspunkte kleiner als 1 sind. Herr Prof. Klein hat mich allerdings darauf aufmerksam gemacht, dass man diese Beschränkung aufheben kann, wenn man die Theorie der bestimmten Integrale durch Einführung der sogenannten „Doppelumläufe“ erweitert. Sehen wir von dieser Beschränkung ab, so wird $F(\alpha, 1, \gamma, x)$ das allgemeinste unserer Integrale darstellen, das *nur* drei Verzweigungspunkte (hier 0, 1, ∞) besitzt. Wir haben diesen Fall schon *den hypergeometrischen Fall* unserer Integrale genannt; derselbe ist von besonderer Einfachheit, weil bei ihm keinerlei ganzzahlige Punkte ρ auftreten. Die Regularität des Kettenbruchs des ersten Typus zeigte sich in Heine's Arbeit; der Kettenbruch des vierten Typus ist ein specieller Fall von Gauss'‡ Kettenbruch für $\frac{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x)}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)}$. Man erhält ihn aus letzterem, wenn man $\beta=0$ setzt und γ ersetzt durch $\gamma-1$; er ist natürlich ebenfalls regulär.

Auch für die Behandlung der Kettenbrüche, zu deren Integralen vier oder mehr Verzweigungspunkte gehören, hat Heine§ den Weg gewiesen. Nachdem

* Monatsberichte der Berliner Akademie, 1866, oder Handbuch der Kugelfunktionen, Bd. I, S. 276.

† Handbuch, Bd. I, S. 275.

‡ „Disquisitiones generales circa seriem infinitam,” Ges. Werke, Bd. III, S. 128, 1813.

§ Orelle, Bd. 60, S. 294, 1862.

er eine allgemeine Methode abgeleitet hat, um aus der Reihenentwicklung einer Funktion in der Umgebung des Punktes ∞ einen Kettenbruch vom ersten Typus, der in der Nähe desselben Punktes approximiert, zu finden, richtet er seine Aufmerksamkeit zuerst auf elliptische Integrale, speciell auf

$$\frac{1}{\sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}} \int \frac{W_1 \cdot dx}{\sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}}$$

und nachher auf eine Verallgemeinerung derselben, nämlich auf Ausdrücke der Gestalt

$$\frac{1}{\sqrt{(x-e_1) \dots (x-e_r)}} \int \frac{W_{r-2} \cdot dx}{\sqrt{(x-e_1) \dots (x-e_r)}}.$$

Hier haben die Exponenten λ für die Punkte e_1, \dots, e_r alle den speciellen Wert $\frac{1}{2}$, während der Exponent für den Punkt ∞ den Wert $-\frac{r}{2} + 1$ hat. Heine's Interesse concentrirt sich auf die Beziehungen dieser Integrale zu den Lamé'schen Polynomen. Wenn die Constanten des zu der bei dem elliptischen Integrale auftretenden $W_1(x)$, d. h. die Lage des ganzzahligen Punktes so angenommen wird, dass eine Irregularität der ersten Ordnung an einer gegebenen Stelle des Kettenbruchs auftritt, dann wird der Nenner des Näherungsbruchs, der durch Abbruch des Kettenbruchs gerade vor der Irregularität erhalten wird, ein Lamé'sches Polynom sein. Umgekehrt ist jedes Lamé'sche Polynom in einem solchen Kettenbruch in der hiermit angegebenen Art enthalten. In gleicher Weise werden verallgemeinerte Lamé'sche Polynome durch das zweite Integral geliefert, wenn W_{r-2} solchen Bedingungen unterworfen wird, dass der zugehörige Kettenbruch an einer gegebenen Stelle eine Irregularität der $r-2^{\text{ten}}$ Ordnung besitzt. Man wird aus unserem Resultate, Prop. XVII, ersehen, wie dies Heine übrigens ausdrücklich für seinen Fall bemerkt, dass dies die *grösstmögliche* Irregularität ist. Man findet dementsprechend die Reste in der Form, wie sie Heine giebt. Für den zweiten Kettenbruch ist sie die folgende:

$$\frac{1}{\sqrt{(x-e_1) \dots (x-e_r)}} \int \frac{O \cdot dx}{N_n^2 \cdot \sqrt{(x-e_1) \dots (x-e_r)}},$$

wo O eine Constante bedeutet. Wie die Kugelfunktionen erster und zweiter Art zu $\frac{1}{2} \log \frac{x+1}{x-1}$ in Beziehung stehen, so sind die Polynome N_n und die Vielfachen derselben, die man durch Multiplication mit den entsprechenden Restintegralen erhält, mit den angegebenen Integralausdrücken verknüpft (vgl. S. 22).

Heun* und Humbert† wandten zunächst Heine's Methode auf den Kettenbruch für

$$\frac{1}{(x-e_1)^{\lambda_1} \dots (x-e_r)^{\lambda_r}} \int \frac{W_{r-2} \cdot dx}{(x-e_1)^{1-\lambda_1} \dots (x-e_r)^{1-\lambda_r}}$$

an. Die Wichtigkeit, die Heun's Resultate für die Theorie unserer Integrale, sowohl hier wie an anderen Stellen, besitzen, wird später ersichtlich sein. Hier indessen ist zu bemerken, dass Heun die Beschränkung nicht beachtet, die ihm durch Verwandlung der Funktion in die Summe bestimmter Integrale auferlegt wird, nämlich dass die λ für alle im Endlichen gelegenen Verzweigungspunkte kleiner als 1 sein sollten. Trotzdem reichen seine Resultate weiter als diejenigen Humbert's. Wenn wir die in Rede stehende Beschränkung hinzufügen, so können wir sie folgendermaassen zusammenfassen: Sei eine reguläre Differentialgleichung gegeben:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \left(\frac{1-\lambda_1}{x-e_1} \dots + \frac{1-\lambda_r}{x-e_r} \right) \frac{dy}{dx} + \frac{W'_{r-2}(x)}{(x-e_1) \dots (x-e_r)} y = 0,$$

in der die λ und e reell und die λ algebraisch kleiner als 1 sind, und seien die Constanten in W'_{r-2} (d. h. die *accessorischen Parameter*) so auf alle mögliche Weise bestimmt, dass eine Lösung der Differentialgleichung ein Polynom ist. Dann kann jede von diesen Lösungen als Nenner des Näherungsbruches angesehen werden, der einer grössten Irregularität in der Kettenbruchentwicklung für

$$\frac{1}{(x-e_1)^{\lambda_1} \dots (x-e_r)^{\lambda_r}} \int \frac{W_{r-2} \cdot dx}{(x-e_1)^{1-\lambda_1} \dots (x-e_r)^{1-\lambda_r}}$$

entspricht, vorausgesetzt dass die Coefficienten von W_{r-2} entsprechend richtig bestimmt sind. Dabei wird eine transcendente Lösung der Differentialgleichung durch das Produkt des Polynoms N_n in das Integral $\int \frac{C \cdot dx}{N_n^2 \cdot (x-e_1)^{1-\lambda_1} \dots (x-e_r)^{1-\lambda_r}}$ vorgestellt werden.

Man wird bemerken, dass bei diesen Untersuchungen ein einzelnes Irregularitätspolynom und der einzelne entsprechende Rest die ganze Aufmerksamkeit absorbiert haben. Ein entschiedener Fortschritt wurde in zwei Abhandlungen von Heine‡ und Heun§ gemacht. In beiden beschränkten die Autoren allerdings ihr Interesse auf das Integral:

$$\frac{1}{(x-e_1)^{\pm\frac{1}{2}} \dots (x-e_s)^{\pm\frac{1}{2}}} \int \frac{W_1 \cdot dx}{(x-e_1)^{1\mp\frac{1}{2}} \dots (x-e_s)^{1\mp\frac{1}{2}}}$$

* Math. Ann., Bd. 80, 1887.

† Journal de l'école polytechnique, tome 29, cahier 48, 1880.

‡ Monatsberichte der Berliner Akademie, 1866, oder Handbuch der Kugelfunktionen, Bd. 1, S. 204.

§ Math. Ann., Bd. 83, 1888, „Beiträge zur Theorie der Lamé'schen Funktionen.“

und dessen Beziehung zu den Lamé'schen Polynomen. In der ersten dieser beiden Abhandlungen wurde indessen zuerst eine Reihe von Integralen

$\int \frac{W_1^{(n)} dx}{N_n^2 (x - e_1)^{1+\frac{1}{2}} \dots (x - e_g)^{1+\frac{1}{2}}}$ durch die successiven Reste zusammengekettet.

Es war das specielle Verdienst Heun's, *die Gruppeneigenschaften des Kettenbruchs* entdeckt zu haben, indem er dieselben an den Kugelfunktionen bemerkte. In ähnlicher Weise hat er für die hier auftretenden N_n gezeigt, dass *sie Differentialgleichungen mit einer gemeinsamen Gruppe genügen*. Dabei bestimmt im Falle der Kugelfunktionen der $\log \frac{x+1}{x-1}$ durch die Gleichung

$$R_n = \frac{1}{2} N_n \log \frac{x+1}{x-1} - Z_n$$

und im vorliegenden Falle das elliptische Integral durch die entsprechende Gleichung die Periodicitätsmoduln der Gruppe, und *die Recursionsformeln zwischen drei successiven Näherungsnennern sind als Formeln zwischen drei gleichgruppigen Funktionen aufzufassen*. So ist, wie Heun sagt, der Kettenbruch nicht ein zufälliges Moment der Theorie, sondern er bestimmt beides, die Gleichheit der Gruppe und die Beziehungen zwischen gleichgruppigen Funktionen.

Was wir im ersten Kapitel gewonnen haben, wird jetzt ersichtlich sein. Anstatt eines einzelnen Kettenbruchs, d. h. einer Kette von verwandten Integralen mit nicht mehr als $r - 2$ ganzzahligen Punkten, fanden wir eine mehrfach unendliche Gesamtheit von solchen. Von Anfang an waren alle Beschränkungen betreffs der Realität der λ , W , und e aufgehoben. Durch die Gesamtheit der so gewonnenen Approximanten oder Reste hindurch können wir allerlei Arten von Ketten verfolgen. Insbesondere haben wir nicht nur Kettenbrüche einer einzelnen Art sondern vier verschiedene Typen untersucht, welche im normalen Falle regulär waren, während andere, wenn sie auch nicht selbst regulär waren, doch an ein bestimmtes Gesetz gebunden waren. Dabei ist eine gleichzeitige Approximation in der Nähe von zwei oder mehr Verzweigungspunkten eingeführt. Von den Irregularitätspolynomen, für welche die oben erwähnten Autoren sich interessieren, haben wir gesehen, dass sie nicht nur in einer einzelnen Kette, sondern in allen, welche einen bestimmten quadratischen Raum durchziehen, auftreten. Die Grenze für die Ordnung, sowie die Art der Irregularitäten wurde klar gestellt.* Endlich ist das zufällige Element, das

* Heun's Beweis in der letztgenannten Abhandlung, dass der Kettenbruch hinter der Irregularität, welche ein Lamé'sches Polynom bestimmt, durchaus regulär verlaufen muss, scheint mir nicht richtig. Ueberdies

durch die Kettenbrüche und die Approximation eingeführt war, dadurch eliminiert, dass man die Gesamtheit aller Integrale in's Auge fasste, die durch gewisse Gruppeneigenschaften charakterisiert sind.

Wir wollen den vorstehenden Bericht nicht schliessen, ohne vorher die Dissertation von M. H. Padé zu erwähnen, deren Anregung und Hülfe der Verfasser dankbar anerkennt und die er besonders dem Leser empfiehlt. Dieselbe bezieht sich auf Approximation im Allgemeinen. Padé* betrachtet, wie es Frobenius† vor ihm gethan, die Approximation irgend einer Funktion vermitteltst rationaler Funktionen $\frac{U_p}{V_q}$ in der Nähe eines nicht-singulären Punktes, den er ohne Verlust der Allgemeinheit als $x = 0$ nimmt. Die entstehenden Funktionen $\frac{U_p}{V_q}$ ordnet er nach den Werten von p und q in eine Tabelle an. Bei dieser Classification ist implicite ein zweiter Punkt (nämlich bei Padé der ∞ ferne Punkt) bevorzugt, was Padé allerdings nicht erwähnt. Dies wird evident, wenn man seine rationalen Näherungsfunktionen $\frac{U_p(x)}{V_q(x)}$ in die Gestalt $\frac{U_p(x_1, x_2)}{V_q(x_1, x_2)} x_2^{q-p}$ setzt. In Bezug auf die beiden Punkte werden drei Klassen von regulären Kettenbrüchen unterschieden, nur ist die Rolle des zweiten Punktes hier unter dem Schleier der nicht-homogenen Schreibweise verborgen. Von gleichzeitiger Approximation in der Nähe des zweiten Punktes $x = \infty$ kann man indess in keiner Weise sprechen, da die Eigenschaften der Reste dort unbekannt sind. Wir haben weiter zu bemerken, dass Padé's Resultate nicht *in toto* auf unsere Tabelle der $\frac{Z_n}{N_n}$, der rationalen Bestandteile der Approximanten, angewandt werden können, da die Konstruktion seiner und unserer Tabelle unterhalb der Hauptdiagonale auf ganz verschiedenen Principien beruht.

Beispiele von Approximation einer Funktion in zwei Punkten findet man in einer Arbeit von Hurwitz,‡ aber dieselben haben gar keine Beziehung zu unseren

citiert er Heine falsch, indem er behauptet, dass nach Heine der Kettenbruch bis zu diesem Punkte regulär wäre. Was Heine wirklich ausführt, ist, dass er die Form des Kettenbruches an denjenigen Stellen festlegt, wo eine Irregularität der ersten Ordnung nicht auftritt, in dem er dieselbe regulär findet. Alles dies indessen hatte Heine bereits vorher bewiesen, vgl. Crelle, Bd. 60, S. 297, 1861.

* Sur la représentation approchée d'une fonction par des fractions rationnelles, 1892; Paris, Gauthier Villars.

† Crelle, Bd. 90, 1879.

‡ Math. Ann., Bd. 38, 1891.

Integralen. Dasselbe gilt von einer Arbeit Schering's,* die sich mit der Approximation in beliebig vielen Punkten für Funktionen, die nach Potenzen von Polynomen entwickelbar sind, beschäftigt.

(B). *Die Wurzeln der Polynome.*

Zu Anfang sei hier erwähnt, was wir im ersten Kapitel näher auseinander gesetzt haben, dass dieselben Verzweigungspunkte irgend einem unserer Integrale und der Differentialgleichung für das in dem Integral auftretende Polynom gemeinsam sind. Die Frage nach der Lage der Wurzeln eines Polynoms gegen die Verzweigungspunkte kann demnach auf verschiedene Weise angegriffen werden, entweder vermitteltst eines Kettenbruchs, in welchem man das Polynom einschalten kann, oder direct von der Differentialgleichung aus oder durch specielle Methoden. In allen Untersuchungen über diese Frage werden alle λ und e als reell angenommen.

Der hypergeometrische Fall dreier Verzweigungspunkte $r = 2$ hat natürlich immer besonderes Interesse erregt. Schon früh† hat man bemerkt, dass die Wurzeln der Kugelfunktionen erster Art alle reell seien und zwischen den beiden Verzweigungspunkten $+1$ und -1 liegen. Viel später entdeckte man, dass in ähnlicher Weise die Wurzeln der Näherungsnenner des Kettenbruches vom ersten Typus für $\frac{1}{(x-e_1)^{\lambda_1}(x-e_2)^{\lambda_2}} \int \frac{dx}{(x-e_1)^{1-\lambda_1}(x-e_2)^{1-\lambda_2}}$ zwischen seinen endlichen Verzweigungspunkten e_1 und e_2 liegen, so lange λ_1, λ_2 algebraisch kleiner als 1 sind. Erst in den letzten Jahren indessen erhielt man eine vollständige Lösung für irgend welche reelle Werte von λ_1, λ_2 . Hilbert‡ bestimmte nämlich die Zahl der imaginären Wurzeln, während die geometrischen Methoden von Klein§ weiter reichten und auch die Verteilung der reellen Wurzeln zwischen den drei Verzweigungspunkten zu finden gestatteten.

Der erste Satz, der einen Fall mit mehr als drei Verzweigungspunkten betraf, scheint von Liouville|| betreffs der verallgemeinerten Lamé'schen Poly-

* „Das Anschliessen einer Funktion an algebraische Funktionen in unendlich vielen Stellen.“ Abhandlg. der kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Bd. 26, 1876.

† Legendre, Memoires de l'Academie de Paris, 1784. Vgl. Heine, Handbuch, Bd. I, S. 23.

‡ Crelle, Bd. 103, 1837. Vgl. auch Stieltjes, Comptes Rendus, Bd. 100, 1888.

§ Math. Ann., Bd. 37, 1890, „Ueber die Nullstellen der hypergeometrischen Reihen.“ Man vergl. auch seine Vorlesungen 1890-91. Vgl. ferner Hurwitz, Math. Ann., Bd. 38, 1891.

|| Jour. de Math., t. 11, 1846, „Lettres sur diverses questions d'analyse“ u. s. w. adressées à M. P. H. Planquet. Deuxième lettre, p. 261.

nome gegeben zu sein. Diese, wie wir hier vorweg bemerken, sind alle reell, d. h. Polynome mit bloss reellen Coefficienten. Nun bewies er, dass ihre Wurzeln, *so weit* sie reell sind, zwischen den beiden äussersten endlichen Verzweigungspunkten der zugehörigen Differentialgleichungen liegen. Dies ergänzte Heine,* indem er zeigte, dass die Wurzeln alle reell sind. Dann zeigte Humbert,† indem er Heine's Methode benutzte, dass genau dasselbe nicht nur für ein Lamé'sches Polynom, sondern auch für irgend eins, das einer Maximalirregularität des Kettenbruchs

$$\frac{1}{(x-e_1)^{\lambda_1} \dots (x-e_r)^{\lambda_r}} \int \frac{W_{r-2} \cdot dx}{(x-e_1)^{1-\lambda_1} \dots (x-e_r)^{1-\lambda_r}}$$

entspricht, gilt, vorausgesetzt dass $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ alle kleiner als eins sind.

Inzwischen hatte Heine‡ einen sehr wichtigen Satz für die Theorie unserer Polynome aufgestellt. Möge eine Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \left(\frac{1-\lambda_1}{x-e_1} + \dots + \frac{1-\lambda_r}{x-e_r} \right) \frac{dy}{dx} + \frac{Ax^{r-2} + Bx^{r-3} + \dots}{(x-e_1) \dots (x-e_r)} y = 0$$

vorgelegt sein mit irgend wie gegebenen reellen oder imaginären Werten von e und λ . Dann lässt sie

$$\frac{(n+1)(n+2) \dots (n+r-2)}{1 \cdot 2 \dots (r-2)}$$

Bestimmungen der accessorischen Parameter A, B, \dots zu, so dass eine Lösung ein Polynom vom n^{ten} Grade wird. In dem gewöhnlich betrachteten Falle, in welchem die λ und e reell sind, sind die Polynome selbst reell. Einige Zeit nachher bemerkte Klein,§ dass diese Zahl mit der Anzahl der verschiedenen Verteilungen von n ungleichen Dingen auf $r-1$ Plätze identisch ist, und wies durch Continuitäts-Betrachtungen nach, dass für gegebene e_1, \dots, e_r jedes verallgemeinerte Lamé'sche Polynom vom Grade n eine verschiedene Verteilung seiner n Wurzeln auf die $r-1$ Segmente $e_1 e_2, e_2 e_3, \dots, e_{r-1} e_r$ zwischen den endlichen Verzweigungspunkten aufweist. Endlich verallgemeinerte Stieltjes|| den Satz, indem er bewies, dass derselbe für die Verteilung der Wurzeln der Polynome bei gegebenen *reellen* e und λ allemal gelte, falls nur die $\lambda_1, \dots, \lambda_r$

*Hd. Kugelfunktionen, Bd. I, S. 382-4.

† Jour. de l'école polytechnique, tome 29, cahier 48, 1880.

‡ Monatsberichte der Berliner Akademie, 1884.

§ Math. Ann., Bd. 18, 1881.

|| Acta Math., VI, 1884.

kleiner als 1 seien. Dieselbe Beschränkung trafen wir oben in Humbert's Satz, wo nur bewiesen war, dass die Wurzeln zwischen e_1 und e_r liegen. Der Fortschritt ist derselbe wie derjenige Klein's gegenüber Heine im Lamé'schen Falle; man lernt nämlich, dass diese verschiedenen Polynome verschiedene Wurzelverteilungen repräsentieren.

Die zuletzt angeführten Sätze gehen übrigens über das hinaus, was wir später benutzen werden. Wir werden deshalb keine Gelegenheit haben, auf sie zurückzukommen, und wir haben sie nur der Vollständigkeit halber hier angeführt.

Es scheint kaum nötig zu bemerken, dass diese Sätze, abgesehen vom Falle dreier Verzweigungspunkte $r = 2$, nur eine sehr beschränkte Auskunft über die V_q unserer Integrale geben, nämlich nur für diejenigen, die einer grösstmöglichen Irregularität in den Integralen entsprechen. Sätze von allgemeiner Anwendbarkeit scheinen nicht zu existieren.* In dem einzigen Falle indessen, wo $r = 3$ ist und $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ kleiner als 1 genommen werden, kann der Kettenbruch, (wenn man ihn wie gewöhnlich vom ersten Typus und in Bezug auf $e_{r+1} = \infty$ nimmt), nach Vertauschung von Argument und Parameter im Fundamentalintegral $\int \frac{W_1 \cdot dx}{(x - e_1)^{1-\lambda_1} \dots (x - e_3)^{1-\lambda_3}}$ als specieller Fall eines von Markoff† betrachteten Kettenbruchs angesehen werden. Es folgt dann aus der Arbeit des letzteren, dass die Wurzeln aller Näherungsnenner reell sind und alle ausser etwa einer einzigen zwischen e_1 und e_3 liegen. Ein Beispiel zur Anwendung dieses Satzes liefert der oben von uns betrachtete Kettenbruch im Falle eines gewöhnlichen Lamé'schen Polynoms.

Im letzten Kapitel werde ich zu den Wurzeln der Polynome zurückkehren. Wenn auch meine Sätze, ebenso wie die Markoff'schen nicht befriedigend sind hinsichtlich ihrer Vollständigkeit, so habe ich doch einige Einsicht in die Wurzeln anderer als der Irregularitätspolynome gewinnen können und zwar durch geometrische Methoden, durch welche sich auch die früher bekannten, eben recapitulierten Resultate betreffs der Irregularitätspolynome leicht ergeben.

* Heun giebt in seiner Göttinger Inauguraldissertation 1880 allerdings einen allgemeinen Satz sowohl für die Realität wie für die Trennung der Wurzeln. Der Beweis ist indess inkorrekt, indem er viel zu viel beweist. Er bemerkt nicht, dass die Coefficienten der höchsten Potenz in seinen Polynomen nicht notwendig positiv sind; infolgedessen sind aber seine Sturm'schen Reihen fehlerhaft.

† Math. Ann., Bd. 27, 1885. Erste Note.

Die gegenseitige Trennung der Wurzeln von benachbarten Polynomen V_q habe ich ebenfalls behandelt. Das einzige frühere Resultat, das mir bezüglich dieses Gegenstandes bekannt war, ist das für den hypergeometrischen Fall $r = 2$ unter der gewöhnlichen Beschränkung, dass λ_1, λ_2 kleiner als 1 seien.* Betrachtet man die Kettenbruchentwicklung für das Integral

$$\frac{1}{(x - e_1)^{\lambda_1} (x - e_2)^{\lambda_2}} \int \frac{dx}{(x - e_1)^{1-\lambda_1} (x - e_2)^{1-\lambda_2}},$$

so sagt jenes Resultat aus, dass sich einerseits die Wurzeln zweier successiver Näherungsnenner und andererseits die Wurzeln des Zählers und Nenners ein- und desselben Näherungsbruches wechselseitig in dem zwischen den endlichen Verzweigungspunkten e_1 und e_2 gelegenen Segmente trennen. Dies ist nur ein specieller Fall eines weit allgemeineren Theorems für den Fall $r = 2$ (vgl. Prop. XXIV), das wir später geben werden.

KAPITEL III.

GEOMETRISCHE GRUNDLAGE.

Die Methode, auf welche sich die geometrische Behandlung unseres Gegenstandes in den folgenden Kapiteln gründet, ist die der „conformen Abbildung.“ Das spezifische Problem, auf das wir hier unsere Aufmerksamkeit zu lenken haben, ist die Abbildung eines einfach zusammenhängenden geradlinigen Polygons auf eine Halbebene, die in solcher Weise erfolgen soll, dass jedem Punkte des Polygons ein und nur ein Punkt der Halbebene entspricht. Dabei soll dem Rande des Polygons der Rand der Halbebene entsprechen, und die Conformität der Abbildung soll nur in bestimmten Punkten innerhalb oder auf der Grenze aufhören. Dass diese specielle Abbildung möglich ist und also eine analytische Funktion definiert, entspricht einer bekannten Behauptung von Riemann, ist aber zuerst von Weierstrass bewiesen worden, wie in einer Abhandlung von Schwarz† mitgeteilt ist. Die Funktion ist in soweit willkürlich, als sie drei Parameter enthält. Diese sind indessen vollständig bestimmt, sobald man verlangt, dass drei Punkte auf dem Rande des Polygons drei bestimmten Punkten auf dem Rande der Halbebene entsprechen. Die nähere Untersuchung dieser Funktion gründet sich bei Schwarz auf das sogenannte

* Gegenbauer, Wiener Berichte, Bd. 84, Ab. 2, S. 1102.

† Crelle, Bd. 70, 1869, „Ueber einige Abbildungsaufgaben,“ oder Ges. Werke, Bd. 2, S. 65; vgl. insbesondere S. 77.

„Symmetrieprinzip,” das in speciellen Fällen schon früher bei Riemann* in seiner Untersuchung über Minimalflächen hervorgetreten war. Nehmen wir in unserem Polygon irgend einen Punkt und ein Paar rechtwinkliger Axen durch denselben, auf welche wir die Polygonpunkte durch die complexe Variabele η beziehen. Mögen die entsprechenden Punkte der Halbebene, auf welche wir unser Polygon abbilden, mit x bezeichnet werden. Wir denken uns diese Halbebene durch die Axe der reellen Zahlen begrenzt und nehmen an, dass die Werte von x innerhalb unserer Halbebene einen positiven imaginären Bestandteil haben. Wir werden kurz von einer positiven Halbebene x sprechen. Durch die Abbildung wird η als eine Funktion von x , $\eta(x)$, definiert. Möge jetzt das Polygon an einer seiner Seiten gespiegelt werden, und bezeichne $\eta'(x)$ die Funktion, welche das Spiegelbild auf die negative Halbebene x abbildet. Das Symmetrieprinzip behauptet dann, dass die zweite Funktion $\eta'(x)$ nur die analytische Fortsetzung der ersten $\eta(x)$ ist. Die beiden Polygone zusammen geben also einen vollständigen Zweig der Funktion. Die anderen Zweige, die den Umläufen von x um die Verzweigungspunkte der Funktion entsprechen, kann man dadurch erhalten, dass man das Doppelpolygon an allen seinen Seiten spiegelt, dann wieder die Spiegelbilder an den übrigen und so fort *ad infinitum*. Schwarz bestimmte von hier aus die Form der Funktion $\eta(x)$. Ehe indess seine Abhandlung erschien, hat Christoffel† das bezügliche Resultat schon für den Fall eines Polygons gegeben, das nicht durch das Unendliche geht, keine Windungspunkte in seinem Innern enthält und einblättrig ist, d. h. sich nirgends selbst überdeckt. Die Conformität der Abbildung kann in einem solchen Falle nur in den Ecken E_1, \dots, E_{r+1} des Polygons aufhören. Bezeichne man mit e_1, \dots, e_{r+1} die entsprechenden reellen Verzweigungspunkte auf der Grenze der Halbebene, mit $\lambda_1\pi, \dots, \lambda_{r+1}\pi$ die Winkel des Polygons, so dass

$$\sum \lambda = r - 1.$$

Die λ messen ersichtlich die Abweichung von der Conformität. Werfen wir e_{r+1} noch in den Unendlichkeitspunkt der x -Ebene, so haben wir nach Schwarz und Christoffel in diesem Falle:

$$\eta(x) = \int \frac{dx}{(x - e_1)^{1-\lambda_1} \dots (x - e_r)^{1-\lambda_r}}.$$

* „Ueber die Fläche von kleinsten Inhalt,” u. s. w, 1866, Ges. Werke, S. 297.

† Annali di Matematica, Bd. 1, S. 97, 1867.

Schwarz bemerkt des Weiteren, dass sein Beweis auch auf solche Polygone anwendbar ist, die durch das Unendliche ziehen oder Windungspunkte im Innern besitzen, und schliesst die Untersuchung über diese Frage mit einem Beispiel für die ersteren ab. Weiterhin gab noch Schläefli* einen analytischen Beweis für die Möglichkeit der Abbildung im allgemeinen Falle. Endlich verdanken wir es Klein,† dass er die in's Unendliche laufenden Polygone nach ihrer wirklichen Gestalt auffasste und dadurch den Allgemeinverlauf der entsprechenden Funktionen bestimmte. Klein beginnt mit der Betrachtung der Kreisbogendreiecke und ihrer Beziehung zur hypergeometrischen Reihe und geht dann zu den Kreisbogen- und geradlinigen Polygonen mit einer beliebigen Seitenzahl über. Im Verfolg dieser Methode ist die Gestalt der geradlinigen Polygone neuerdings von Schoenflies‡ sehr ausführlich behandelt worden. Die Erläuterungen, welche ich hierüber folgen lasse, sind in freier Form den von Klein in den Jahren 1890–91 gehaltenen Vorlesungen entnommen.

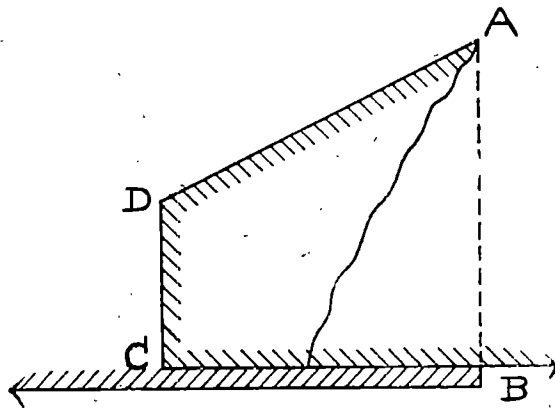


FIG. 1.

Um eine etwas bestimmtere Idee von Polygonen zu erhalten, die sich in's Unendliche erstrecken, wollen wir einige der einfachsten construieren. Man lege irgend ein gewöhnliches Polygon, z. B. ein Viereck $ABCD$ so auf eine Halbebene, dass eine Seite, z. B. CB längs der Grenze der Halbebene liegt, und mache dann von einer der gegenüberliegenden Ecken, sagen wir von A aus, nach der Seite hin denselben Schnitt in Polygon und Halbebene. Verbindet man dann die

* Crelle, Bd. 78, 1878.

† Vgl. Math. Ann., Bd. 37, 1890, sowie Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen von 1890–91.

‡ Göttinger Nachrichten, April, 1892. (Vgl. auch das eben erscheinende Heft 42, 3 der Mathematischen Annalen.)

Teile des Polygons rechts und links vom Schnitte mit den auf der anderen Seite liegenden Teilen der Halbebene, so wird man eine continuirliche begrenzte Oberfläche, also ein Polygon erhalten. Es ist hierbei gleichgültig, ob die Teile so vereinigt werden, dass sie längs des Schnittes sich kreuzen, wie es oft zwei Blätter einer Riemann'schen Fläche thun, oder ob sie einfach über einander liegen, indem vor der Vereinigung ein Teil des Polygons oberhalb, der andere unterhalb der Halbebene gelegen ist. In Fig. 1 deutet die Punktierung den letzteren Fall an. Die Schraffierung bezeichnet das Innere des neu entstandenen Polygons, wobei die über einander gelegenen Teile der Seite CB neben einander gezeichnet sind. Die Aufeinanderfolge der Polygonpunkte wird in beiden Fällen dieselbe sein und deshalb auch die Funktion, die durch seine Abbildung auf eine Halbebene definiert ist. Man wird bemerkt haben, dass der Winkel A

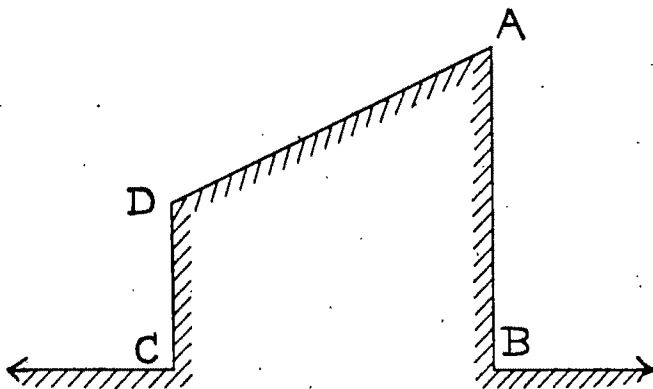


FIG. 2.

bei diesem Process um 2π gewachsen ist und dass er sich in Folge dessen selbst überschlägt. Ueberdies hat man die Seite BC durch's Unendliche gehen lassen, indem sie sich ebenfalls wegen der angehängten Grenze der Halbebene teilweise selbst überdeckt. In dem vervollständigten Polygone könnte man wieder eine Halbebene von A aus an die gegenüberliegende Seite anheften und so fort, indem man den Winkel zugleich mit der Seite sich so oft überschlagen lässt, wie man will. Diesen Process nennt Klein *die polare Anhängung von Halbebenen*. Eine andere Methode Halbebenen hinzuzufügen, wird von ihm als *die laterale Anhängung* bezeichnet. Man heftet einfach längs einer Seite eines Polygons eine Halbebene so an, dass die Fläche continuirlich wird. So erhalten wir aus unserem Viereck durch Anhängung längs CB , Fig. 2. Die Seite CB geht

dadurch in ihr durch das Unendliche gehendes Complement über, und die Winkel C und B wachsen um π . Eine zweite Anhängung längs derselben Seite führt CB zu dem ursprünglichen Abschnitt zurück, während die Winkel C und B im Ganzen um einen vollen Umlauf gewachsen sind. Dasselbe Polygon könnte man direct aus dem einfachen Polygon, von dem wir ausgingen,

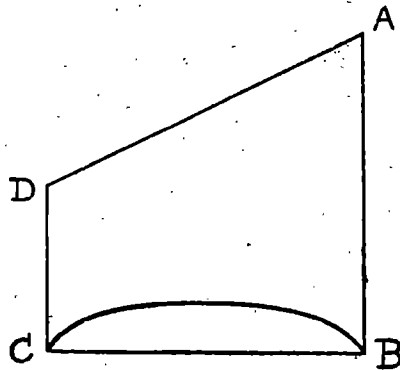


FIG. 8.

erzeugen, indem man in ihm einen Schnitt von C nach B zieht (Fig. 3). Dann müsste man in einer Vollebene einen genau gleichen Schnitt machen, die Schnitte über einander legen und die linke Seite der einen Figur, Polygon oder Vollebene, mit der rechten der anderen verbinden. Diesen Process nennt Klein *die diagonale Anhängung einer Vollebene*. Er kann in gleicher Weise längs eines Schnittes angewandt werden, der von irgend welcher Polygonecke zu einer anderen hinläuft. Die Hinzufügung einer Vollebene vermehrt zwei Winkel, jeden um 2π . Diese Prozesse können eine beliebige Anzahl von Malen wiederholt und combinirt werden. Die Bedingungen für die Prozesse* sind

- (a) für laterale Anhängung, dass sich die Seite nicht überschlägt;
- (b) für polare und diagonale Anhängung, dass der Schnitt durchaus in einer Ebene liegt und weder sich noch irgend einen anderen Schnitt schneidet; ausserdem
- (c) für polare Anhängung, dass der Schnitt nicht über die Verlängerung der Seite, nach welcher er gezogen ist, hinweggeht.

Aber nicht alle Polygone, deren Seite oder Fläche durch das Unendliche zieht, können durch Hinzufügung von Halb- oder Vollebenen erhalten werden.

* Vgl. die schon genannte Abhandlung von Schönflies.

Wenn z. B. ein Polygon aus einer Vollebene ausgeschnitten wird, so ist der Rest ein Polygon, dessen Fläche durch das Unendliche zieht (Fig. 4). Ferner giebt in Fig. 5 so wohl der schraffierte wie der unschraffierte Teil ein Beispiel, wo eine Seite durch das Unendliche geht und doch weder sie selbst noch ein Winkel sich überschlägt.

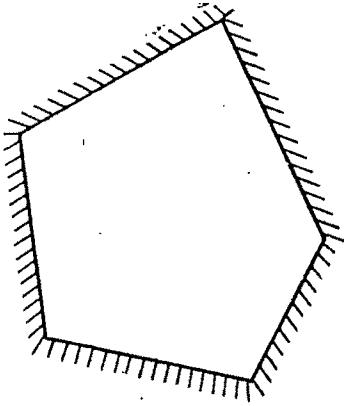


Fig. 4.

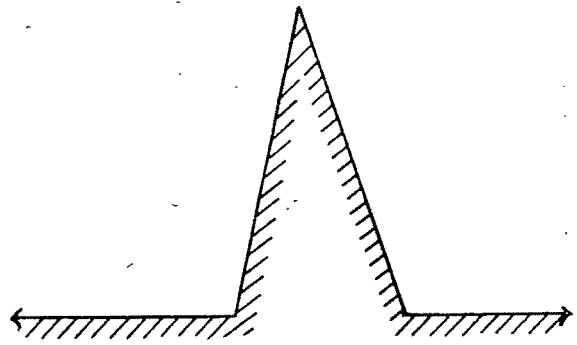


Fig. 5.

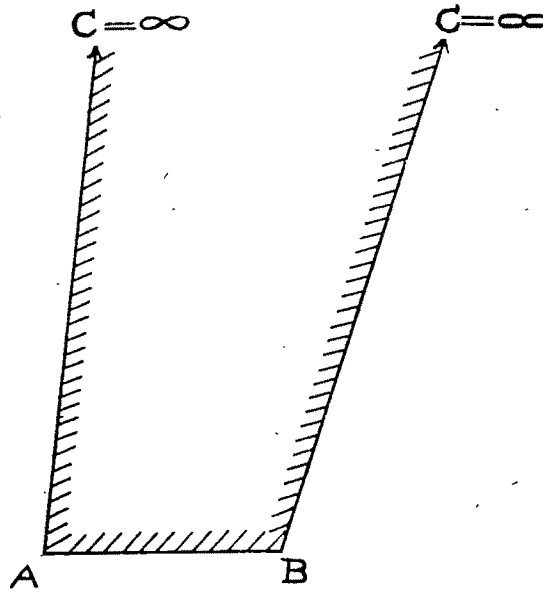


Fig. 6.

Andere Möglichkeiten, die für unsere Polygone sich bieten, sind die, wo eine oder mehrere Ecken im Unendlichen liegen. So mögen, um ein einfachstes Beispiel anzuführen, in einem gewöhnlichen Dreieck ABC zwei Seiten, AC und

BC um A und B als Centren in entgegengesetzter Richtung rotieren. Der Punkt C rückt dann nach dem Unendlichen zu, bis der Winkel dort Null wird und AC mit BC parallel ist. Wenn die Rotation einer der beiden Seiten noch weiter fortgesetzt wird, dann bleibt die Ecke C im Unendlichen (Fig. 6) und der Winkel muss nach unserer Auffassung sich noch weiter vermindern, d. h. negativ werden. Fig. 7 giebt ein anderes Beispiel, wo zwei successive Ecken E_3, E_4 im Unendlichen liegen. Weitere Beispiele über die Besonderheiten von Polygonen, die durch das Unendliche ziehen, brauchen nicht angeführt zu werden, da die eben gemachten Ausführungen für unseren Zweck genügen; bezüglich näherer Ausführungen müssen wir den Leser auf die oben citierte Abhandlung von Schönflies verweisen.

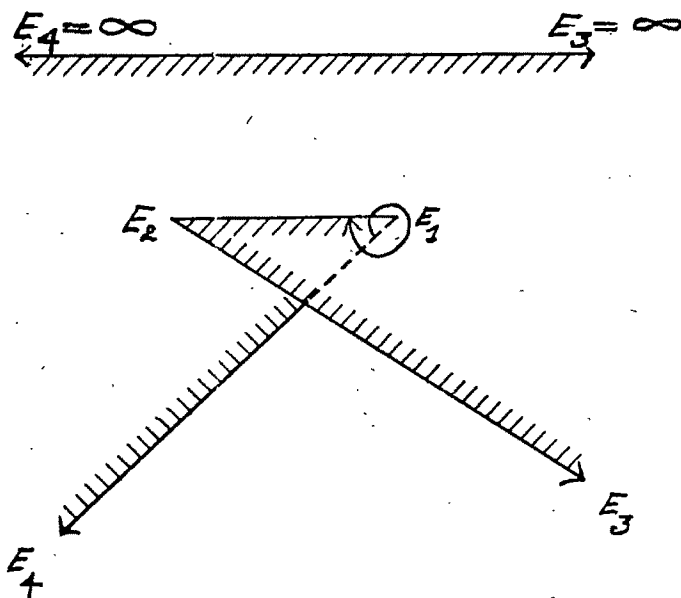


FIG. 7.

Es erübrigt noch, die Form von $\eta(x)$ so zu erweitern, dass sie auch den Fall von Polygonen der eben betrachteten Art einschliesst. So oft der Unendlichkeitspunkt η auf einer Polygonseite liegt, liegt ein entsprechender reeller Wert x auf der Grenze der Halbebene; wenn der Unendlichkeitspunkt auf einem Blatte innerhalb des Polygons liegt, so liegt das entsprechende x im Inneren der Halbebene, ist also imaginär. Irgend ein Spiegelbild des Polygons wird den conjugierten Wert von x als einen anderen Unendlichkeitspunkt für die Funktion $\eta(x)$ liefern. Möge $V(x)=0$ die Gleichung sein, deren Wurzeln

alle diese Punkte α einschliessen. Die durch das Polygon definierte Funktion unterscheidet sich dann von dem obigen Integral nur dadurch, dass im Nenner des Integrals noch V^2 steht und dass *negative* λ vorhanden sind, *die von den Ecken im Unendlichen stammen*. Dass entsprechend dem Wurzel von $V=0$ das Polygon schlicht durch das Unendliche zieht, erkennt man am besten durch stereographische Projection der Ebene auf die Kugel. Diese Wurzeln sind daher für die conforme Abbildung nicht eigentlich singuläre Punkte und können darum keine Veranlassung zu logarithmischen Gliedern in den Reihentwickelungen des Integrals geben. Der Zusammenhang dieses V mit den Unendlichkeitstellen des Polygons ist bereits in den Vorlesungen von Klein hervorgetreten. Insbesondere kann aus der Gestalt des Polygons die Lage der Wurzeln des Polynoms V unmittelbar abgelesen werden. Wenn die Seite $E_i E_{i+1}$ des Polygons n -mal durch das Unendliche geht, so hat das Polynom n reelle Wurzeln zwischen e_i und e_{i+1} ; wenn die Fläche n -mal durch das Unendliche geht, hat das Polynom n Paare imaginärer Wurzeln und umgekehrt.

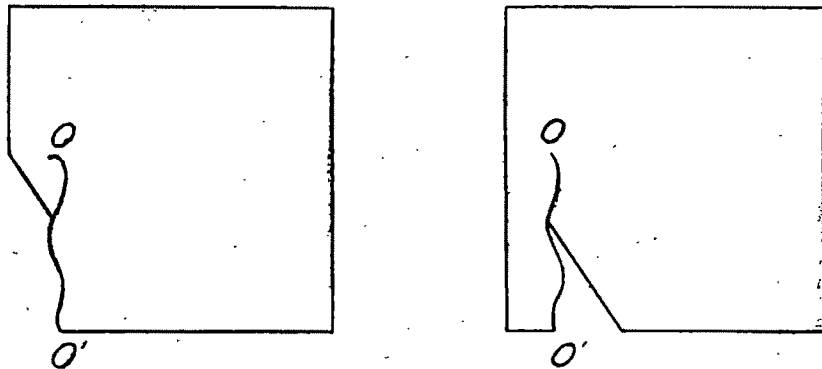


FIG. 8.

Allgemeinere Polygone als diese Klein'schen kann man erhalten, wenn man Windungspunkte im Innern zulässt. In der That ist dies der allgemeinste Typus von einfach zusammenhängenden geradlinigen Polygonen. Ein Beispiel erhält man, wenn man eine Vollebene an eins der früheren Polygone längs eines Schnittes zwischen einer Ecke und einem inneren Punkte oder zwischen zwei inneren Punkten desselben Blattes anhängt. Um einen inneren Anhängungspunkt werden zwei Blätter cyclisch wie bei einer Riemann'schen Fläche zusammenhängen. Ein anderes Beispiel von ganz anderer Natur bekommt man durch Ueberlagerung der beiden Teile von Fig. 8, die man so statt-

finden lässt, dass die gleichen Schnitte OO' zusammenfallen. Die beiden Teile sind dann so zu verbinden, dass je ein rechts von dem einen Schnitt gelegener mit dem links von dem anderen gelegenen zusammenhängt. Das entstehende Polygon hat einen Windungspunkt bei O . Wenn man einen von diesen Windungspunkten umkreisen will, so muss man einen doppelten Umlauf machen, ehe man zum Ausgangspunkte zurückkehrt. In der x -Halbebene wird zu gleicher Zeit wegen der Beziehung der x und η zu einander ein einfacher Umlauf um einen Punkt ρ beschrieben werden. ρ muss infolgedessen ein Verzweigungspunkt sein, dessen Verzweigungsexponent 2 ist. Windungspunkte höherer Ordnung, wo mehr als zwei Blätter zusammenhängen, entsprechen in gleicher Weise positiven ganzzahligen Exponenten. Da man sie durch die Vereinigung von zwei oder mehr *einfachen* Windungspunkten entstehen lassen kann, so ist es erlaubt, die entsprechenden Verzweigungspunkte als eine Verschmelzung mehrerer ρ anzusehen. Es wird deshalb genügend sein, die Punkte ρ allein zu betrachten. Mit jedem ρ der positiven Halbebene x müssen wir aus Symmetriegründen den conjugierten Wert als einen Verzweigungspunkt der Funktion $\eta(x)$ zusammennehmen.

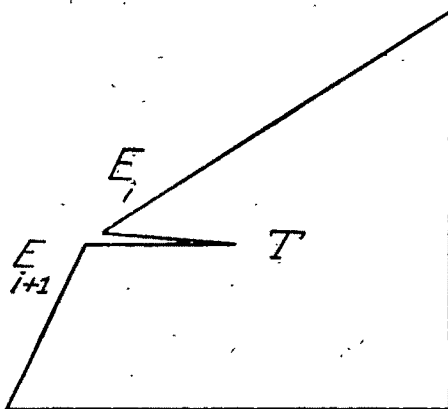


FIG. 9.

Aber diese sind nicht die einzigen Verzweigungspunkte mit Exponenten $+2$. Es können nämlich Ecken am Polygon auftreten, in denen die Richtung einer Seite sich umkehrt wie bei T , Fig. 9. Die entsprechenden Punkte ρ sind reell und besitzen die Exponenten 2. Solche Ecken werden wir *einfache Wendepunkte* nennen. Ecken, deren Winkel positive ganzzahlige Vielfache von π sind, können als Wendepunkte höherer Ordnung aufgefasst werden, in denen eine Seite mehrere Male ihre Richtung umkehrt; man kann sie ebenfalls durch

Vereinigung mehrerer einfacher Wendepunkte entstehen lassen. Diese Wendepunkte sind nur äusserlich von den gerade besprochenen Windungspunkten verschieden. Um die Aehnlichkeit hervortreten zu lassen, spiegele man das Polygon in Fig. 9 an der Seite $E_i T E_{i+1}$. In dem vereinigten Polygon, welches einen einzelnen Zweig der Funktion $\eta(x)$ darstellt, verschwindet diese Seite gänzlich aus der Grenze (Fig. 10). Zu gleicher Zeit wird T von der Grenze abge-

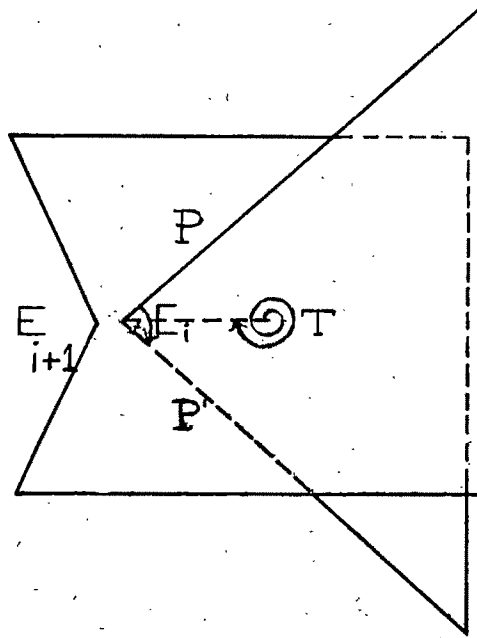


FIG. 10.

trennt und wird ein innerer einfacher Windungspunkt. Entsprechend einem einzelnen Zweige von $\eta(x)$ hat man natürlich die x -Ebene in geeigneter Weise so zu zerschneiden, dass $\eta(x)$ einwertig in ihr ist. In Fig. 10 muss man die Ebene längs der reellen Axe mit Auslassung des Segmentes $e_i p_{i+1}$ zerschneiden. Der Punkt ρ erscheint dann wie die imaginären Punkte im Innern der zerschnittenen Ebene, und es entspricht ihm ein Windungspunkt.

Die ganzzahligen Punkte ρ , von denen wir gesprochen haben, spielen, wie wir in den folgenden Kapiteln nachweisen werden, eine ganz andere Rolle als alle anderen Verzweigungspunkte. Man kann sie vorteilhafter Weise, wie die nicht-singulären Unendlichkeitspunkte in Klein's Polynom, zu Wurzeln eines *reellen* Polynoms $W(x)$, d. h. eines Polynoms mit reellen Coefficienten, zusammenfassen.

Wir haben so durch Beispiele die Besonderheiten des geradlinigen Polygons klar gemacht, die für das Folgende wesentlich sind. Wir werden jetzt die durch die Untersuchungen von Weierstrass und Schwarz bestimmte Form der zugehörigen Funktion geben und sie als Basis der nachfolgenden Untersuchungen in den Vordergrund rücken. Wir haben:

PROP. XIX.—Die Abbildung irgend eines einfach zusammenhängenden geradlinigen Polygons auf eine Halbebene x wird mit Hilfe eines Integrals

$$\eta = \int \frac{W.(x_1 dx_2)}{V^2.(x_1 - e_1 x_2)^{1-\lambda_1} \dots (x_1 - e_{r+1} x_2)^{1-\lambda_{r+1}}}$$

geleistet, wo W und V reelle Formen in x_1, x_2 sind und die Wurzeln von V einfache Unendlichkeitsstellen des Integrals sind. Jeder reellen Wurzel von W entspricht ein Wendepunkt, jedem Paar imaginärer Wurzeln ein Windungspunkt des Polygons.

Umgekehrt ist es auch richtig, dass irgend ein solches Integral, sofern natürlich die e und λ reell angenommen sind, die Halbebene auf ein geradliniges Polygon der von uns betrachteten Art abbildet.

Es mag hier bemerkt werden, dass, obwohl nach unserer Voraussetzung alle Faktoren mit positiven ganzzahligen λ aus dem Nenner fortgenommen und in W aufgenommen waren, dies nicht notwendig ist, und dass irgend ein solcher Faktor im Nenner zurückbehalten werden kann, wenn es gewünscht wird. Wir werden indessen übereinkommen, dass die Faktoren nur dann zurückbehalten werden sollen, wenn die ganzzahligen Punkte, die ihnen entsprechen, eine andere Rolle spielen als die anderen, nämlich zu den e gerechnet werden.

Die Gestalt der Funktion war, wie wir schon lernten, eine Folge ihrer Gruppeneigenschaft. Man darf dementsprechend erwarten, dass die Gruppeneigenschaft in der geometrischen Gestalt des Polygons hervortritt. Hierzu wollen wir zu unserem Doppelpolygon in Fig. 10 zurückkehren. Die η -Punkte P und P' , welche Spiegelbilder von einander sind, entsprechen demselben Punkt P' der Grenze der zerschnittenen x -Ebene, den man sich aber zweimal an entgegengesetzten Seiten dieser Grenze zu denken hat. Die Art der Zerschneidung zeigt ferner, dass die beiden η -Punkte bei einem Umlauf des x um den Verzweigungspunkt e_i aus einander hervorgehen. Geometrisch wird P' in P einfach durch eine Drehung um E_i um den Winkel $2\lambda_i \pi$ übergeführt. Entsprechend dem Umlauf um e_i haben wir deshalb die Substitution

$$(\eta' - E_i) = e^{2i\pi\lambda_i} (\eta - E_i)$$

oder kurz

$$\eta' = e^{2i\pi\lambda_i} \eta + b.$$

Im Falle die Ecke E_i im Unendlichen liegt, findet die Rotation um E'_i statt, den im Endlichen gelegenen Schnittpunkt der beiden Grenzlinien, die in E_i zusammen treffen; wenn diese indessen parallel sind, so reducirt sich die Rotation auf eine einfache Translation $\eta' = \eta + b$. Auf diese Weise erhält man sämtliche erzeugenden Substitutionen der Gruppe und findet, dass dieselben durch die Winkel $\lambda\pi$ und die Ecken des einfachen (nicht doppelten) Polygons, oder falls zwei successive Grenzlinien parallel sind, durch den Abstand $\frac{1}{2}b$ derselben charakterisiert sind.

Es wird sich noch grössere Einfachheit und Eleganz zeigen, wenn wir, wie bei der Abbildung selbst, das einfache Polygon anstatt des doppelten als Substrat für die Gruppe brauchen. In diesem Falle muss die bislang betrachtete Gruppe so erweitert werden, dass sie die Operation der Spiegelung des einfachen Polygons an seinen Seiten enthält. Auf diese Weise werden zwei Punkte des Doppelpolygons, die Spiegelbilder von einander sind, *äquivalent in Bezug auf die erweiterte Gruppe*. Aus diesen Punkten werden alle anderen äquivalenten Punkte, wie man leicht einsieht, durch die Substitutionen der Originalgruppe erhalten. Wählen wir jetzt eine der Seiten des einfachen Polygons als reelle η -Axe. Eine Spiegelung in Bezug auf diese Seite wird dann durch die Formel

$$\eta' = \bar{\eta}$$

dargestellt, wo $\bar{\eta}$ mit η conjugiert ist. Wir haben daher den Satz:

PROP. XX.—*Die Substitutionen der erweiterten Gruppe werden durch Combination der Substitutionen*

$$\begin{aligned}\eta' &= \bar{\eta}, \\ \eta' &= e^{2i\pi\lambda} \eta + b\end{aligned}$$

erhalten.

Wir bemerken ferner, dass es nur einen einzigen festen Punkt in Bezug auf die Gruppe giebt, nämlich den ∞ fernen Punkt. Dies folgt aus den letzten Gleichungen, aber man sieht es auch an den Polygonen. Bei jeder Spiegelung bleiben nur diejenigen Punkte der η -Ebene unverändert, die auf der Spiegelungslinie liegen, und der einzige Punkt, der allen Spiegelungslinien gemeinsam ist, ist der ∞ ferne Punkt.

KAPITEL IV.

DIE VERWANDTEN POLYGONE.

Wir haben im letzten Kapitel die geometrische Interpretation eines Integrals discutirt. Wir haben jetzt die Resultate für die Gesamtheit der verwandten Integrale $\int \frac{W_{r-2} \cdot (x_1 dx_2)}{V_q^2 \cdot \Pi (x_1 - e_i x_2)^{1-\lambda_i}}$ anzuwenden. Jedes von diesen kann durch ein geradliniges Polygon mit $r + 1$ Seiten repräsentiert werden, dessen successive Ecken E'_1, \dots, E'_{r+1} den gemeinsamen Verzweigungspunkten e_1, \dots, e_{r+1} entsprechen. Ausser diesen besitzt jedes Polygon so viele Windungspunkte als Paare imaginärer Wurzeln, so viele Wendepunkte als reelle Wurzeln von $W_{r-2} = 0$ vorhanden sind. Die Summe der Winkel E' in einem Polygon ist durch die Formel

$$\Sigma \lambda' \pi = (2q + 1) \pi$$

gegeben. Sollte einer der $r - 2$ Windungs- und Wendepunkte durch Zusammenfallen mit den E' verschwinden, so muss die Formel entsprechend modificirt werden. Wir kommen auf solche Irregularitäten später zurück.

Die Verwandtschaft unserer Polygone kommt jetzt in einer bemerkenswerten Weise geometrisch zum Ausdruck, wie wir nachweisen wollen. Wir haben nämlich folgenden Satz:

PROP. XXI.—*Die verwandten Polygone sind alle durch dieselben geraden Linien begrenzt.*

Dieser Satz wurde für die Polygone, die der Lamé'schen Differentialgleichung entsprechen, durch Prof. Klein in seinen Vorlesungen von 1890–91 aufgestellt. Es kann aus der Gleichung (2) bewiesen werden, aber seine Richtigkeit ist viel leichter mit Hülfe der erzeugenden Substitutionen der erweiterten Gruppe einzusehen. Diese müssen den Sätzen XIII und XX entsprechend für alle Polygone dieselben sein. Also müssen auch die Linien, an denen gespiegelt wird, für alle dieselben sein. Aber diese sind die Grenzlinien unserer Polygone, und deshalb ist unser Satz bewiesen.

Wir sind jetzt in der Lage, die Rolle der ganzzahligen Punkte zu untersuchen, die bisher scheinbar ohne bestimmten Grund in unseren Untersuchungen aufgetreten sind. Unsere verwandten Integrale waren dadurch definiert, dass sie dieselbe Gruppe und dieselben Verzweigungspunkte e besitzen, deren Um-

kreisung die Gruppe erzeugt. Soll man nun zunächst Polygone construieren, zu denen eine gemeinsame Gruppe gehört, so ist es nur nötig, diejenigen auszuwählen, welche von denselben Geraden begrenzt sind und deren Winkel beziehungsweise einander Modulo π congruent sind. Aber die Lage der Verzweigungspunkte, welche bei der Abbildung in der x -Ebene den Ecken E entsprechen, wird im Allgemeinen für jedes so construierte Polygon verschieden sein. Um verwandte Integrale zu erhalten, müssen wir solche Polygone finden, die ein gemeinsames System der e liefern. Durch eine lineare Substitution

$$x' = \frac{ax + b}{cx + d}$$

ist es stets möglich, drei der e in drei auf der reellen x -Axe beliebig gegebene feste Punkte zu verlegen. Die übrigen $r - 2$ Punkte e , oder, wie man noch besser sagen kann, die $r - 2$ Doppelverhältnisse der e sind die wesentlichen Parameter der Gruppe irgend eines Polygons. Um ihnen bestimmte Werte zu geben, muss man der Gestalt des Polygons $r - 2$ Bedingungen auferlegen können. Die einzigen continuirlich variablen Data, die zu unserer Verfügung stehen, sind aber die Lagen der Windungs- und Wendepunkte. Es folgt daraus, dass ihre Anzahl so beschaffen sein muss, dass sie $r - 2$ Parameter liefert. Jeder Windungspunkt hat zwei Grade der Freiheit innerhalb des Polygons und liefert daher ein Paar conjugierter ρ als variable Parameter des Integrals. Jeder Wendepunkt ist auf einen Grad der Freiheit durch seine Bewegung längs der Grenze beschränkt und liefert deshalb nur einen reellen Parameter ρ . Liefert uns so das Polygon $r - 2$ Grössen ρ , so müssen diese so lange variiert werden, bis die e die vorgeschriebene Lage einnehmen. *So wird durch das Vorhandensein der ρ oder der entsprechenden Wende- und Windungspunkte erreicht, dass die Integrale, resp. Polygone verwandt sind.*

Nichts verbietet natürlich, dass in speciellen Fällen die ρ (oder einige derselben) mit Punkten e zusammenfallen. Fälle der Art haben wir schon in Kapitel I getroffen. Würden mehr als $r - 2$ Parameter vom Polygon geliefert werden, so hätte man mehr als die notwendige Anzahl zur Verfügung, und es kann dann im Allgemeinen eine unendliche anstatt einer endlichen Zahl von unseren Polygonen mit vorgeschriebenen Winkeln E' und gegebenen Grenzlinien construiert werden. Daher kam es, dass es zwecks ein deutiger Bestimmung von η durch die λ' nötig war, die Anzahl der ganzzahligen Punkte auf $r - 2$ zu beschränken.

Einige unserer früher für die verwandten Integrale erhaltenen Resultate können jetzt in's Geometrische übersetzt werden. So haben wir zum Beispiel gelernt, dass irgend eins der Integrale immer gleich die Gesamtheit aller verwandten Integrale bestimmt. Dies sieht man eben so gut geometrisch ein. Irgend ein Polygon bestimmt durch seine Abbildung auf die Halbebene α die Verzweigungspunkte e , von welchen die Gruppe abhängt; durch die Lage und gegenseitige Neigung der successiven Grenzlinien bestimmt es die Substitutionen, welche die Gruppe ausmachen. Weiter aber gibt Prop. VIII das höchst wichtige Resultat, dass unter allen verwandten Polygonen, die $r - 2$ ganzzahlige Punkte oder weniger besitzen, *eins und nur eins mit einem gegebenen System von Winkeln gefunden werden kann*. Bei der Auslegung dieses Satzes muss man indessen Vorsicht gebrauchen. Falls nämlich Windungs- oder Wendepunkte mit Polygonecken zusammenfallen, giebt es, genau genommen, kein Polygon mit den gewünschten Winkeln. Es ist in ein anderes von einfacherer Gestalt mit abgeänderten Winkeln ausgeartet.

Das zuletzt ausgesprochene wichtige Theorem dürfte kaum leicht geometrisch zu beweisen sein. Aus diesem Grunde begannen wir mit der analytischen Discussion und gingen dann zur geometrischen über, anstatt den umgekehrten Weg zu nehmen. Im letzten Falle würde man damit beginnen, verwandte Polygone als solche zu definieren, die, von denselben geraden Linien begrenzt, Modulo π resp. congruente Winkel besitzen und durch ihre Abbildung dieselben Verzweigungspunkte e liefern. Man würde darauf auf die Integralform der entsprechenden Funktion η , die Existenz einer gemeinsamen Gruppe und die algebraische Form der Differenz irgend zweier der Funktionen schliessen. Dann folgt aus dem Beweise von Prop. X, dass für ein gegebenes System der λ' höchstens ein Polygon und Integral existiert unter der Beschränkung, dass nur $r - 2$ ganzzahlige Punkte vorhanden sind. Wenn ferner die Approximanten und Kettenbrüche gesucht werden, so hat man unter der unendlichen Schaar der so construierten Polygone ein geeignetes Polygon mit keinen Unendlichkeitspunkten im Innern oder auf den Seiten als Fundamentalpolygon auszuwählen, mit dem man dann die anderen vergleichen wird. Die Differenzen der bezüglichen η sind die Approximanten. Schliesslich hat man daraus Tabellen und Kettenbrüche zu machen. Bei diesem letzten Schritte bietet sich die einzige ernsthafte Schwierigkeit. Um eine vollständige Tabelle ohne Lücken zu erhalten, hat man sich von der wirklichen Existenz eines vollständigen Systems von Polygonen zu über-

zeugen. Die Mannigfaltigkeit der geometrischen Gestalten ist aber so gross, dass es sehr schwierig ist, die Gestalt desjenigen Polygons, welches gegebenen Werten der λ' bei gegebenen e entspricht, völlig festzulegen. Durch unseren analytischen Ansatz haben wir betreffs der Existenz und eindeutiger Bestimmtheit dieses Polygons eine absolute Sicherheit gewonnen.

Wir richten jetzt unsere Aufmerksamkeit auf die wirkliche Construction der verwandten Polygone. Das Problem ist also folgendes: *Es ist ein einzelnes von ihnen gegeben; alle anderen zu construieren, welche nicht mehr als $r - 2$ ganzzahlige Punkte besitzen.* Zu diesem Zwecke ist ein Kenntniss der Realität und Verteilung der ganzzahligen Punkte und der Wurzeln des jedem Polygon entsprechenden V erforderlich, wie wir umgekehrt, wenn die Polygone gegeben sind, die letzteren Data ableiten können. Um die Untersuchung systematisch zu betreiben, ist in erster Linie eine ordentliche Anordnung unentbehrlich, und diese haben wir in den Tabellen des Kapitels I gegeben, wo nur zwei Exponenten, d. h. Winkel, zu gleicher Zeit abgeändert werden. In den Tabellen hatten wir gewisse Linien oder Erzeugende gezogen, mit deren Hülfe irgend ein Element erreicht werden konnte. Unser Problem vereinfacht sich so auf die Construction einfacher Serien von Polygonen, in denen ein oder zwei Winkel successive gleiche Incremente erhalten. In Teil (A) dieses Kapitels werden wir den hypergeometrischen Fall $r = 2$ erledigen, in Teil (B) die Natur und Schwierigkeit der höheren Fälle berühren. Obwohl wir keine vollständige Lösung unseres Problems geben, können wir trotzdem wichtige Folgerungen aus der Betrachtung der Polygone ziehen, und diese werden wir im letzten Kapitel angeben.

(A). *Der hypergeometrische Fall.*

Hier bietet sich die grosse Vereinfachung, dass keine Windungs- und Wendepunkte vorhanden sind und dass die verwandten Polygone Dreiecke sind, d. h. Polygone, von denen jedes durch seine Winkel allein charakterisiert ist. Wenn die Grenzlinien und Winkel irgend eines dieser Dreiecke vorgeschrieben sind, ist seine Construction völlig bestimmt. Bevor wir indessen zu einer allgemeinen Discussion übergehen, werden wir uns mit dem allgemeinen Charakter unseres Problems bekannt machen, indem wir vorläufig ein Paar wohlbekannte und einfache Kettenbrüche betrachten.

(1). Gauss' Kettenbruch (Typus I),

$$-\frac{1}{2} \log \frac{x+1}{x-1} = \int \frac{dx}{(x+1)(x-1)} = \frac{Z_n}{N_n} + \int \frac{dx}{N_n^2 (x+1)(x-1)}.$$

Wie man bei diesem bemerkenswerten Kettenbruch erwarten konnte, besitzen auch die zugehörigen Dreiecke einen sehr einfachen Charakter. Ihre drei gemeinsamen Ecken entsprechen $e_1 = -1$, $e_2 = +1$, $e_3 = \infty$. Für alle Integrale sind λ'_1 und λ'_2 Null, und deshalb liegen die Ecken E_1 und E_2 im Unendlichen. Im Fundamentalintegral ist $\lambda_3 = 1$, und der Winkel bei E_3 im Fundamentaldreieck ist deshalb π . Die Gestalt dieses Dreiecks ist in Fig. 11

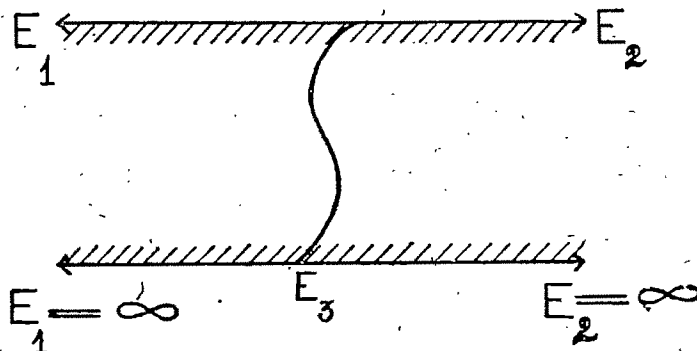


FIG. 11.

gegeben. Zur Rechten und Linken von E_3 liegen Teile zweier logarithmischen Streifen, die resp. $\log(x+1)$ und $\log(x-1)$ entsprechen. Bei jedem successiven Rest, wächst der Exponent λ'_3 für $e_3 = \infty$ um 2, und deshalb wächst in der Reihe der Polygone der Winkel E_3 successive um 2π . Um dies zu erreichen, hat man nach einander Halbebenen längs eines Schnittes von E_3 nach der gegenüberliegenden Seite polar anzuhängen, wobei dann diese Seite sich entsprechend oft überschlägt. Die nach Prop. XIV für die N_n gebildeten Differentialgleichungen zeigen, dass die N_n Kugelfunktionen erster Art sind. Die Lage ihrer Wurzeln kann sogleich aus den Dreiecken abgelesen werden. Jede Anhängung einer Halbebene veranlasst die Seite E_1E_2 ein Mal mehr durch das Unendliche zu gehen. Man schliesst daraus, dass die Wurzeln der successiven Kugelfunktionen reell sind und zwischen $e_1 = -1$ und $e_2 = +1$ liegen.

$$(2). \quad \log \frac{x+1}{x-1} = \int \frac{dy}{y^2(y-1)} = \frac{Z_n}{N_n} y^2 + \int \frac{dy}{N_n^2 y^2(y-1)},$$

wo

$$\begin{aligned}
 y &= x^3, \\
 e_1 &= 0, \quad e_2 = 1, \quad e_3 = \infty, \\
 \lambda'_1 &= \frac{1}{2}, \quad \lambda'_2 = 0, \quad \lambda'_3 = \frac{1}{2} + 2n.
 \end{aligned}$$

Das Fundamentaldreieck hat die in Fig. 12 gezeichnete Gestalt, aus der man die

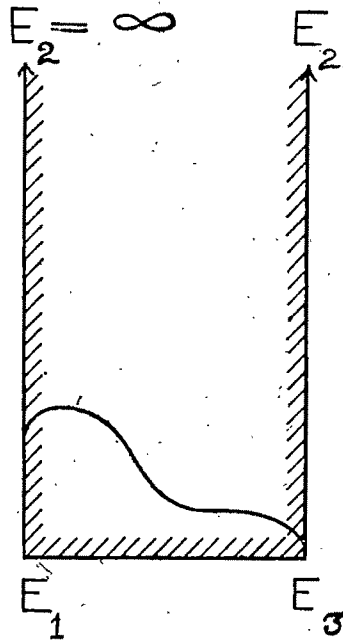


Fig. 12.

der folgenden wieder durch successive polare Anhängung von Halbebenen von E_3 aus erhält. Die Differentialgleichungen für die N_n zeigen, dass letztere die hypergeometrischen Reihen,

$$x^{2n} F\left(-n, -n - \frac{1}{2}, -2n - \frac{1}{2}, \frac{1}{x^3}\right) \text{ sind.}$$

Dies Resultat ist von Heine* mit Hülfe bestimmter Integrale abgeleitet worden. Vermöge unserer Untersuchung erhalten wir auch noch die Form der Reste und erkennen, dass die Wurzeln der N_n zwischen $e_1 = 0$ und $e_2 = 1$ liegen.

* Handbuch, Bd. I, S. 276.

Der eben betrachtete Kettenbruch liefert, beiläufig bemerkt, eine viel schnellere Approximation für $\log \frac{x+1}{x-1}$ als die vorhergehende, indem er nach Potenzen von x^2 statt von x fortschreitet.

Wir wenden uns jetzt zu der allgemeinen Discussion. Wir haben die verschiedenen Typen von erzeugenden Funktionen zu interpretieren. Jeder dieser Typen ist regulär, und es sind, wie wir wissen, reguläre Erzeugende für irgend welche Werte von r durch eine constante Veränderung eines oder zweier λ' beim Uebergang von einem Rest zum nächsten charakterisiert. Das geometrische Aequivalent ist *eine reguläre Zunahme der entsprechenden Winkel an den Punkten, wo approximiert wird*. So muss in Typus I immer ein einzelner Winkel von Polygon zu Polygon um 2π wachsen; in Typus II müssen zwei Winkel je um π wachsen; in Typus III muss einer um π zunehmen, ein anderer um π abnehmen; in Typus IV endlich muss ein Winkel um π wachsen, während ein anderer abwechselnd um den gleichen Betrag ab- und zunimmt, indem er zwischen zwei Werten hin- und herschwankt. Die allgemeine Regel ist: wenn ein Winkel eines Dreiecks den entsprechenden im Fundamentaldreieck um $m\pi$ übertrifft, wo m positiv ist, so zeigt das an, dass die zugehörige Approximante von der Ordnung m approximiert.

Für jeden Typus muss unsere erste Operation in der Construction des zum Integral $\int \frac{(x_1 dx_2)}{(x_1 - e_1 x_2)^{1-\lambda_1} \dots (x_1 - e_s x_2)^{1-\lambda_s}}$ gehörigen Fundamentaldreieckes bestehen, für welches $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ ist. Wir werden vorläufig $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ voraussetzen. Es werden dann drei Arten von Fundamentaldreiecken zu unterscheiden sein:

- (1) keins der λ negativ,
- (2) λ_3 allein negativ,
- (3) λ_3 und λ_2 negativ.

Im ersten Falle ist das Dreieck von der gewöhnlichen Gestalt, und *laterale oder polare Anhängung kann an jeder Seite, die man auswählen mag, stattfinden*.

Aus diesem Dreieck kann man das für den zweiten Fall gültige dadurch erhalten, dass man $E_1 E_3$ und $E_2 E_3$ in bestimmtem Sinne um E_1 und E_2 dreht, bis λ_1 und λ_2 die gewünschte Grösse erreicht haben. Die Ecke E_3 rückt nach dem Unendlichen, sobald der Winkel λ_3 bei der obigen Operation negativ wird. So

bringt z. B. die erste Drehung von E_2E_3 um π die Ecke nach dem Unendlichem, wo sie dann bleibt (Fig. 13). Jede folgende halbe Umdrehung fügt eine Halbebene hinzu, was man so ansehen kann, als ob längs einer Seite E_2E_3 , deren einer Endpunkt im Unendlichem liegt, eine Halbebene lateral angehängt wäre, aber es ist der Unterschied zwischen diesem Process und dem, den wir früher als laterale Anhängung bezeichneten, dass jetzt durch die Anhängung der Winkel E_3 beim unendlich weiten Punkt nicht um π vermehrt sondern vermindert ist. Der Winkel bei E_2 dagegen erhält in beiden Fällen den Zuwachs π . Wir werden diesen Process als *umkehrende Anhängung* bezeichnen, da er die Richtung der

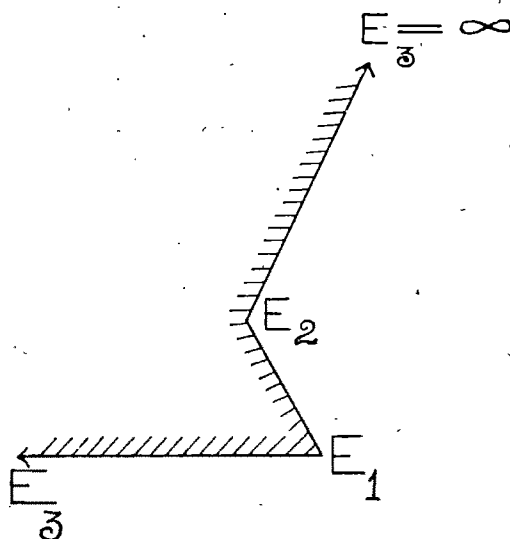


FIG. 13.

Seite von dem endlichem Endpunkt aus immer umkehrt. Wir werden auch die Fiktion machen, als ob durch diesen Process beim ersten Schritt eine ganze Halbebene anstatt des in Wirklichkeit angehängten Teiles angehängt wäre und dementsprechend von einer umkehrenden Anhängung einer Halbebene reden. Bei diesen Umkehrungen bleibt die Seite E_1E_2 ganz unberührt und deshalb ist bei der zweiten Art von Fundamentaldreiecken die laterale Anhängung von Halbebenen längs der endlichen Seite (hier E_1E_2) immer möglich.

Um die dritte Art von Dreiecken aus der ersten zu erhalten, haben wir die Linien E_1E_2 und E_1E_3 um E_1 zu drehen, damit die Winkel bei E_2 und E_3 die

richtige Abnahme und der Winkel bei E_1 den richtigen Zuwachs erhalte. Fig. 14 zeigt z. B. im Falle einer einzigen Umdrehung jeder Seite um π , wie sowohl E_2 als E_3 in's Unendliche rücken. Hiernach wenden wir umkehrende Anhängung von Halbebenen an und lassen dabei die Grenzlinie E_2E_3 ganz unberührt. Wir ersehen daraus, dass bei der dritten Art von Fundamentaldreiecken polare Anhängung von Halbebenen längs eines Schnittes von der endlichen Ecke aus, hier E_1 , nach der gegenüberliegenden Seite gestattet ist.

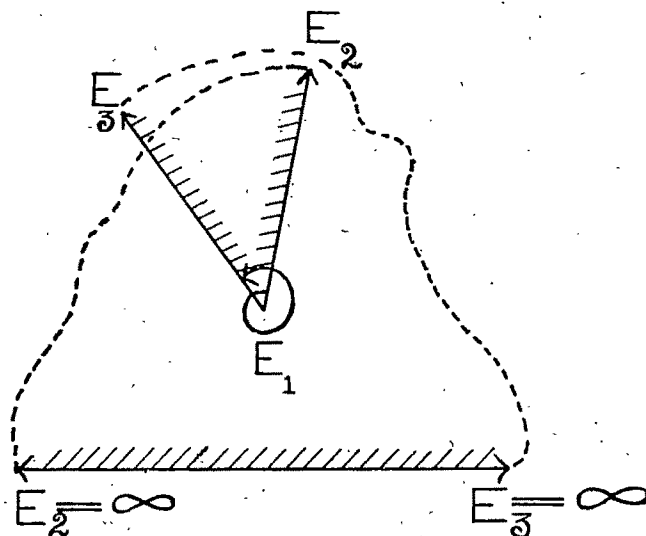


FIG. 14.

Wollen wir jetzt unsere Aufmerksamkeit auf eine Erzeugende vom Typus I richten:

$$\begin{aligned} & \int \frac{(x_1 dx_2)}{(x_1 - e_1 x_2)^{1-\lambda_1} (x_1 - e_2 x_2)^{1-\lambda_2} (x_1 - e_3 x_2)^{1-\lambda_3}} \\ &= \frac{Z_n}{N_n} (x_1 - e_1 x_2)^{\lambda_1} \dots (x_1 - e_3 x_2)^{\lambda_3} \\ &+ \int \frac{(x_1 dx_2)}{N_n^2 (x_1 - e_1 x_2)^{1-\lambda_1-2n} (x_1 - e_2 x_2)^{1-\lambda_2} (x_1 - e_3 x_2)^{1-\lambda_3}}. \end{aligned}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sind hier hinsichtlich ihrer Grösse nicht beschränkt. Die successiven Dreiecke der Reihe können aus dem Fundamentaldreieck durch successive

Vergrößerung des Winkels E_1 um 2π erhalten werden. Es sind vier Fälle je nach der Gestalt des Fundamentaldreiecks zu unterscheiden:

- (1) λ_1 positiv, $\lambda_2 < 1$, $\lambda_3 < 1$,
- (2) λ_1 positiv, $\lambda_2 > 1$, λ_3 negativ,
- (3) λ_1 und λ_2 negativ, λ_3 positiv,
- (4) λ_1 negativ, λ_2 und λ_3 positiv.

Wir werden setzen

$$\lambda_1 = l + (\lambda_1),$$

$$\lambda_2 = m + (\lambda_2),$$

$$\lambda_3 = n + (\lambda_3),$$

wo l, m, n Null oder positive oder negative ganze Zahlen sind und $(\lambda_1), (\lambda_2), (\lambda_3)$ alle positiv und kleiner als 1 sind.

Fall (1). Das Fundamentaldreieck ist von der ersten oder dritten Art mit der Ecke E_1 im Endlichem. Der Winkel E_1 erhält seinen successiven Zuwachs von 2π durch polare Anhängung von Halbebenen nach der entgegengesetzten Seite hin. Entsprechend sind die Wurzeln von $N_n = 0$ alle reell und liegen zwischen e_2 und e_3 . *Daher sind nach Prop. XXIV ff. die Wurzeln von $Z_n = 0$ auch alle reell und liegen abwechselnd mit denen von $N_n = 0$ in demselben Segmente.* Die oben unter (1) und (2) angegebenen Erzeugenden sind, wie erwähnt werden mag, in diesem Fall eingeschlossen.

Fall (2). Hier ist das Fundamentaldreieck von der zweiten Art, E_1E_2 liegt im Endlichen, und es ist laterale Anhängung längs dieser Seite möglich. Um den Winkel E_1 um 2π zu vergrößern, hängen wir zunächst lateral eine Halbebene an. Dadurch wächst sowohl E_1 wie E_2 um π . Um den letzten Zuwachs wieder aufzuheben, drehen wir die Seite E_2E_3 in eine solche Richtung, dass E_2 um π ab- und E_3 um denselben Betrag zunimmt. Mit anderen Worten wir nehmen eine Halbebene, die wir bei der Construction des Fundamentaldreiecks durch umkehrende Anhängung hinzufügten, wieder fort. Zuletzt drehen wir, um den Zuwachs von E_3 zu vernichten, E_1E_3 um E_1 , indem wir E_1 einen zweiten Zuwachs π erteilen und E_3 auf seinen ursprünglichen Wert zurückführen. So haben wir längs E_1E_3 durch umkehrende Anhängung eine Halbebene hinzugefügt. E_1 hat jetzt einen Gesamtzuwachs von 2π erhalten, und unser erstes Dreieck in der Reihe nach dem Fundamentaldreieck ist hergestellt. Entsprechend der lateral angehängten Halbebene ist E_1E_2 in sein durch das Unendliche

gehendes Complement verwandelt, oder, mit anderen Worten, die Wurzel von $N_1 = 0$ liegt zwischen e_1 und e_2 . Dieser Process kann ein zweites Mal wiederholt werden, $E_1 E_2$ wird dadurch in seine Anfangslage zurückgeführt, und entsprechend der durch Vereinigung der beiden lateral angehängten Halbebenen gebildeten Vollebene werden die Wurzeln von $N_2 = 0$ beide imaginär sein. Diesen Process werden wir jetzt m -mal wiederholen. Die successiven Polynome N haben dann abwechselnd eine einzige oder keine reelle Wurzel zwischen e_1 und e_2 , während alle anderen Wurzeln imaginär sind. Nach der m^{ten} Wiederholung kommt die Seite $E_2 E_3$ in dasselbe Blatt mit E_1 und wird ferner für polare Anhängung von E_1 aus zugänglich. Von dieser Stelle an wird die Vergrößerung des Winkels E_1 , wie im Falle (1), durch polare Anhängung bewirkt. Wir haben deshalb die Regel: *Im Falle (2) sind die Wurzeln aller N bis zu N_m incl. paarweise imaginär, abgesehen von einer reellen Wurzel bei jedem ungeraden N , die zwischen e_1 und e_2 liegt. Die Wurzeln aller folgenden N liegen reell zwischen e_2 und e_3 , mit Ausnahme von m Wurzeln, die in derselben Weise wie diejenigen von N_m verteilt sind.*

Fall (3). Hier ist das Fundamentaldreieck von der dritten Art. Ist E_3 die im Endlichen gelegene Ecke, so ist polare Anhängung von Halbebenen an der gegenüberliegenden Seite möglich. Um das nächste Dreieck zu construieren, heften wir eine Halbebene polar an, wodurch der Winkel bei E_3 um 2π wächst. Dieser Zuwachs wird dann rückgängig gemacht, dass wir $E_3 E_1$ eine volle Umdrehung um E_3 machen lassen. Wir nehmen auf diese Weise eine Vollebene fort und geben gleichzeitig E_1 den gewünschten Zuwachs von 2π . Um dann zu den nächsten Polygonen zu kommen, wiederholen wir die Operation $\frac{l}{2}$ oder $\frac{l-1}{2}$ mal, je nachdem $\frac{l}{2}$ oder $\frac{l-1}{2}$ eine ganze Zahl ist. Wenn l gerade ist, so ist die Ecke E_1 in's Endliche gerückt. Ist l ungerade, so muss man noch einen Schritt in der Reihe weiter gehen, um dieses Ziel zu erreichen. Wir drehen dann nämlich $E_3 E_1$ um den Winkel π , indem wir E_1 einen Zuwachs, E_3 eine Abnahme π erteilen und die Ecke E_1 aus dem Unendlichen in's Endliche rücken lassen. Um die Abnahme von E_3 rückgängig zu machen, fügen wir jetzt lateral eine Halbebene längs $E_3 E_1$ hinzu und vermehren so E_1 wieder um π . Wir sind jetzt, mag l gerade oder ungerade sein, zu einem Dreieck gekommen, dessen Blätter von E_3 aus polar an einander gehängt sind. Die Seite $E_3 E_1$, deren Ecken im Endlichen liegen, ist jetzt für laterale Anhängung zugänglich geworden. Um also zum nächsten Dreieck überzugehen, fügen wir zwei Halbebenen lateral hinzu,—

d. h. eine Vollebene diagonal zwischen E_1 und E_3 ,—wodurch wir die beiden Winkel bei E_1 und E_3 um 2π vergrössern. Der letztere Winkel erhält dann seinen früheren Wert wieder, indem man eine der polar an ihn angehängten Halbebenen entfernt. Diesen kombinierten Process wiederholen wir bei jedem folgenden Polygon, bis die letzte, an E_3 polar angehängte Halbebene entfernt ist. Wir ändern dann ein zweites Mal unsere Operationen. Wir fügen nur eine einzelne Halbebene lateral längs E_1E_3 an, indem wir E_1 und E_3 um π vergrössern. Um E_1 einen ferneren Zuwachs π zu erteilen und E_3 um den gleichen Betrag zu vermindern, hängen wir durch umkehrende Anhängung längs E_1E_3 eine Halbebene an und entfernen eine andere durch Rotation von E_3E_2 in gleicher Richtung. So bekommen wir das nächste Dreiecke in der Reihe, und wir wiederholen die kombinierten Operationen m -mal, bis E_1 und die Seite E_3E_2 in demselben Blatt liegen und E_3E_2 für polare Anhängung zugänglich geworden ist. Von hier ab haben wir endlich zum nächsten Dreieck und dann zu allen folgenden *ad inf.* überzugehen, indem wir längs eines Schnittes von E_1 nach der gegenüberliegenden Seite, genau wie im Falle (1), Halbebenen polar anhängen. Wir übergehen hier die evidenten Entwicklungen für die Wurzeln der Polynome und ebenso den Fall (4).

Unser Interesse bei diesen Beispielen liegt hauptsächlich in der Thatsache, dass man nach einer endlichen Anzahl von Schritten stets zu einem Dreieck gelangt, von dem aus jedes folgende durch wiederholte polare Anhängung einer Halbebene von E_1 aus nach der gegenüberliegenden Seite erhalten wird. Dies ist der letzte und wesentliche Charakter des ersten Typus von Erzeugenden mit drei Verzweigungspunkten, wie wir nun allgemein beweisen werden.

Es genügt zu zeigen, dass für ein Dreieck in der Reihe der beschriebene Process möglich ist, um von da an immer wieder Platz zu greifen, und zu diesem Zwecke kann man den Winkel E_1 , der die successiven Zuwachse von 2π erhält, beliebig gross wählen. Man hat zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem $(\lambda_1) + (\lambda_2) + (\lambda_3)$ gleich 1 oder 2 ist. Entsprechend dem einem oder anderen Falle muss es ein Dreieck in der Reihe geben, für das man setzen kann:

$$\begin{array}{ll} (1) & \lambda'_1 = m + n + (\lambda_1) + 2A, & (2) & \lambda'_1 = m + n + 2A + (\lambda_1) + 1, \\ & \lambda'_2 = \pm m + (\lambda_2), & & \lambda'_2 = \pm m + (\lambda_2), \\ & \lambda'_3 = \pm n + (\lambda_3), & & \lambda'_3 = \pm n + (\lambda_3), \end{array}$$

wo A , m , n jetzt als positive ganze Zahlen angenommen sind. Man construiere im ersten Falle ein gewöhnliches Dreieck mit den Winkeln $(\lambda_1)\pi$, $(\lambda_2)\pi$, $(\lambda_3)\pi$,

im zweiten Falle ein solches mit den Winkeln $\{1 + (\lambda_1)\} \pi$, $(\lambda_2) \pi$, $(\lambda_3) \pi$, dessen Ecken alle im Endlichen liegen (vgl. Fig. 5, der unschraffierte Teil). Je nachdem m dann ein positives oder negatives Vorzeichen hat, fügen wir entweder durch laterale oder umkehrende Anhängung längs $E_1 E_2$ m Halbebenen hinzu. Das Gleiche gilt für n . Dieser Process lässt die Seite $E_2 E_3$ für polare Anhängung von A Halbebenen von E_1 aus frei, und auf diese Weise vervollständigen wir die Figur.

Typus II von Kettenbrüchen, bei dem zwei Winkel E_1 und E_2 gleichzeitig bei jedem Schritt um π zu vergrössern sind, ist in ähnlicher Weise durch laterale Anhängung von Halbebenen längs $E_1 E_2$ charakterisiert. λ'_1 und λ'_2 können bei genügendem Fortschreiten in der Reihe beliebig gross gemacht werden, und um unseren Satz zu beweisen, haben wir nur zu zeigen, dass laterale Anhängung möglich wird, wenn wir weit genug in der Reihe vorwärts gehen (um von da an fortgesetzt möglich zu sein). Wir werden die Fälle, wo $(\lambda_1) + (\lambda_2) + (\lambda_3)$ gleich 1, resp. 2 ist, wieder getrennt behandeln.

$$\text{I.} \quad (\lambda_1) + (\lambda_2) + (\lambda_3) = 1.$$

Wir werden in diesem Falle $\lambda'_3 - (\lambda_3)$ als die Summe zweier positiver oder negativer ganzer Zahlen l' und m' darstellen, deren Differenz der Differenz von $\lambda'_1 - (\lambda_1)$ und $\lambda'_2 - (\lambda_2)$ gleich ist. Wir können dann immer bei genügendem Vorwärtsgen in der Reihe ein Dreieck finden, für das eine der zwei folgenden Möglichkeiten eintritt.

(a). l' und m' von gleichen Zeichen. Man setze $l' = \pm l$, $m' = \pm m$, wo l und m positiv sind und hat dann:

$$\begin{aligned} \lambda'_1 &= l' + A + (\lambda_1), \\ \lambda'_2 &= m' + A + (\lambda_2), \\ \lambda'_3 &= \pm (m + l) + (\lambda_3). \end{aligned}$$

Construiert man jetzt ein gewöhnliches Dreieck mit den Winkeln $(\lambda_1) \pi$, $(\lambda_2) \pi$, $(\lambda_3) \pi$, so haben wir danach entweder l und m Halbebenen lateral, wenn l' und m' positiv sind, oder durch umkehrende Anhängung, wenn l' und m' negativ sind, längs $E_1 E_2$ und $E_2 E_3$ anzuhängen. Dies lässt die Seite $E_1 E_2$ für laterale Anhängung von A Halbebenen frei; wie zu beweisen war.

(b). l' und m' von verschiedenen Zeichen,

$$l' > 0, \quad m' = -m < 0, \quad \lambda_1 > \lambda_2.$$

Je nachdem $l' - m$ positiv oder negativ ist, setze man

$$\begin{aligned}\lambda'_1 &= (l' - m) + (A - m) + 2m + (\lambda_1) \text{ oder } (m - l') + (A - l') + 2l' + (\lambda_1), \\ \lambda'_2 &= \quad \quad \quad (A - m) \quad \quad \quad + (\lambda_2) \text{ oder } \quad \quad \quad + (A - l') \quad \quad \quad + (\lambda_2), \\ \lambda'_3 &= l' - m \quad \quad \quad + (\lambda_3),\end{aligned}$$

wo die Klammergrößen positiv sind. Dann hänge man $l' - m$ Halbebenen lateral, resp. $m - l'$ durch umkehrende Anhängung längs $E_1 E_3$ im Dreieck $(\lambda_1)\pi$, $(\lambda_2)\pi$, $(\lambda_3)\pi$ an und zugleich $2m$, resp. $2l'$ Halbebenen von E_1 aus polar an die gegenüberliegende Seite. $E_1 E_2$ bleibt dabei für laterale Anhängung von $A - m$, resp. $A - l'$ Halbebenen frei, wie behauptet war.

$$\text{II.} \quad (\lambda_1) + (\lambda_2) + (\lambda_3) = 2.$$

Wir werden $\lambda'_3 - (\lambda_3) - 1$ in l' und m' spalten, wie wir es vorher mit $\lambda_3 - (\lambda_3)$ thaten. Es bieten sich dann die drei Fälle:

$$\begin{aligned}\text{(a).} \quad & l' > 0, \quad m' > 0, \\ & \lambda'_1 = l' + A + (\lambda_1), \\ & \lambda'_2 = m' + A + (\lambda_2), \\ & \lambda'_3 = m' + l' + (\lambda_3) + 1.\end{aligned}$$

Man konstruiere ein reduziertes Dreieck $(\lambda_1)\pi$, $(\lambda_2)\pi$, $((\lambda_3) + 1)\pi$ und verfare wie in I (a) oben.

$$\begin{aligned}\text{(b).} \quad & l' = -l < 0, \quad m' = -m < 0, \\ & \lambda'_1 = m + A + 1 + (\lambda_1), \\ & \lambda'_2 = l + A + 1 + (\lambda_2), \\ & \lambda'_3 = -l - m + 2 - (1 - (\lambda_3)).\end{aligned}$$

Man konstruiere das reduzierte Dreieck $(\lambda_1)\pi$, $(\lambda_2)\pi$, $-(1 - (\lambda_3))\pi$ und sehe wieder I (a) oben.

$$\begin{aligned}\text{(c).} \quad & l' > 0, \quad m' = -m < 0, \\ \lambda'_1 &= (l' - m + 2) + (A - m) + 2m - 2 + (\lambda_1) \text{ oder } (m - l' - 2) + (A - l') + 2l' + 2 + (\lambda_1), \\ \lambda'_2 &= (A - m) + (\lambda_2) \quad \quad \quad \text{oder } (A - l') + (\lambda_2), \\ \lambda'_3 &= l' - m + 2 - (1 - (\lambda_3)).\end{aligned}$$

Man konstruiere das reduzierte Dreieck wie in II (b) und gehe dann weiter wie in I (b).

In Typus III wird ein Winkel E_1 um π vergrößert, ein anderer E_2 um den gleichen Betrag vermindert. Schliesslich wird der Winkel bei E_1 positiv, während der bei E_2 negativ wird; die Ecke E_1 liegt darnach immer im Endlichen, E_2 dagegen im Unendlichen, und die erforderlichen Veränderungen werden durch umkehrende Anhängung von $E_1 E_2$ um E_1 erzielt. Mit anderen Worten, *der Typus III ist durch umkehrende Anhängung von Halbebenen charakterisiert.*

So erkennen wir, wie im Falle $r = 2$ dreien von den vier Kettenbruchtypen schliesslich drei Arten von Anhängungen entsprechen. Man kann vermuten, dass etwas Ähnliches allgemein gilt, mag die Zahl der Verzweigungspunkte auf drei beschränkt sein oder nicht.

(B). *Die höheren Fälle und ihre Irregularitäten.*

Das geometrische Studium der Polygone gestaltet sich in jeder Weise complicierter, sobald r grösser als 2 ist. Es treten dann Windungs- und Wendepunkte in den Polygonen auf, und der Kettenbruch braucht nicht mehr regulär zu sein. Man kann in den meisten Fällen, vielleicht in allen, eine grosse Zahl von Polygonen finden, die von den vorgeschriebenen Linien begrenzt werden, gegebene Winkel E und eine bestimmte Anzahl von Windungs- und Wendepunkten besitzen. Unsere bisherigen Principien setzen uns aber nicht in dem Stand zu entscheiden, welches von diesen wir als verwandt mit dem Fundamentalpolygon auswählen sollen, d. h. die nämlichen e liefert wie dieses. Die Schwierigkeiten werden noch mehr hervortreten, wenn wir einen der einfachsten Fälle betrachten, nämlich

Die Erzeugende für den Lamé'schen Fall:

$$\begin{aligned} \int \frac{A \cdot (x - \rho_0) dx}{\sqrt{(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)}} \\ = \frac{Z_n}{N_n} \sqrt{(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)} + \int \frac{A_n \cdot (x - \rho_n) dx}{N_n^2 \sqrt{(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)}}, \\ -\infty < e_1 < e_2 < e_3 < e_4 = \infty, \\ \lambda'_1 = \lambda'_2 = \lambda'_3 = \frac{1}{2}, \quad \lambda'_4 = -\frac{1}{2} + 2n. \end{aligned}$$

In den Integralen tritt nur ein einziger ganzzahliger Punkt auf, und deshalb besitzen die Polygone einen einzigen Wende- und keinen Windungspunkt. Wir werden das ρ_0 in dem Fundamentalintegral zwischen e_1 und $-\infty$ annehmen. Dann liegt der Wendepunkt T_0 zwischen E_1 und E_4 im Fundamentalpolygon, das

die in Fig. 15 skizzierte Gestalt hat. Nun haben die anderen Polygone einen positiven Winkel $\lambda_4\pi$ an der vierten Ecke, welche deshalb bei E'_4 anstatt beim

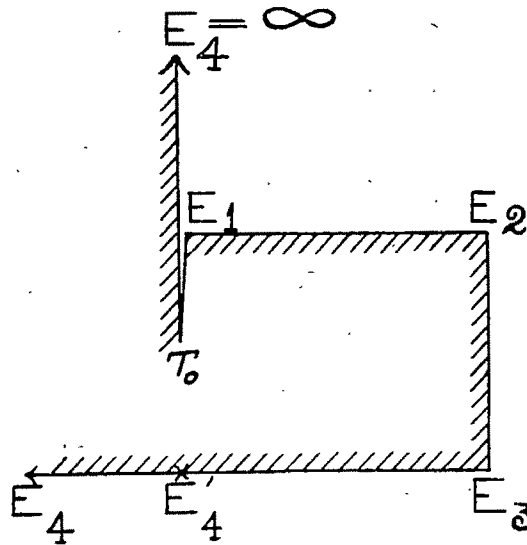


FIG. 15.

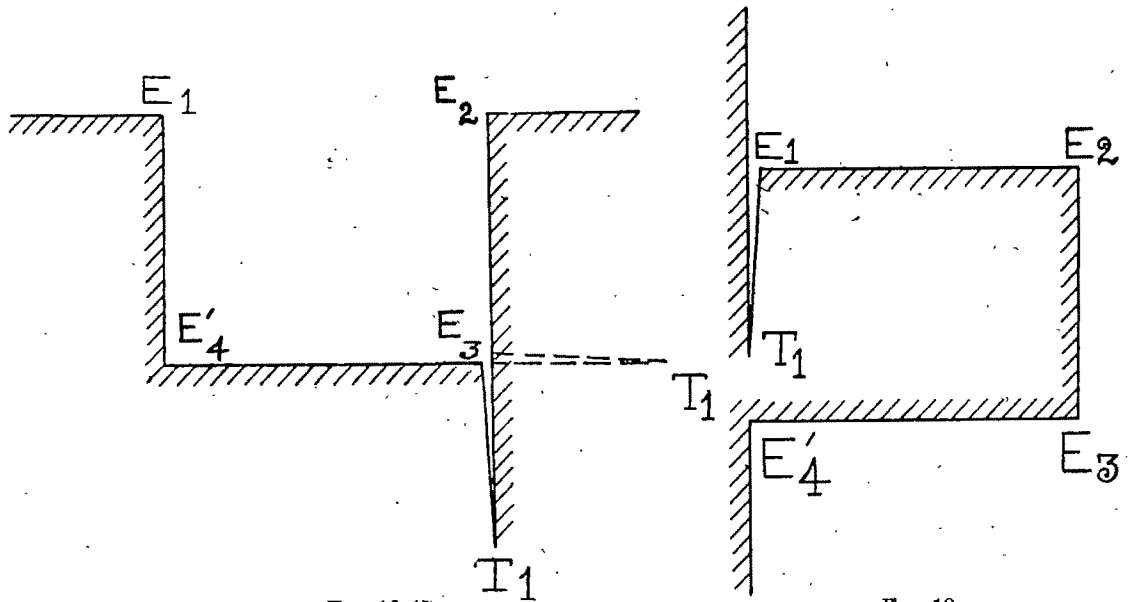


FIG. 16-17.

FIG. 18.

Unendlichem liegen muss. Der Lamé'sche Kettenbruch wird also, wie man sagen kann, durch eine Art von Rechtecken charakterisiert. Der Winkel E'_4

wächst von Rechteck zu Rechteck um 2π , da die vorgelegte Erzeugende vom Typus I ist. Aber man muss, um die Rechtecke zu zeichnen, noch die Lage der ρ_n und der Wurzeln von $N_n = 0$ zu den e kennen. Bei Abwesenheit

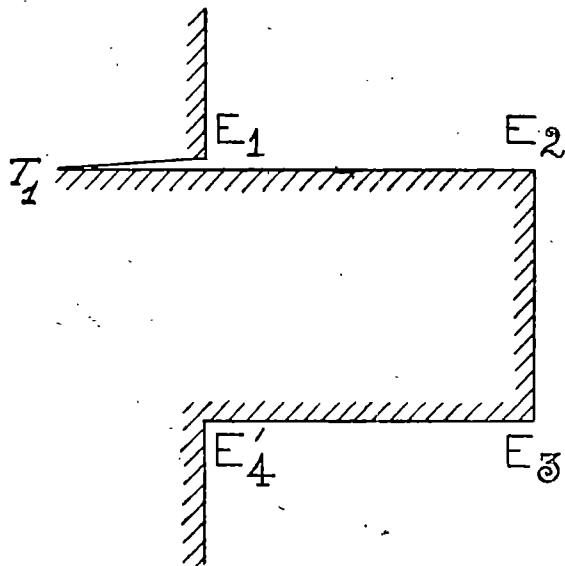


FIG. 19.

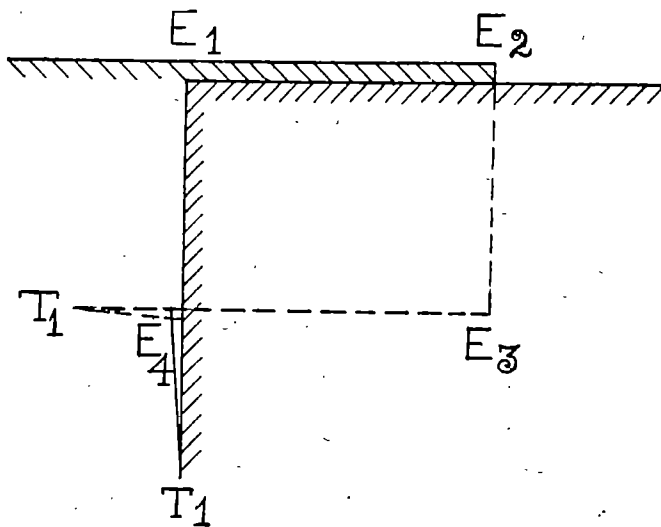


FIG. 20-21.

dieser Data ist die Bestimmung nicht mehr eindeutig, wie vorher bei den Dreiecken. So hat man z. B. bei dem ersten Rechteck nach dem fundamentalen noch die Wahl zwischen den sechs Gestalten in Fig. 16-21 oder den sechs ähnlichen,

die aus den vorigen entstehen, wenn man die Rollen von E_1 und E_3 vertauscht. Wenn wir zum nächsten Polygon in der Reihe übergehen, so muss der Winkel bei E'_4 um 2π wachsen. Dies kann durch polare Anhängung einer Halbebene von E'_4 aus nach einer der gegenüberliegenden Seiten hin in irgend einer der 12 Figuren erzielt werden. Dieser Process ist indessen nicht absolut notwendig. Fig. 22-23 geben zwei Polygone, welche nicht auf diese Weise erhalten werden können.

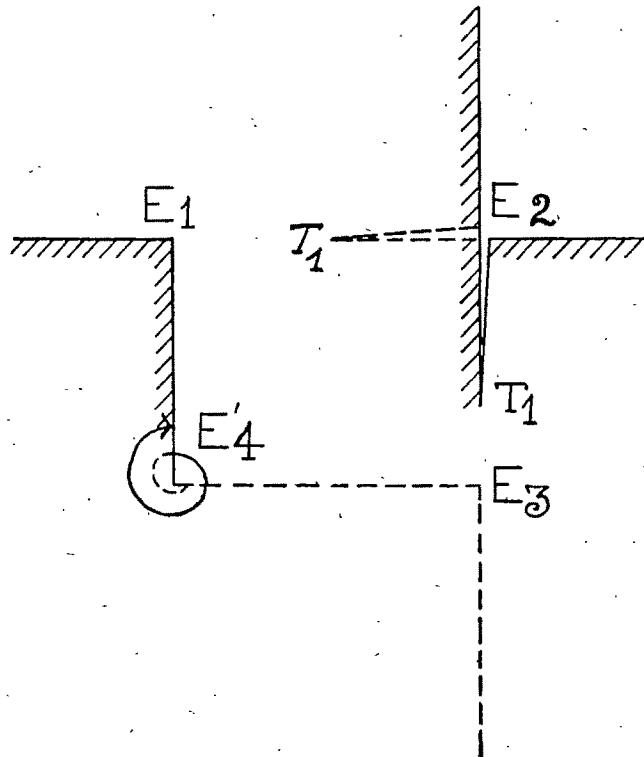


FIG. 22-23.

Beim Uebergang zum dritten Polygone in der Reihe und allen folgenden ist der Process der polaren Anhängung an den vorigen Figuren eine geometrische Notwendigkeit. Der Leser kann sich davon, wie der Verfasser es gethan hat, leicht überzeugen. Da aber immer noch die Zweideutigkeit bleibt, nach welcher der beiden gegenüberliegenden Seiten der Schnitt zu ziehen ist, so wächst die Anzahl der geometrisch möglichen Polygone mit wachsenden n . In dieser Beziehung sind indessen zwei Punkte zu betonen: Zunächst ist der Umstand, dass der polare Anhängungsprocess, wenn auch nicht zu Anfang, so

doch schliesslich immer angewandt werden muss, nicht zufällig. Man hat ihn vielmehr als die wesentliche Charakteristik der Erzeugende von Typus I anzusehen. Zweitens ist zu bemerken, dass die Geometrie, obwohl sie uns keinen endgültigen Aufschluss über die Verteilung der Wurzeln geben kann, doch keineswegs als nutzlos für unseren Zweck bei Seite geschoben werden darf. Ganz im Gegenteil! Wenn man nur auf die Figuren blickt, so sieht man, dass höchstens eine der beiden Seiten E_4E_3 , E_4E_1 durch das Unendliche sich erstrecken kann und die Oberfläche überhaupt nicht. Man kann deshalb sogleich schliessen, dass höchstens eine Wurzel irgend eines der N_n ausserhalb der äussersten endlichen Verzweigungspunkte e_1 und e_3 liegt, während keine imaginär werden kann. Dies stimmt mit dem im Kap. II citierten Satze von Markoff überein. Der gleiche Schluss kann aus dem Polygon für irgendwelche Werte von $\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3$, die algebraisch kleiner als 1 sind, gezogen werden, und so kann der einzige über die Wurzeln der N_n für $r > 3$ bekannte allgemeine Satz direct aus der Gestalt des Polygons abgelesen werden. Vgl. Prop. XXVII des nächsten Kapitels.

Derselbe Kettenbruch ist auch interessant, weil er uns bei geeigneter Annahme des ρ_0 im Fundamentalintegral ein erstes Beispiel einer Irregularität in seiner Entwicklung bietet. Die Irregularität, welche auftritt, ist die für Lamé's Polynom. Wie wir in Kap. I sahen, waren in diesem Falle zwei successive Approximanten, nämlich die n^{te} und $(n+1)^{\text{ste}}$ gleich. Die erste approximiert von einer Ordnung, die um 1 grösser war als im normalen Falle, die zweite deshalb, da der normale Zuwachs der Annäherungsordnung 2 ist, von einer Ordnung, die um 1 kleiner war als die normale. In dem ersten der entsprechenden Reste

$$\int \frac{A_n(x - \rho_n) dx}{N_n^2 \sqrt{(x - e_1) \dots (x - e_3)}}$$

wächst der Exponent $\lambda'_4 = -\frac{1}{2} + 2n$ um eine Einheit über das Normale, weil der Punkt ρ_n mit dem Punkt ∞ , wo approximiert wird, zusammenfällt, und der Faktor $x - \rho_n$ muss daher durch eine Constante ersetzt werden. Der nächste Rest

$$\int \frac{A_{n+1}(x - \rho_{n+1}) dx}{N_{n+1}^2 \sqrt{(x - e_1) \dots (x - e_3)}}$$

kann dem vorigen nur gleich werden, wenn ρ_{n+1} und ausserdem eine Wurzel von $N_{n+1} = 0$ in's Unendliche rückt. Um zu verstehen, wie die Polygone gleich werden, werden wir zunächst voraussetzen, dass ρ_0 , die Constante unseres Funda-

mentalintegrals, unendlich wenig abgeändert wird, so dass die Irregularität in unserem Kettenbruch verschwindet, und dann den Grenzübergang zum Falle der Irregularität machen. Durch die Aenderung von ρ_0 werden ρ_n und ρ_{n+1} von dem Unendlichen fortgeschafft aber bleiben doch noch sehr gross, und entsprechend müssen in den Polygonen die Wendepunkte T_n und T_{n+1} gerade im Begriff sein, sich mit E'_4 zu vereinigen. Denken wir uns der Einfachheit der Darstellung halber alle angehängten Halbebenen abgetrennt, so kommen wir auf die früheren Figuren zurück. Wir erkennen zugleich, dass nur die Polygone von Fig. 18, 20 und 21 die Bedingungen für T_n und T_{n+1} erfüllen können. Lassen wir jetzt ρ_n und ρ_{n+1} in's Unendliche rücken. In Fig. 20 oder 21 erhält der Winkel bei E'_4 dann einen Zuwachs von π , und da dies eine Vermehrung der Approximationsordnung um 1 anzeigt, so entspricht Fig. 20 oder 21 dem n^{ten} Integral. Dagegen wird in Fig. 18 der Winkel bei E'_4 um π vermindert, und daher entspricht diese Figur dem $(n+1)^{\text{sten}}$ Integral. Zu gleicher Zeit wird eine Halbebene vom Polygone losgetrennt. Dies entspricht dem Umstande, dass eine Wurzel von $N_{n+1} = 0$ verloren geht, worauf der Grad von N_{n+1} auf den von N_n herabsinkt. Die polar angehängten Halbebenen bleiben natürlich von dem Grenzübergange unberührt. Sie müssen so angeheftet werden, dass beide Polygone in der Grenze gleich werden und das nämliche Lamé'sche Irregularitätsintegral vorstellen. Die Figur zeigt dann, dass keine der Wurzeln des Lamé'schen Polynoms ausserhalb des Intervalles $e_1 e_3$ liegen kann, wie ja bekannt ist (vgl. Kap. II).

Dies specielle Beispiel erklärt vollständig den Charakter einer Irregularität der ersten Ordnung für irgend einen Kettenbruch vom Typus I. Eine Irregularität der zweiten Ordnung kann in gleicher Weise behandelt werden. Drei successive Näherungsbrüche, drei Reste

$$\begin{aligned} & \int \frac{W_{r-2} \cdot (x_1 dx_2)}{N_n^2 \cdot (x_1 - e_1 x_2)^{1-\lambda'_1} (x_1 - e_2 x_2)^{1-\lambda'_2} \dots (x_1 - e_{r+1} x_2)^{1-\lambda'_{r+1}}}, \\ & \int \frac{W'_{r-2} \cdot (x_1 dx_2)}{N_{n+1}^2 \cdot (x_1 - e_1 x_2)^{1-\lambda'_1-2} (x_1 - e_2 x_2)^{1-\lambda'_2} \dots (x_1 - e_{r+1} x_2)^{1-\lambda'_{r+1}}}, \\ & \int \frac{W''_{r-2} \cdot (x_1 dx_2)}{N_{n+2}^2 \cdot (x_1 - e_1 x_2)^{1-\lambda'_1-4} (x_1 - e_2 x_2)^{1-\lambda'_2} \dots (x_1 - e_{r+1} x_2)^{1-\lambda'_{r+1}}} \end{aligned}$$

und drei Polygone werden wechselseitig gleich. Die erste der zwei Approximanten approximiert bei e_1 das Fundamentalintegral in einer um zwei Einheiten höheren Ordnung als gewöhnlich; zugleich erhält in dem ersten Integral λ'_1 einen

Zuwachs von zwei Einheiten durch das Zusammenfallen zweier ganzzahliger Punkte von W_{r-1} mit e_1 . Die mittlere Approximante approximiert in der gewöhnlichen Weise, und das zweite Integral wird dem ersten durch Aufnahme einer Wurzel von $N_{n+1} = 0$ und zweier ganzzahliger Punkte von W_{r-1} in das e_1 gleich, ohne dass dabei irgend eine Änderung des entsprechenden Exponenten eintritt. Die dritte Approximante bleibt um zwei Einheiten unter der gewöhnlichen Annäherungsordnung, und λ_1 im dritten Integral vermindert sich um 2, weil zwei Punkte ρ und zwei Wurzeln von $N_{n+1} = 0$ mit e_1 zusammenfallen.

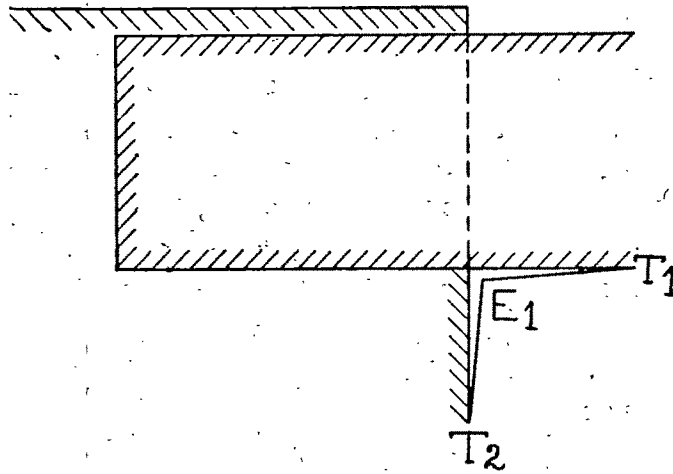


FIG. 24.

Um zu verstehen, wie die Gleichheit der zugehörigen Polygone herauskommt, ändern wir wieder die Gestalt unseres Fundamentalphragons unendlich wenig ab, so dass die Irregularität noch nicht eintritt, aber ihr Eintreten dicht bevorsteht. Wir werden, wie vorher, wieder möglichst einfache Beispiele wählen, und alle Ebenen und Halbebenen, welche von dem Grenzübergang nicht berührt werden, abtrennen; denn es ist uns nur darum zu thun, das Wesentliche der Veränderungen verständlich zu machen. Dem Paare ρ in irgend einem Integral, das im Begriffe ist, mit e_1 zusammenzufallen, können entweder zwei Wendepunkte oder ein Wendungspunkt entsprechen. Betrachten wir zuerst den Fall zweier Wendepunkte und setzen voraus, dass sie auf entgegengesetzten Seiten von E_1 , aber nur durch unendlich kleine Stücke der resp. Seiten davon getrennt liegen (Fig. 24). Bei ihrer Vereinigung muss der Winkel E_1 um 2π wachsen, und deshalb entspricht

ein solches Polygon dem ersten der Integrale. Wenn einer der beiden Wendepunkte durch den ∞ fernen Punkt von E_1 getrennt wird, (einen solchen Fall hatten wir in dem Polygon, Fig. 18), so wird durch seine Vereinigung mit E_1 , entsprechend dem Verluste einer Wurzel des zugehörigen N , eine Halbebene abgetrennt werden, wodurch der betreffende Winkel abnimmt. Dieser Abnahme hält die Vereinigung des anderen Wendepunktes mit E_1 das Gegengewicht, und deshalb haben wir ein Polygon, das dem mittleren der obigen Integrale entspricht. Wenn andererseits beide Wendepunkte auf den zugehörigen Seiten durch den ∞ fernen Punkt von E_1 getrennt werden, so werden entsprechend dem Verluste zweier Wurzeln eines N zwei Halbebenen abgetrennt, und der Winkel E_1 nimmt um 2π ab. Eine solche Figur muss zu dem letzten der drei Integrale gehören. Indem wir jetzt weiter voraussetzen, dass die Wendepunkte auf derselben Seite von E_1

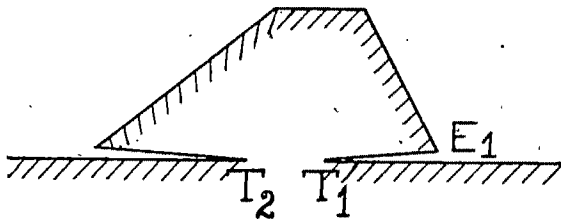


FIG. 25.

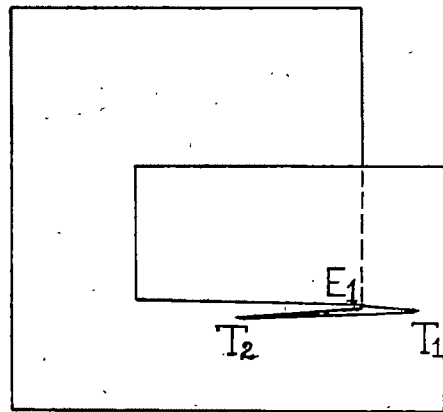


FIG. 26.

liegen, wird durch ihre Vereinigung mit E_1 , wenn sie durch den Punkt ∞ längs ihrer Seite getrennt werden, eine Halbebene abgeschnitten werden, jedoch ohne Aenderung des Winkels (Fig. 25). Dies giebt uns eine zweite Art von Polygonen, die für das mittlere Integral möglich ist. Wenn die Wendepunkte dagegen nicht durch den ∞ fernen Punkt getrennt werden, so kann man erwarten, dass ihre Vereinigung mit E_1 entweder den Winkel bei E_1 um 2π vergrößert (Fig. 26), wodurch eine zweite dem ersten Integrale entsprechende Polygonart entsteht, oder um 2π verkleinert, wobei eine Vollebene abgespalten wird. Die Natur der diesem letzteren Vorkommnis entsprechenden Polygone wird am

besten verstanden, wenn wir sie aus zwei Teildiagrammen construieren (Fig. 27) und diese längs der gekrümmten Strecke auf einander legen. Die Vereinigung der beiden Wendepunkte mit E_1 wird dann die Verbindungsstrecke der beiden Figuren auf einen Punkt reducieren und dadurch die Vollebene abtrennen, die in dem zweiten Teildiagramm dargestellt ist. Entsprechend der abgetrennten Ebene ist ein Paar imaginärer Wurzeln des zum dritten Integral gehörigen Polynoms $N_{n+2} = 0$ verloren gegangen. Endlich kann man einen *Windungspunkt* W' mit E_1 vereinigen. Wenn mit seiner Hülfe ein Blatt längs eines Schnittes zwischen W' und E_1 angehängt war, so wird die Vereinigung den Winkel bei E_1 um 2π vermindern und entsprechend dem Verlust eines Paares von Wurzeln eine

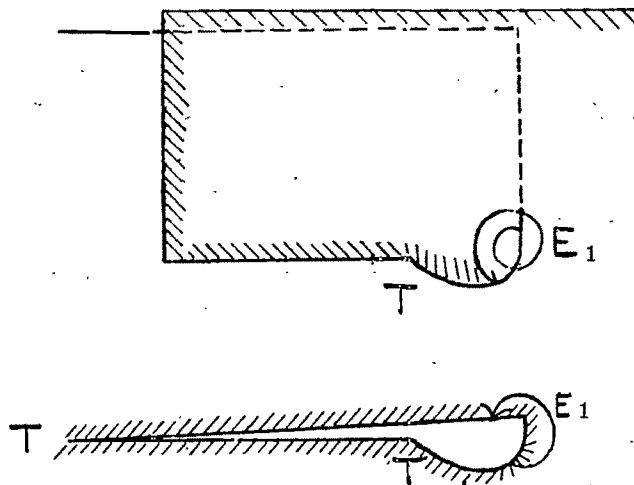


FIG. 27.

Vollebene abschneiden. Wir haben so eine dritte Art von Polygonen für das dritte Integral. Wenn man andererseits ein Blatt längs eines Schnittes nach irgend einer anderen Ecke als E_1 angehängt hätte, so wäre die einzige Veränderung, die durch Vereinigung von W' und E_1 entsteht, eine Zunahme des Winkels E_1 um 2π gewesen, und so hätte man noch eine Art von Polygonen für das erste Integral erhalten. Es ist wohl kaum nötig zu bemerken, dass die drei zusammengehörigen Polygone immer von solcher Gestalt sein müssen, dass sie in der Grenze genau zusammenfallen.

In eine Discussion der höheren Irregularitäten für den ersten Typus von Kettenbrüchen brauchen wir hier nicht einzutreten. Sie sind vollständig durch

Wiederholung der eben geschilderten Vorkommnisse zu erklären. So kann man z. B. die Vereinigung zweier Windungspunkte mit einer Ecke als successive Vereinigung erst des einen, dann des anderen ansehen. In ähnlicher Weise können die Irregularitäten der anderen Typen von Kettenbrüchen behandelt werden. Es tritt dabei nur eine wiederholte Vereinigung von Wende- und Windungspunkten mit den Ecken ein, auf die sich die Approximation bezieht, und eine solche Trennung von Ebenen und Halbebenen, wie wir sie oben auseinandergesetzt haben.

KAPITEL V.

EINIGE SÄTZE ÜBER DIE WURZELN VERSCHIEDENER POLYNOME.

Wir wenden uns jetzt zu einigen Folgerungen, die die Polynome V betreffen. Es ist klar, dass die Verteilung der Wurzeln der Polynome auf die verschiedenen Segmente $e_i e_{i+1}$ der reellen Axe und das imaginäre Gebiet von der geometrischen Beschaffenheit der Polygone, nämlich der Grösse der Winkel 2π und der Lage der Windungs- und Wendepunkte abhängt. Dies zwingt uns, mehr auf die Betrachtung specieller Fälle als auf die Aufstellung allgemeiner Sätze auszugehen. Daher verschieben wir die bezüglichen Ueberlegungen bis auf den zweiten Teil dieses Kapitels und lenken zuerst unsere Aufmerksamkeit auf gewisse Regeln von allgemeiner Anwendbarkeit, die wir hinsichtlich der relativen Verteilung der Wurzeln der Polynome V von benachbarten Integralen ableiten können.

(A). *Gegenseitige Trennung der Wurzeln benachbarter Polynome.*

Es haftet ein besonderes Interesse an diesem Gegenstand, weil, wie wir gesehen haben, die consecutiven Näherungsnenner unserer Kettenbrüche benachbart sind, und weil auch umgekehrt irgend zwei benachbarte Polynome in einen Kettenbruch eingeschaltet werden können.

Wir werden gleich finden, dass die ganzzahligen Punkte auch hier eine wichtige Rolle spielen. Insofern die ganzzahligen Punkte irgend eines Integrals zugleich Verzweigungspunkte der für sein Polynom V geltenden Differentialgleichungen sind, wird es vorteilhaft sein, kurz von den ganzzahligen Punkten des V zu reden. Wir bedienen uns dieser Ausdrucksweise in dem ersten Satz, den wir jetzt aufstellen:

PROP. XXII.— *Wenn in irgend einem Segmente $e_i e_{i+1}$ zwei successive Wurzeln eines Polynoms durch eine gerade Anzahl seiner ganzzahligen Punkte getrennt werden,*

so müssen zwischen ihnen eine ungerade Anzahl von Wurzeln jedes benachbarten Polynoms liegen; wenn die beiden Wurzeln durch eine ungerade Anzahl ganzzahliger Punkte getrennt werden, so muss eine gerade Zahl (die auch Null sein kann) von Wurzeln jedes benachbarten Polynoms dazwischen liegen.

Dieser Satz kann als eine Folge der geometrischen Continuität der Polygone aufgefasst werden. Jedes ist ein einfach zusammenhängender Bereich. Das ist augenscheinlich, wenn wir uns erinnern, dass die Ebene in funktionentheoretischem Sinne nur eine continuirlich durch das Unendliche gehende Kugel ist. Irgend ein Polygon kann deshalb aus irgend einem anderen continuirlich durch Deformation oder Streckung abgeleitet werden. Eine solche Deformation hat man in der Gleichung für benachbarte Integrale:

$$\int \frac{W'_{r-2} \cdot (x_1 dx_2)}{V_{q'}^2 \cdot \Pi (x_1 - e_i x_2)^{1-\lambda_i}} - \int \frac{W''_{r-2} \cdot (x_1 dx_2)}{V_{q''}^2 \cdot \Pi (x_1 - e_i x_2)^{1-\lambda_i}} = \frac{\Pi (x_1 - e_i x_2)^{\lambda_i}}{V_{q'} V_{q''}}.$$

Der Ausdruck rechter Hand giebt uns in der That die Verschiebung an, die ein Punkt η des ersten Integrals erfahren muss, falls er in den entsprechenden des zweiten übergeführt wird. Irgend eine Seite des einen Polygons wird dabei ersichtlich in die entsprechende Seite des benachbarten übergeführt, irgend ein continuirlicher Teil der einen Seite in einen continuirlichen Teil der anderen. Betrachten wir jetzt zwei successive Wurzeln eines der beiden Polynome $V_{q'}$ und $V_{q''}$ zwischen e_i und e_{i+1} , und setzen wir erstens voraus, dass eine gerade Anzahl seiner reellen ganzzahligen Punkte zwischen den Wurzeln liegt. Der entsprechende Teil der Seite $E_i E_{i+1}$ des Polygons geht von dem Unendlichen wieder nach dem Unendlichen, und da seine Richtung während dessen entweder überhaupt nicht oder eine gerade Anzahl von Malen umkehrt, so muss derselbe die Vollebene durchziehen. Nun kann man einen Kettenbruch bilden, in welchem zwei successive Näherungsnenner die beiden V enthalten, und deshalb haben $V_{q'}$ und $V_{q''}$ keine gemeinsame Wurzel. Durch die Ueberführung des einen Polygons in das andere müssen deshalb die beiden Enden der Teilseite, die beim Unendlichen liegen, in's Endliche gebracht werden. Die dicht an den beiden Enden liegenden Punkte müssen sich dann in entgegengesetzten Richtungen in der Ebene bewegen, und deshalb muss sich mindestens bei einem dazwischen liegenden Punkte der Teilseite die Richtung der Verschiebung umkehren; wenn sie sich aber öfter umkehrt, muss sie sich eine ungerade Anzahl von Malen umkehren. Nun zeigt aber der obige analytische Ausdruck, dass die Umkehrung nur bei Punkten, die den

Wurzeln der beiden Polynome entsprechen, stattfinden kann. Es folgt daraus, dass zwischen irgend zwei successiven Wurzeln des betrachteten Polynoms eine ungerade Anzahl von Wurzeln des anderen liegen muss. Wollen wir jetzt die zweite Voraussetzung machen, dass zwischen zwei successiven Wurzeln des einen Polynoms in dem Segmente eine ungerade Anzahl seiner ganzzahligen Punkte liegt. Dann rückt in entsprechender Weise im Polygon ein Teil einer Seite von dem Unendlichen in's Endliche, kehrt seine Richtung bei den Wendepunkten eine ungerade Anzahl von Malen um und kehrt nach dem Unendlichen auf derselben Seite der Ebene zurück, auf welcher er von dem Unendlichen hergekommen war. Wenn jetzt das Polygon in das andere übergeführt wird, so müssen die äussersten Punkte an beiden Enden der Teilseite durch Verschiebung in gleicher, nicht in entgegengesetzter Richtung in's Endliche gebracht werden. Wenn daher die Richtung der Verschiebung zwischen den äussersten Punkten sich überhaupt umkehrt, so kann es nur eine gerade Anzahl von Malen geschehen. Dementsprechend müssen wir entweder keine Wurzeln des anderen Polynoms oder eine gerade Anzahl zwischen den betrachteten Wurzeln finden, wie zu beweisen war.

Eine interessante Anwendung unseres Principes haben wir, wenn keins der beiden betrachteten Polynome in dem Segmente e, e_{i+1} irgend einen ganzzahligen Punkt besitzt. Es folgt dann daraus, dass sich die Wurzeln der Polynome wechselseitig in dem Intervall trennen. Ein specielles Beispiel davon ist der hypergeometrische Fall $r=2$, wo überhaupt keine ganzzahligen Punkte existieren. Man hat so das Theorem:

PROP. XXIII.—*Bei allen Kettenbrüchen wie bei der vollständigen Gesamtheit der Integrale oder Approximanten, bei denen nur drei Verzweigungspunkte e vorhanden sind, trennen sich die Wurzeln zweier aufeinanderfolgender Näherungsnenner, resp. zweier benachbarter V , die zwischen zwei consecutiven Verzweigungspunkten liegen, wechselseitig.*

Dieser Satz schliesst als speciellen Fall den am Ende von Kap. II erwähnten ein, wo wir vorausgesetzt hatten, dass alle drei \mathcal{N} ausser einem algebraisch kleiner als 1 seien. Man kann ihn auch auf die Kettenbrüche (1) und (2), S. 64, anwenden. So trennen sich z. B. die Wurzeln der aufeinanderfolgenden Kugelfunktionen erster Art wechselseitig, wie das ja sehr bekannt ist.

In gleicher Weise, wie wir zwei benachbarte Polygone verglichen haben, können wir bei einer Erzeugenden irgend ein Polygon mit dem Fundamentalpolygon, das als Basis der Approximation diene, vergleichen. Die hierher gehörige Formel lautet:

$$\int \frac{W_{r-2} \cdot (x_1 dx_2)}{\prod (x_1 - e_i x_2)^{1-\lambda_i}} = \frac{Z_n}{N_n} \prod (x_1 - e_i x_2)^{\lambda_i} + \int \frac{W_{r-2}^{(*)} \cdot (x_1 dx_2)}{N_n^* \prod (x_1 - e_i x_2)^{1-\lambda_i^*}},$$

wo λ_i den algebraisch kleineren der Werte λ_i und λ_i^* bedeutet. Mit Hülfe derselben kann man folgenden Satz beweisen:

PROP. XXIV.—Wenn in irgend einem Segmente $e_i e_{i+1}$ zwei Wurzeln von $N_n \neq 0$ durch eine gerade Anzahl seiner ganzzahligen Punkte getrennt werden, so ist eine ungerade Anzahl von Wurzeln von $Z_n = 0$ zwischen ihnen eingeschlossen; wenn sie durch eine ungerade Anzahl getrennt werden, dann liegt zwischen ihnen keine oder eine gerade Anzahl von Wurzeln von $Z_n = 0$.

Der Beweis läuft dem des letzteren Satzes parallel, nur dass an Stelle des benachbarten N_n (d. h. V) hier Z_n tritt.

Der hypergeometrische Fall $r = 2$, bei dem keine Wendepunkte vorhanden sind, verdient wieder besonderes Interesse. In den Kettenbrüchen von Typus I, II, IV übertrifft der Grad von Z_n niemals den von dem entsprechenden V . Wenn daher alle Wurzeln von $V = 0$ reell sind und alle oder alle ausser einer in einem einzelnen Segmente liegen, so müssen die Wurzeln von $Z_n = 0$ alle ebenfalls reell sein und abwechselnd mit ihnen liegen.

(B). Realität und Lage der Wurzeln des einzelnen Polynoms.

Wir werden zuerst eine Grenze für die Anzahl der imaginären Wurzeln eines Polynoms suchen. Für jedes Paar imaginärer Wurzeln muss ein Blatt, d. h. ein Ebenenteil des entsprechenden Polygons existieren, der durch das Unendliche zieht. In jedem dieser Blätter können wir eine geschlossene, convexe, geradlinige Contour ziehen, ausserhalb deren kein Teil der Polygongrenze und kein innerer Windungspunkt sich findet; wir werden sie ausserdem noch so wählen, dass ihre Ecken entweder einfache Windungspunkte oder einfache Wendepunkte (vgl. S. 56) oder Polygonecken sind. Im Falle die geradlinige Contour sich auf eine einzelne Linie reduciert—auf einen Punkt kann sie sich nicht reducieren—können wir sie als ein unendlich schmales Rechteck ansehen.

Die Summe der Ueberschüsse der Aussenwinkel unserer Contour über π beträgt 2π , und die Aussenwinkel an denjenigen Ecken, die keine inneren Windungspunkte sind, sind direct Teile der Polygonwinkel. Offenbar kann auch der Ueberschuss eines solchen Contourwinkels über π niemals π überschreiten. Wenn die Contour sich auf eine Linie reduciert und *nur* an ihren Enden Contourecke liegen, so wird dies Maximum erreicht, und die ganze Ebene liegt diagonal angehängt zwischen den beiden Endpunkten und kann also entfernt werden. Anderenfalls liegen drei oder mehr Ecken auf der Contour. Wir können noch weiter hinzufügen, dass kein einfacher innerer Windungspunkt zu mehr als zwei Contouren gehören kann und deshalb zu dem Gesamtüberschuss der Contourwinkel über π niemals mehr als 2π beitragen kann. Ausserdem kann kein einfacher Wendepunkt mehr als einem Blatt angehören, wenn nicht die Contour eine Gerade ist.

Diese Principien werden uns in den Stand setzen, für irgend ein Polygon mit einer beliebiger Anzahl von Windungs- und Wendepunkten und mit gegebenen λ' sogleich eine Grenze für die Anzahl imaginärer Wurzeln anzugeben. Wir werden die Principien auf Heun's und Humbert's Kettenbrüche vom ersten Typus

$$\int \frac{W_{r-2} \cdot dx}{(x-e_1)^{1-\lambda_1} \dots (x-e_r)^{1-\lambda_r}} = \frac{Z_n}{N_n} (x-e_1)^{\lambda_1} \dots (x-e_r)^{\lambda_r} + \int \frac{W_{r-2}^{(n)} \cdot dx}{N_n^2 \cdot (x-e_1)^{1-\lambda_1} \dots (x-e_r)^{1-\lambda_r}}$$

anwenden, wo alle Exponenten ausser λ'_{r+1} algebraisch kleiner als 1 sind. In den successiven Polygonen ist, abgesehen von Wendepunkten, der Winkel bei E_{r+1} (entsprechend $e_{r+1} = \infty$) der einzige, welcher zu einer Contour gehören kann. Nach unseren früheren Auseinandersetzungen werden wir nun zunächst alle zwischen E_{r+1} und einem Windungspunkt oder zwischen zwei Windungspunkten diagonal angehängten Vollebenen entfernen. Jeder solcherweise entfernten Ebene muss mindestens ein unterschiedenes Paar ganzzahliger Punkte ρ entsprechen. In jedem der übrigbleibenden Blätter können, abgesehen von E_{r+1} , nur Windungs- und Wendepunkte auf der Contour liegen, und es müssen wenigstens zwei solche auf jeder Contour liegen. Einem Wendepunkt entspricht ein einzelnes ρ , einem Windungspunkte ein Paar. Da indessen ein Windungspunkt zwei Contouren angehören kann, so werden wir, wenn dies eintritt, ein ρ des Paares zur einen Con-

tour, das andere zur anderen Contour rechnen. Jedes durch das Unendliche gehende Blatt verlangt deshalb mindestens zwei verschiedene ρ . Dasselbe gilt auch, wenn die Contour sich auf eine Gerade mit drei oder mehr Ecken reduciert. Die dann eintretenden Modificationen sind ganz unwesentlich, und wir haben ihre Auseinandersetzung deshalb durchweg übersprungen. Diese Überlegungen liefern uns den Satz:

PROP. XXV.—*In keinem Integral oder Kettenbruch vom ersten Typus, in dem alle N ausser einem algebraisch kleiner als 1 sind, kann die Zahl der imaginären Wurzeln irgend eines Polynoms V oder N_n die Anzahl der ganzzahligen Punkte ρ , und darum $r - 2$ überschreiten. Ist r ungerade, so kann sie sogar die Zahl $r - 3$ nicht übertreffen.*

Dies Theorem schliesst als specielle Fälle alle früher bekannten Resultate über die Anzahl der imaginären Wurzeln für $r > 2$ ein und reicht noch weiter. So ist Humbert's und Stieltjes' Resultat, welches wir im Kap. II citierten; der specielle Fall, wo eine möglichst hohe Irregularität beim Integral auftritt, so dass alle ganzzahligen Punkte ρ fehlen. Zufolge dessen sind die Wurzeln des entsprechenden Polynoms, z. B. eines Lamé'schen Polynoms, notwendig alle reell. Ferner erkennen wir die Richtigkeit von Markoff's Satz (Kap. II), dass für $r = 3$ die Polynome der Kettenbrüche keine imaginären Wurzeln besitzen. Unser Theorem kann in der That als eine Erweiterung von Markoff's Theorem für irgend einen Wert von r aufgefasst werden.

Wir wenden uns jetzt zur Erweiterung derjenigen Markoff'schen Sätze für $r = 3$, die die Zahl der ausserhalb der äussersten endlichen Verzweigungspunkte e_1 und e_r liegenden reellen Wurzeln der Polynome N in Humbert's und Heun's Kettenbrüchen betreffen.

Setzen wir zunächst voraus, dass eine einzelne Wurzel eines N zwischen e_r und $e_{r+1} = \infty$ liegt. Dann geht die Seite $E_r E_{r+1}$ des entsprechenden Polygons durch das Unendliche. An der einen oder anderen Seite dieser Linie liegt innerhalb des Polygons eine Halbebene oder ein Teil einer solchen, welche von der Linie teilweise begrenzt wird. Im Innern derselben werden wir jetzt von E_r nach E_{r+1} einen geradlinigen Linienzug ziehen, der nach dem Innern der Halbebene durchaus convex ist und dessen Ecken entweder Windungs- oder Wendepunkte oder Polygonecken sind. Ausserhalb der Contour in der Halbebene endlich soll kein Windungspunkt und kein Teil der Polygonbegrenzung liegen. Dieser Linienzug

müss, da der Winkel E_r kleiner als π ist, mindestens noch eine Ecke ausser E_r und E_{r+1} haben (vgl. Fig. 28). Hier muss der Winkel grösser als π sein, und die Ecke muss deshalb, da $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ alle kleiner als 1 sind, ein Wende- oder ein Windungspunkt sein. Es tritt daher entsprechend dem Umstande, dass sich die Seite in's Unendliche erstreckt, wenigstens ein ganzzahliger Punkt auf. Setzen wir zweitens mehr als zwei Wurzeln in dem Segment $e_r e_{r+1}$ voraus, und betrachten wir ein Paar successiver Wurzeln, die nicht durch einen ganzzahligen Punkt getrennt sind. Ein Teil der Seite $E_r E_{r+1}$ muss dann entsprechend von dem Unendlichen nach dem Unendlichen durch die ganze Ebene ziehen und eine Halbebene begrenzen. Durch eine reelle lineare Substitution projicieren

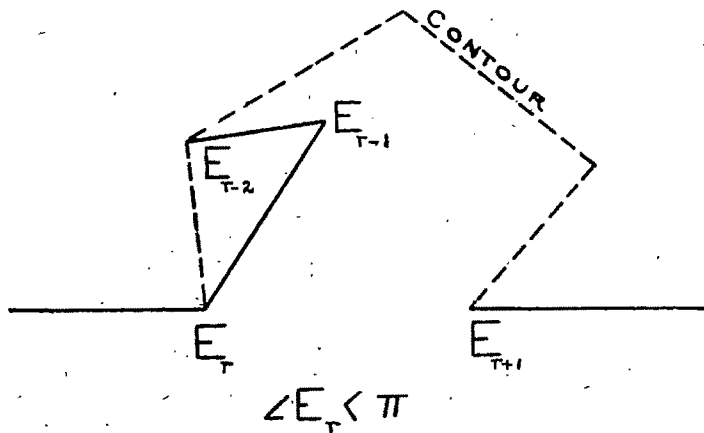


FIG. 28.

wir den Unendlichkeitspunkt in's Endliche, um die Verhältnisse besser übersehen zu können. Es liegt dann dieselbe Halbebene vor uns, nur dass die begrenzende Teilseite sich jetzt bei einem endlichen Punkte statt beim Unendlichen überschlägt. Von diesem Punkte aus zeichnen wir genau wie früher eine convexe geradlinige Contour nach demselben Punkt zurück und folgern daraus sofort, dass deren Ecken Windungspunkte sind oder der Polygongrenze angehören. Auf dieser Contour müssen nun wenigstens zwei Wende- oder ein Windungspunkt erscheinen. Daher verlangt die Existenz der zwei Wurzeln das Vorhandensein von wenigstens zwei ganzzahligen Punkten. Ferner haben wir noch die Annahme zu erledigen, dass die beiden successiven Wurzeln durch einen ganzzahligen Punkt getrennt sind. In dem Polygon laufen dann zwei Linien von dem ent-

sprechenden Wendepunkte T aus in derselben Richtung nach dem Unendlichen und kehren in derselben Ebene von der anderen Seite zurück (Fig. 29). Jede begrenzt eine Halbebene oder einen Teil einer Halbebene, welche infolgedessen, wie bei unserer ersten Annahme, für sich betrachtet werden kann. Zwischen T und der nächsten im Endlichen gelegenen Ecke ziehen wir, wie oben zwischen E_r und E_{r+1} , eine Contour, die convex gegen das Innere der betrachteten Halbebene ist, u. s. w. und schliessen, dass ausser T wenigstens noch ein Wende- oder Windungspunkt vorhanden sein muss oder, mit anderen Worten, im Ganzen für die zwei Halbebenen wenigstens 2ρ . Sind schliesslich die beiden Wurzeln durch zwei oder mehr Wendepunkte getrennt, dann bedingen sie dementsprechend von vornherein

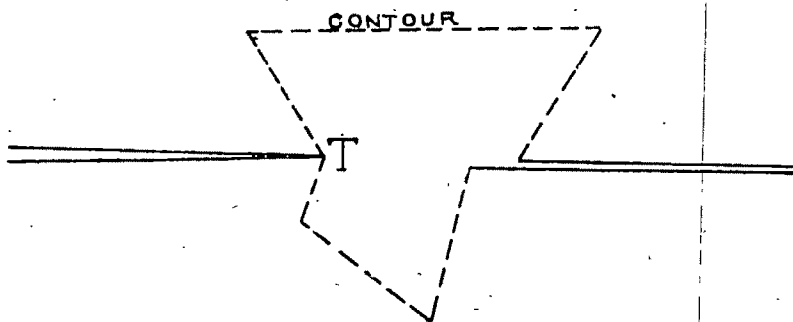


FIG. 29.

das Vorhandensein von zwei oder mehreren ganzzahligen Punkten ρ . Wir haben so durch die Construction des Polygons gelernt, dass jede Wurzel, die ausserhalb der äussersten endlichen Verzweigungspunkte liegt, die Existenz mindestens eines ρ bedingt. Daher haben wir

PROP. XXVI.—*Die Anzahl der ausserhalb der äussersten endlichen Verzweigungspunkte gelegenen reellen Wurzeln in dem Kettenbruche von Prop. XXV kann nie die Zahl der ganzzahligen Punkte, und darum niemals $r - 2$ übersteigen.*

Markoff's Satz galt, wie wir schon bemerkten, nur für den Fall $r = 3$.

Die letzten beiden Theoreme können combinirt werden, wenn man beachtet, dass Wende- oder Windungspunkte, die gebraucht werden, um einem Blatte des Polygons den Durchgang durch das Unendliche zu ermöglichen, nicht zu gleicher Zeit dazu dienen können, eine Seite durch das Unendliche sich erstrecken zu lassen. Man schliesst daraus:

PROP. XXVII.—*In dem Kettenbruch von Prop. XXV kann die Anzahl der imaginären Wurzeln, vermehrt um die Anzahl der ausserhalb der äussersten endlichen Verzweigungspunkte gelegenen reellen Wurzeln, nie die Anzahl der ganzzahligen Punkte und darum $r - 2$ niemals übersteigen.*

Wenden wir diesen Satz auf die verallgemeinerten Lamé'schen und Stieltjes'schen Polynome an, so schliessen wir ohne Weiteres das im Kap. II erwähnte Resultat, dass *alle* Wurzeln dieser Polynome reell zwischen den zwei äussersten endlichen Verzweigungspunkten liegen.

GÖTTINGEN, 1898.

Waves and Jets in a Viscous Liquid.

By A. B. BASSET, M. A., F. R. S.

1. In an able article which appeared in the ninth volume of this Journal, Prof. Greenhill discussed at considerable length the principal cases of wave-motion in a *frictionless* liquid which have hitherto been solved. In the present paper, I propose to consider certain problems of a similar character when the viscosity of the liquid is taken into account.

The motion of deep-sea waves is worked out in Chapter XXIII of my Treatise on Hydrodynamics, from which it appears that when the viscosity is small, as is the case with water, the velocity of propagation is the same as that of a frictionless liquid, and that the only effect of viscosity is to introduce a modulus of delay whose value is equal to $\lambda^2/8\pi^2\nu$, where λ is the wave-length and ν the kinematic coefficient of viscosity. But when the viscosity is large the motion is of a totally different character, the time factor appearing in the form of an exponential quantity ϵ^{kt} where k is *negative*. The result which is given in §521 of my book is wrong; for it can be shown, and will hereafter appear from the solution of another problem, that the correct value* of k is $-g/2m\nu$, whence the form of the free surface at time t after the commencement of the motion is

$$\zeta = (a \cos mx + b \sin mx) \epsilon^{-\frac{gt}{2m\nu}},$$

where $2\pi/m$ is the wave-length, and a and b are constants depending upon the initial motion. The difference between the two kinds of motion may be illustrated by allowing a jet of air to play for a short time upon the surface of water and upon treacle, and watching the effect produced.

The motion of waves in a viscous liquid of finite depth is worked out in §523 of my Hydrodynamics. The solution is more complicated, but leads to similar results.

* See also Tait, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1890, p. 110.

The motion of waves at the surface of separation of two frictionless liquids which are moving with independent velocities was investigated by Greenhill* in 1878, and his solution has been discussed by Lord Rayleigh† with reference to the question of stability, but the corresponding solution for *two* viscous liquids would entail difficulties of a rather formidable character, owing to the fact that it would be necessary to retain all quadratic terms upon which the undisturbed motion depends. If, however, one of the liquids is frictionless whilst the other is viscous, the solution can be arrived at without difficulty.

It is always a great advantage when the conditions of a mathematical problem can be expressed in terms of a single function, which satisfies a certain partial differential equation together with given boundary conditions. In most problems of interest relating to wave-motion in frictionless liquids this can be affected by means of the velocity potential; but when the liquid is viscous, a velocity potential cannot as a rule exist, owing to the fact that the motion almost always involves molecular rotation. Of course any solution giving a possible irrotational motion must necessarily satisfy the equations of motion of a viscous liquid; but the solution will not satisfy the boundary conditions except in the single case in which the liquid moves like a rigid body *having a motion of translation alone*. Moreover, viscous motion involves a conversion of energy into heat. If, however, the motion of a viscous liquid is in two-dimensions, or is symmetrical with respect to an axis, the former can always be expressed by means of the current function ψ ; and this function will be used throughout the present paper.

Waves at the Surface of Separation of Two Liquids.

2. Let the origin be some point in the undisturbed surface of separation; let the axis of x be measured in the direction of propagation of the waves, and the axis of z vertically upwards. Let the upper liquid be viscous and moving with constant velocity U_1 , whilst the lower is frictionless and moving with constant velocity U_2 . Let μ be the viscosity, and let the suffixes 1 and 2 refer to the upper and lower liquids respectively.

Earnshaw's current function ψ satisfies the equations

$$\left(v\nabla^2 - \frac{d}{dt}\right)\nabla^2\psi = \left(u\frac{d}{dx} + w\frac{d}{dz}\right)\nabla^2\psi, \quad (1)$$

* Cambridge Mathematical Tripos Examination.

† Proc. London Math. Soc., Vols. X, XI and XIX.

where

$$u = d\psi/dz, \quad w = -d\psi/dx, \quad (2)$$

and ν is the kinematic coefficient of viscosity which is equal to μ/ρ .

Since the liquid possesses an independent velocity U_1 , the solution of (1) must be of the form

$$\psi = \psi' + U_1 z,$$

where ψ' depends on the disturbed motion. Substituting in (1) and neglecting all quadratic terms which depend *solely* on the disturbed motion, we obtain

$$\left(\nu \nabla^2 - \frac{d}{dt} - U_1 \frac{d}{dx}\right) \nabla^2 \psi = 0. \quad (3)$$

To obtain a solution suitable for representing wave-motion we assume that x and t enter in the form of the factor e^{mx+kt} , where $2\pi/m$ is the wave-length and k is a quantity to be determined. Substituting in (3) and putting

$$\alpha^2 = m^2 + (k + im U_1)/\nu, \quad (4)$$

we obtain

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - m^2\right) \left(\frac{d^2}{dz^2} - \alpha^2\right) \psi' = 0, \quad (5)$$

where ψ' now denotes a function of z alone.

The solution of (5) is

$$\psi' = \chi_1 + \chi_2,$$

where χ_1, χ_2 satisfy the equations

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \chi_1}{dz^2} - m^2 \chi_1 &= 0, \\ \frac{d^2 \chi_2}{dz^2} - \alpha^2 \chi_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

3. We shall consider the case in which the depths of the two liquids are so large in comparison with the wave-length that the former may be treated as infinite; under these circumstances the proper solutions of (6) will be

$$\chi_1 = A e^{-ms}, \quad \chi_2 = C e^{-\alpha s},$$

so that

$$\psi_1 = (A e^{-ms} + C e^{-\alpha s}) e^{mx+kt} + U_1 z. \quad (7)$$

The hydrodynamical equations for the pressure are

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} + U_1 \frac{du}{dx} &= -\frac{1}{\rho_1} \frac{dp_1}{dx} + \nu \nabla^2 u, \\ \frac{dw}{dt} + U_1 \frac{dw}{dx} &= -\frac{1}{\rho_1} \frac{dp_1}{dz} - g + \nu \nabla^2 w;\end{aligned}$$

from these combined with (2), (3) and (6) we readily obtain

$$\left. \begin{aligned}(k + im U_1) \frac{d\chi_1}{dz} &= -\frac{1}{\rho_1} \frac{dp_1}{dx}, \\ im(k + im U_1) \chi_1 &= \frac{1}{\rho_1} \frac{dp_1}{dz} + g,\end{aligned} \right\} \quad (8)$$

whence

$$p_1 = \text{const.} - g\rho_1 z - i\rho_1(k + im U_1) A e^{-ms + imx + kt}. \quad (9)$$

Since the lower liquid is supposed to be frictionless, the function ψ_2 satisfies the equation

$$\nabla^2 \psi_2 = 0,$$

whence

$$\psi_2 = B e^{ms + imx + kt} + U_2 z \quad (10)$$

and

$$p_2 = \text{const.} - g\rho_2 z + i\rho_2(k + im U_2) B e^{ms + imx + kt}. \quad (11)$$

Having obtained the equations of motion and the pressure, we must now consider the boundary conditions which hold good at the surface of separation.

Let the equation of this surface be

$$\zeta - a e^{imx + kt} = F(\zeta, x, t) = 0, \quad (12)$$

then the kinematical condition which holds good at every bounding surface is

$$\frac{dF}{dt} + \frac{d\psi}{dz} \frac{dF}{dx} - \frac{d\psi}{dx} \frac{dF}{d\zeta} = 0. \quad (13)$$

Applying this to the upper liquid we get

$$a = -\frac{im(A + C)}{k + im U_1}. \quad (14)$$

Applying (13) to the lower liquid we get

$$a = -\frac{imB}{k + im U_2}. \quad (15)$$

The dynamical conditions which hold good at the boundary are continuity of stress; and since a frictionless liquid is incapable of supporting any tangential

stress or shear, it follows that the tangential stress parallel to the plane $z = 0$ must vanish at the surface of separation. This condition gives

$$\begin{aligned} & \frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx} = 0, \\ \text{or} \quad & \frac{d^2\psi_1}{dz^2} - \frac{d^2\psi_1}{dx^2} = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

when $z = 0$.

To obtain the second condition, consider a film of the viscous liquid bounded on the lower side by the surface of separation and on the upper side by a surface indefinitely near the former. The lower surface of the film will be subjected to the pressure p_2 of the frictionless liquid, and the upper to a *traction* R due to the action of the viscous liquid in contact with it; hence if T be the surface tension between the two liquids, we get

$$p_2 + R = \frac{T}{\rho} = -T \frac{d^2\zeta}{dx^2}, \quad (17)$$

since the curvature ρ^{-1} of the film is supposed to be very small.

Substituting from (7) in (16) we obtain

$$2Am^2 + C(\alpha^2 + m^2) = 0. \quad (18)$$

The value of R is

$$\begin{aligned} R &= -p_1 + 2\mu \frac{dw}{dz} = -p_1 - 2\rho_1\nu \frac{d^2\psi_1}{dx dz} \\ &= g\rho_1\alpha + \iota\rho_1(k + \iota m U_1)A + 2\iota\rho_1 m\nu (Am + C\alpha) \end{aligned}$$

by (9); whence by (11) and (12), (17) becomes

$$\begin{aligned} g(\rho_1 - \rho_2)\alpha + \iota\rho_1(k + \iota m U_1 + 2m^2\nu)A \\ + 2\iota\rho_1 m\nu C + \iota\rho_2(k + \iota m U_2)B - Tm^2\alpha = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

The elimination of α , A , C and B between (14), (15), (18) and (19) leads to an equation for determining k .

From (4), (14) and (18) we obtain

$$\iota A = -a(k + \iota m U_1 + 2m^2\nu)/m, \quad \iota C = 2am\nu;$$

whence the result of the elimination is

$$mg(\rho_1 - \rho_2) - \rho_1(k + \iota m U_1 + 2m^2\nu)^2 + 4\rho_1 m^3 \alpha \nu^2 - \rho_2(k + \iota m U_2)^2 - Tm^3 = 0. \quad (20)$$

Equation (20) combined with (4) gives a biquadratic equation for determining k , and we shall first perform the elimination.

Let $x = k + imU_1$ (21)
and

$$I = (\rho_1 + \rho_2)x^3 + 2x\{2\rho_1 m^3 \nu + i\rho_2 m(U_2 - U_1)\} + mg(\rho_2 - \rho_1) + Tm^3 - \rho_2 m^2(U_2 - U_1)^2, \quad (22)$$

then (20) becomes

$$I = 4\rho_1 m^3 \nu^3 (\alpha - m);$$

also (4) may be written

$$x = \nu(\alpha^2 - m^2),$$

whence

$$I^2 + 8I\rho_1 m^4 \nu^3 - 16\rho_1^2 m^6 \nu^3 x = 0. \quad (23)$$

This is the biquadratic equation which we have to discuss.

Oil Floating on Water.

4. The viscosity of water is equal to the tangential stress of .014 dynes per square centimetre; and since a dyne is approximately equal to the attraction of the earth at its surface upon a cubic millimetre of water,* the viscosity of water is a very small quantity. On the other hand the viscosity of olive oil is about 3.25 dynes per square centimetre, and is therefore about 232 times as great as that of water. If, therefore, a thick layer of oil is floating on water, the former may be treated as a highly viscous liquid and the latter as a frictionless one, and consequently the proper solution for our purpose will be one in which the viscosity is supposed to be a large quantity.

Assuming for trial that x varies as ν^{-1} , it follows that the first term and also the imaginary term in I are negligible; accordingly (23) reduces to

$$I = 2\rho_1 m^3 \nu x,$$

which gives, since $\nu\rho_1 = \mu$,

$$k + imU_1 = -\frac{g(\rho_2 - \rho_1) + Tm^3 - m\rho_2(U_2 - U_1)^2}{2m\mu}. \quad (24)$$

(i). Let $U_1 = U_2 = 0$, so that the liquids are initially at rest; then, since $\rho_2 > \rho_1$, k is a negative quantity and wave-motion in the proper sense of the word does not exist. The amplitude of the initial disturbance gradually diminishes with the time and the disturbed motion ultimately dies away.

* More accurately the 981st part of a cubic centimetre.

When the wave-length is large, m or $2\pi/\lambda$ is small, in which case the term depending on gravity is the most important; on the other hand when the wave-length is small, the term depending on the surface tension is the most important. It therefore follows that the damping effect of gravity is most important in the case of long waves, and that of surface tension in the case of short ones.

We have supposed that the upper liquid is oil and the lower one water, so that $\rho_2 > \rho_1$; if, however, $\rho_1 > \rho_2$ so that the upper liquid is the heaviest, the value of k will be positive unless

$$Tm^3 > g(\rho_1 - \rho_2),$$

and consequently unless this inequality is satisfied the equilibrium will be unstable. If, however, the difference of densities is very small and the waves are sufficiently short, it will be possible for this inequality to be satisfied, and we shall have the curious case of a heavier liquid floating on a lighter one in stable equilibrium. The stability will, however, be confined to disturbances of very short wave-length.

When the wave-length is such that the numerator of (24) vanishes, a critical case arises. This case is best discussed by reverting to the original differential equation for k . It will be found that one root is zero and that another is real and negative, so that there must be one stable mode of motion, but this case is not of any particular interest.

(ii). When $\rho_2 > \rho_1$ and U_1, U_2 are not zero, it follows that the real part of k will be positive provided the term $(U_2 - U_1)^2$ is large enough. From this it follows that a high relative velocity, which includes the case of motion in opposite directions, tends to produce instability. This has been verified experimentally by Prof. Osborne Reynolds.* The exact nature of the instability will depend upon whether the two liquids are capable of permanently mixing. If they are, the subsequent motion will at first be of a highly turbulent character, which will continue until the liquids have become thoroughly mixed together; but if they are incapable of remaining permanently mixed, a layer of turbulent liquid will exist in the neighborhood of the surface of separation, resembling a mixture of oil and water which has been thoroughly well shaken together. If the liquids be left to themselves, the damping effect of viscosity will gradually cause the turbulent motion to subside and the ultimate state will be one in which all relative motion between the parts of the viscous liquid will have disappeared.

* Phil. Trans., 1883.

It must, however, be recollected that as the lower liquid is supposed to be frictionless, it is not necessary that the tangential velocities on either side of the surface of separation should ultimately become equal.

The critical case in which the numerator of (24) vanishes would require separate treatment.

5. We shall now consider the case in which the viscosity is very small, and we shall suppose that the *lower* liquid is viscous. This renders it necessary to reverse the sign of g . Since ν is very small, the last two terms of (23) may be neglected, and the equation for k is

$$(\rho_1 + \rho_2) x^3 + 2x \{ 2\rho_1 m^2 \nu + \rho_2 m (U_2 - U_1) \} + mg(\rho_1 - \rho_2) + Tm^3 - \rho_2 m^3 (U_2 - U_1)^2 = 0. \quad (25)$$

If the sum of the last three terms is positive, it follows that the roots of this equation must be of the form

$$\alpha + i\beta, \quad \gamma(\alpha - i\beta),$$

where γ is a positive quantity; also

$$4\rho_1 m^2 \nu = -\alpha(1 + \gamma),$$

which shows that α must be negative; hence the real part of k will be negative, and the motion will be stable, provided

$$g(\rho_1 - \rho_2) + Tm^2 > \rho_2 m (U_2 - U_1)^2.$$

If this inequality is not satisfied γ will be negative, and therefore one root of k must be positive, so that the motion will be unstable.

When both liquids are at rest and $\rho_1 > \rho_2$, the real part of k is equal to $-2\rho_1 m^2 \nu / (\rho_1 + \rho_2)$, which shows that the amplitude diminishes with the time, and the wave-motion gradually dies away.

Motion of a Sheet of Liquid.

6. In §418 of my book, a short investigation is given respecting the motion of a thin sheet of frictionless liquid. We shall now discuss the same problem when the liquid is viscous, and surface tension is taken into account; but in order to avoid unnecessarily complicating the analysis, the effect of gravity will be neglected. The conditions of the problem may be approximately realized in practice by supposing liquid to escape from a long and narrow horizontal-slit in

the side of a cistern, and confining our attention to that portion of the sheet which is nearly horizontal.

Let U be the undisturbed velocity of the sheet, $2l$ its thickness. We shall also suppose that the disturbed motion is such, that the sinuosities are symmetrical with respect to the middle surface of the sheet.

The value of ψ will be

$$\psi = \chi_1 + \chi_2 + Uz,$$

where χ_1, χ_2 are determined by (6) of §2. Since we suppose that the motion is symmetrical with respect to the plane $z = 0$, $d\psi/dz$ must be an even function of z , and therefore

$$\psi = (A \sinh mz + C \sinh az) e^{imx+kt} + Uz, \quad (1)$$

whence from (8) of §3 we obtain

$$p = \varphi(k + imU) A \cosh mz e^{imx+kt}. \quad (2)$$

Let the equation of the free surface of the upper side of the sheet be

$$\zeta - l - a e^{imx+kt} = F = 0,$$

then applying (12) of §3, we get

$$a = - \frac{im(A \sinh ml + C \sinh al)}{k + imU}. \quad (3)$$

The condition of zero tangential stress gives

$$2Am^2 \sinh ml + C(\alpha^2 + m^2) \sinh al = 0. \quad (4)$$

Again, omitting the exponential factor,

$$\begin{aligned} R &= -p - 2\nu\rho \frac{d^2\psi}{dx dz} \\ &= \varphi(k + imU) A \cosh ml - 2ipm\nu (Am \cosh ml + Ca \cosh al). \end{aligned}$$

The surface tension condition is

$$R = - \frac{T}{\rho'} = T \frac{d^2\zeta}{dx^2},$$

which becomes

$$\varphi(k + imU + 2m^2\nu) A \cosh ml + 2ip\nu m a C \cosh al = Tm^2 a. \quad (5)$$

On applying the same conditions to the lower side of the jet, where $z = -l - a e^{imx+kt}$, it will be found that they lead to exactly the same equations; hence on eliminating a, A and C we obtain

$$(k + imU + 2m^2\nu)^2 \coth ml - 4m^3\nu^2 a \coth al + \frac{Tm^3}{\rho} = 0. \quad (6)$$

This equation combined with (4) of §2 determines the values of k .

When ν is very small, $\alpha^2 = (k + imU)/\nu$ approximately; α is therefore a large quantity, and $\coth \alpha l = 1$. Also $\alpha \nu^2$ is very small, so that the second term of (6) may be neglected. Under these circumstances we obtain

$$k = -2m^2\nu - imU \pm i\sqrt{\frac{Tm^3}{\rho}} \tanh ml. \quad (7)$$

From this equation we see that the real part of k , which is proportional to the viscosity, is negative, and therefore the motion is stable, from which it follows that the tendency of viscosity is in the direction of stability.

We also see that the effect of surface tension is to introduce an imaginary term into the value of k , which consequently does not affect the stability. In the case of a *circular* jet, it is known that surface tension produces instability when the disturbance consists of short waves. It is remarkable that surface tension should produce such dissimilar effects; and it is important to notice that the effects, produced by certain causes upon a liquid whose motion is in two dimensions, are often totally different from those produced by the same causes when the motion is in three dimensions. The former kind of motion is generally the simplest from a mathematical point of view, whilst the latter kind more often occurs in practical and experimental applications. Great caution must therefore be observed in drawing inferences from theoretical results derived from the solutions of problems in two-dimensional motion and in applying them to the explanation of experimental phenomena in which the motion is in three dimensions.

When ν is absolutely zero, equation (7) gives the value of k for a frictionless liquid. This result can be verified by an independent investigation.

Equation (6) may be written in the form

$$(k + imU)^2 \coth ml + 4m^2\nu(k + imU) \coth ml + 4m^3\nu^2(m \coth ml - \alpha \coth \alpha l) + \frac{Tm^3}{\rho} = 0.$$

When ν is very large, α is nearly equal to m , so that we may write

$$\alpha = m + (k + imU)/2m\nu$$

approximately; whence, by Taylor's theorem,

$$\alpha \coth \alpha l = ml \coth ml + \frac{(k + imU)l}{2m\nu} (\coth ml - ml \operatorname{cosech}^2 ml),$$

and the equation for k becomes

$$(k + imU)^2 \coth ml + 2m^2\nu(k + imU) \operatorname{cosech}^2 ml + Tm^3/\rho = 0,$$

which gives

$$k + imU = - \frac{T \sinh^2 ml}{2\mu l}$$

approximately. From this result we see that when the viscosity is large, its effect, combined with that of the surface tension, is to cause the disturbed motion to die away.

Motion of a Cylindrical Jet.

7. The motion of a cylindrical jet of *frictionless* liquid was discussed by Lord Rayleigh about ten years ago;* and in two recent papers† he has returned to the subject and considered the case of a *highly viscous* liquid. I now propose to give an investigation of a far more general character, in which the velocity, viscosity, surface tension and also the influence of the surrounding air are taken into account. I shall in addition suppose the jet to be electrified.

When a fine jet is allowed to escape from a nozzle so as to describe an approximately parabolic path, it is observed that at a certain point the jet becomes disintegrated into drops. If, however, a metal ball, which is so feebly electrified that it scarcely causes the leaves of a gold-leaf electrometer to diverge to any perceptible extent, is brought into the neighborhood of the jet, the disintegration ceases. It is, moreover, necessary for the electrification to be feeble, for a powerful charge causes the disintegration to proceed more rapidly. I believe that Lord Rayleigh considers that this phenomenon cannot be completely explained by ordinary mechanical methods, but is mainly due to the fact that the electrification causes the drops to coalesce instead of rebounding upon collision. At the same time very little complication is introduced into the work by supposing the jet to be electrified, and the results are instructive, as they give information as to the effect which a charge is likely to produce. We shall find that the charge tends to produce stability or instability according as the ratio of the circumference of the jet to the wave-length of the disturbance is less or greater than .6.

8. We shall suppose throughout that the jet consists of a straight cylindrical column of liquid, and that the disturbance is symmetrical with respect to the axis. Taking the axis of the jet as the direction of the axis of z , and measuring

* Proc. Lond. Math. Soc., Vols. X, XI and XIX.

† Phil. Mag., Aug., 1892.

r perpendicularly to it, the motion can be determined by Stokes' current function, which, in the case of a viscous liquid, satisfies the equation

$$\left(\nu D - \frac{d}{dt}\right) D\psi = \left(u \frac{d}{dr} + w \frac{d}{dz} - \frac{2u}{r}\right) D\psi, \quad (1)$$

where

$$D = \frac{d^2}{dz^2} + \frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr}$$

and

$$u = -\frac{1}{r} \frac{d\psi}{dz}, \quad w = \frac{1}{r} \frac{d\psi}{dr}. \quad (2)$$

When the motion is undisturbed, $w = W$, where W is the constant velocity of the jet; whence, from the second of (2),

$$\psi = \frac{1}{2} W r^2,$$

which is readily seen to be a solution of (1):

Let ψ' be the portion of ψ which depends upon the disturbed motion, so that

$$\psi = \frac{1}{2} W r^2 + \psi'.$$

Substituting in (1) and neglecting all quadratic terms which depend *solely* upon the disturbed motion, we obtain

$$\left(\nu D - \frac{d}{dt} - W \frac{d}{dz}\right) D\psi' = 0. \quad (3)$$

In order to obtain a solution which represents wave-motion, we assume that z and t enter in the form of the factor e^{ms+kt} , whence if

$$\alpha^2 = m^2 + (k + imW)/\nu \quad (4)$$

(3) becomes

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - m^2\right) \left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \alpha^2\right) \psi' = 0, \quad (5)$$

the solution of which is

$$\psi' = \chi_1 + \chi_2,$$

where

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \chi_1}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d\chi_1}{dr} - m^2 \chi_1 &= 0, \\ \frac{d^2 \chi_2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d\chi_2}{dr} - \alpha^2 \chi_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

In the first of (6) write $\chi_1 = r\phi$, and the equation for ϕ becomes

$$\frac{d^2 \phi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr} - \left(m^2 + \frac{1}{r^2}\right) \phi = 0.$$

The solution of this equation is

$$\phi = AI_1(mr) + BK_1(mr),$$

where I_1, K_1 are the two associated Bessel's functions of order unity, and are connected with the functions of order zero by the equations

$$I'_0 = I_1, \quad K'_0 = K_1, \quad (7)$$

where the accent denotes differentiation with respect to the argument mr . These functions are discussed in §§266–269 of my *Hydrodynamics*, and also in Chapter XIX of Lord Rayleigh's treatise on *Sound*.

The function $I_0(x)$ is expressible in the form of the series

$$I_0(x) = 1 + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots, \quad (8)$$

whence

$$I_1(x) = \frac{x}{2} + \frac{x^3}{2^2 \cdot 4} + \frac{x^5}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6} + \dots \quad (9)$$

whilst the function $K_0(x)$ can be expressed by means of either of the series

$$K_0(x) = (\gamma + \log \frac{1}{2}x) I_0(x) - \frac{x^2}{2^2} S_1 - \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} S_2 - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} S_3 - \dots, \quad (10)$$

$$\text{or} \quad K_0(x) = -\left(\frac{\pi}{2x}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-x} \left\{ 1 - \frac{1^2}{1 \cdot 8x} + \frac{1^2 \cdot 3^2}{1 \cdot 2(8x)^2} - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{1 \cdot 2 \cdot 3(8x)^3} - \dots \right\}, \quad (11)$$

where γ is Euler's constant, which is equal to .5772 , and

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

Since the I functions are finite when $x=0$, they are suitable for space inside a cylinder; on the other hand the K functions are infinite when $x=0$ and zero when $x=\infty$, and are therefore suitable for space outside. It therefore follows that the proper value of ψ is

$$\psi = r \{ AI_1(mr) + CI_1(\alpha r) \} e^{\epsilon' m s + k t} + \frac{1}{2} W r^2. \quad (12)$$

In taking account of the influence of the surrounding atmosphere we shall neglect its compressibility and viscosity; whence, if ψ_1 be the current function,

$$D\psi_1 = 0$$

and

$$\psi_1 = BrK_1(mr) e^{\epsilon' m s + k t}. \quad (13)$$

The hydrodynamical equations for the pressure are

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} + W \frac{du}{dz} &= -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} + \nu \left(\nabla^2 u - \frac{u}{r^2} \right), \\ \frac{dw}{dt} + W \frac{dw}{dz} &= -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} + \nu \nabla^2 w.\end{aligned}$$

The first of these equations may be written

$$\begin{aligned}\frac{\imath m}{r} (k + \imath m W) \psi' &= \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} + \imath m \nu \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} - m^2 \right) \frac{\psi'}{r} \\ &= \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} + \frac{\imath m \nu}{r} \left(\frac{d^2 \psi'}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d\psi'}{dr} - m^2 \psi' \right),\end{aligned}$$

whence

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} = \frac{\imath m \nu}{r} (\alpha^2 - m^2) \chi_1$$

and

$$p = \imath \rho (k + \imath m W) A I_0(mr) + \text{const.}, \quad (14)$$

which can also be shown to satisfy the second equation.

In the same way the pressure of the air can be shown to be

$$p_1 = \imath \rho_1 k B K_0(mr) + \text{const.} \quad (15)$$

9. We must now consider the boundary conditions.

Let the equation of the surface of separation be

$$a + c e^{\imath m s + k t} - r = F = 0, \quad (15A)$$

then the kinematical condition at this surface is

$$\frac{dF}{dt} - \frac{1}{r} \frac{d\psi}{dz} \frac{dF}{dr} + \frac{1}{r} \frac{d\psi}{dr} \frac{dF}{dz} = 0. \quad (16)$$

Applying this to the jet we obtain

$$c = -\frac{\imath m \{A I_1(ma) + O I_1(aa)\}}{k + \imath m W}. \quad (17)$$

Applying (16) to the surrounding atmosphere we get

$$c = -\frac{\imath m B K_1(ma)}{k}. \quad (18)$$

The dynamical condition of zero tangential stress gives

$$\frac{dw}{dz} + \frac{dw}{dr} = 0,$$

or

$$\frac{d^2\psi'}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d\psi'}{dr} + m^2\psi' = 0,$$

or

$$2m^2\chi_1 + (\alpha^2 + m^2)\chi_2 = 0,$$

and therefore

$$2m^2 AI_1(ma) + (\alpha^2 + m^2) CI_1(\alpha a) = 0. \quad (19)$$

To find the remaining boundary condition, let V be the potential of the induced charge; then the resultant force which acts *outward* on an element of the jet is

$$-\frac{1}{2} \sigma \frac{dV}{dr} = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{dV}{dr} \right)^2,$$

also the portion due to surface tension measured outwards is

$$-T \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{a} \right),$$

where ρ_1 is the radius of curvature of the meridian section of the disturbed surface, and ρ_2 the corresponding quantity for the perpendicular section. If therefore we consider the equilibrium of a film of the disturbed surface, the required condition is easily seen to be

$$P + p_1 + T \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{a} \right) = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{dV}{dr} \right)^2. \quad (20)$$

Now

$$\begin{aligned} P &= -p + 2\mu \frac{du}{dr} \\ &= -p - 2\mu m\nu \frac{d}{dr} \left(\frac{\psi'}{r} \right). \end{aligned}$$

Substituting the value of p from (14) and the value of ψ' from (12), and recollecting that

$$I_1(x) = I_0'' = -\frac{I_1}{x} + I_0,$$

we obtain

$$\begin{aligned} P &= -\rho(k + mW + 2m^2\nu) AI_0(ma) + 2\mu m\nu a^{-1} AI_1(ma) \\ &\quad - 2\mu m\nu a^{-1} \{ \alpha a I_0(\alpha a) - I_1(\alpha a) \} C + \text{const.}, \end{aligned} \quad (21)$$

the exponential term being omitted for brevity.

Again, from (15A),

$$\frac{1}{\rho_1} = -\frac{d^3 r'}{dz^3} = m^2 c,$$

$$\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{a} = \frac{1}{a+c} - \frac{1}{a} = -\frac{c}{a^2},$$

whence the surface tension term becomes

$$T(m^2 a^2 - 1) c / a^2. \quad (22)$$

The value of V is

$$V = -2E \log r + \frac{FK_0(mr)}{K_0(ma)} e^{\epsilon^{ma} + \kappa},$$

where E is the charge on the undisturbed jet per unit of length, and F is a constant to be determined from the condition that V is constant when r is given by (15A). Dropping the exponential factor, this condition gives

$$F = 2Ec/a,$$

whence at the surface

$$-\frac{dV}{dr} = \frac{2E}{a+c} - \frac{2Ec}{a^2} \frac{maK'_0(ma)}{K_0(ma)},$$

and therefore

$$\left(\frac{dV}{dr}\right)^2 = \frac{4E^2}{a^2} - \frac{4E^2 c}{a^3} \left\{1 + \frac{maK'_0(ma)}{K_0(ma)}\right\}. \quad (23)$$

Substituting from (21), (15), (22) and (23) in (20), and equating to zero the coefficients of the omitted exponential term, we finally obtain

$$\begin{aligned} & -\varphi(k + \epsilon m W + 2m^2 \nu) AI_0(ma) + 2\varphi m \nu a^{-1} AI_1(ma) \\ & - 2\varphi m \nu a^{-1} C \{a \dot{a} I_0(aa) - I_1(aa)\} + \varphi_1 k B K_0(ma) \\ & + T(m^2 a^2 - 1) c / a^2 + \frac{E^2 c}{4\pi a^3} \left\{1 + \frac{maK'_0(ma)}{K_0(ma)}\right\} = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

The elimination of the four constants A , C , B and c between (17), (18), (19) and (24) furnishes the required equation for determining k . The result of the elimination gives the following equation for k :

$$\begin{aligned} & (k + \epsilon m W + 2m^2 \nu)^2 \frac{I_0(ma)}{mI_1(ma)} - \frac{2\nu}{a} (k + \epsilon m W + 2m^2 \nu) \\ & - 4m^2 \nu^2 a \frac{I_0(aa)}{I_1(aa)} + \frac{4m^2 \nu^2}{a} - \frac{k^2 \rho_1 K_0(ma)}{\rho m K_1(ma)} + \frac{T(m^2 a^2 - 1)}{\rho a^2} \\ & + \frac{E^2}{4\pi \rho a^3} \left\{1 + \frac{maK'_1(ma)}{K_0(ma)}\right\} = 0, \end{aligned} \quad (25)$$

where ρ_2 denotes the density of the atmosphere.

10. We shall now discuss this equation when the viscosity is so small that powers of ν above the first may be neglected.

Let $q = k + imW$, $x = ma$; then from (4) it follows that $\alpha = (q/\nu)^{\frac{1}{2}}$ approximately, provided the wave-length is not so small that m^2 is comparable with q/ν . Equation (25) may now be written

$$\frac{q^2 I_0(x)}{x I_1(x)} + \frac{2\nu}{a^2} \left\{ \frac{2x I_0(x)}{I_1(x)} - 1 \right\} q + \frac{4m^2 \nu^2}{a^2} \left\{ \frac{x I_0(x)}{I_1(x)} - \frac{a \alpha I_0(a \alpha)}{I_1(a \alpha)} \right\} \\ - \frac{k^2 \rho_1 K_0(x)}{\rho x K_1(x)} + \frac{T(x^2 - 1)}{\rho a^3} + \frac{E^2}{4\pi \rho a^3} \left\{ 1 + \frac{x K_1(x)}{K_0(x)} \right\} = 0. \quad (26)$$

Now if α be very large,

$$I_0(\alpha) = D \varepsilon^2 \alpha^{-\frac{1}{2}} \left\{ 1 + \frac{1}{2.4\alpha} + \frac{1^2.3^2}{2.4.(4\alpha)^2} + \dots \right\},$$

from which it follows that the limit of I_0/I_1 when $\alpha = \infty$ is unity. The third term of (26) accordingly does not involve any lower power of ν than ν^2 , and may therefore be neglected.

11. We shall now consider the effect of the last three terms of (26) *separately*.

(i). When T and E are zero, (26) may be written in the form

$$\frac{k^2}{\rho} \left\{ \frac{\rho I_0(x)}{x I_1(x)} - \frac{\rho_1 K_0(x)}{x K_1(x)} \right\} + \frac{2\nu k}{a^2} \left\{ \frac{2x I_0(x)}{I_1(x)} - 1 \right\} + \frac{2iWk I_0(x)}{x I_1(x)} - \frac{W^2 I_0(x)}{x I_1(x)} = 0. \quad (27)$$

Now I_0 and I_1 are always positive, but the quantity K_0/K_1 is always negative, whence the coefficient of k^2 must be positive; also from the series for I_0, I_1 it follows that the second term of (27) is also positive, whilst the last term is negative; whence the roots of (27) must be of the form $p(1 + i\beta)$, $\gamma(1 - i\beta)$, where the two quantities p and γ are of opposite sign. Hence the real part of one of the values of k is positive, and therefore the motion is unstable.

(ii). The fifth term of (26) depends upon the surface tension. If x is greater than unity, this term is positive, and consequently the real part of k must be negative and the motion is stable. If the liquid is supposed to be frictionless, so that ν is absolutely zero, we fall back on the case discussed by Lord Rayleigh, in which it is shown that the motion of a jet will be stable or unstable according as the ratio of its circumference to the wave-length of the disturbance is greater or less than unity.

When $x < 1$, the fifth term of (26) is negative, and consequently one value

of k must be positive; but in order to examine the case of values of x which are very slightly less than unity, it would be necessary to take into account the third term of (26) which has been neglected. This would be troublesome, but there is little doubt that its effect would be found to be that motion for which x is slightly less than unity would be stable; in other words, the effect of viscosity would be to render the liquid less unstable than if it were frictionless.

(iii). We must next consider the electrical term.

The functions $K_0(x)$ and $xK_1(x)$ have been tabulated by Lord Rayleigh.* From this table it appears that $K_0(x)$ is equal to $-\infty$, $-.9244$, and $-.7774$ for $x = \infty$, $.5$ and $.6$ respectively, whilst the corresponding values of $xK_1(x)$ are 1 , $.8283$ and $.7817$. From these figures we see that xK_1/K_0 is zero when $x = 0$, and becomes equal to -1 for a value of x which is slightly less than $.6$. Accordingly for disturbances whose wave-length is large in comparison with the circumference of the jet, the charge tends to produce stability, but for disturbances of short wave-length the charge tends to produce instability.

(iv). The effect of a very small viscosity considered by itself is to produce stability, for in this case one value of q is zero, whilst the other is

$$q = -\frac{2\nu x^2}{a^2} \left\{ 2 - \frac{I_1(x)}{xI_0(x)} \right\}.$$

The conclusions that we draw from the preceding analysis are the following. Viscosity tends to produce stability; the influence of the surrounding air tends to produce instability; the surface tension tends to produce stability or instability, according as the ratio of the circumference of the jet to the wave-length is greater or less than unity; the electrical charge tends to produce stability or instability according as the above ratio is less or greater than $.6$.

These results do not entirely explain why it is that a very *slight* charge produces stability, and it must be admitted that the phenomena which are actually observed depend upon some cause of which account has not been taken, but the results do appear to give a satisfactory explanation of why it is that a large charge produces instability, for the charge produces instability for wave-lengths for which $x > .6$, and when it is sufficiently great its effect will overcome the steadying effects of viscosity and also of surface tension.

The effect of a large viscosity has been discussed by Lord Rayleigh, so that it is unnecessary to say anything upon this point.

* Phil. Mag., Aug., 1892, p. 179. His $\phi(x)$ and $\psi(x)$ correspond to my $K_0(x)$ and $K_1(x)$.

Sur l'inversion des intégrales de fonctions à multiplicateurs.

PAR M. ÉMILE PICARD.

Dans le chapitre VI de mon mémoire sur les fonctions algébriques de deux variables indépendantes (Journal de Mathématiques, 1889) je me suis occupé incidemment (paragr. 1, 2, 3, 5, 6) d'une généralisation des intégrales abéliennes relatives à une courbe algébrique. Etant donnée la relation algébrique :

$$f(x, y) = 0$$

j'ai considéré parmi les expressions de la forme :

$$u = \int^{(x, y)} e^{\int \lambda(x, y) dx} dx, \quad (1)$$

($\lambda(x, y)$ étant une fonction rationnelle de x et y), celles qui, en tout point de la surface de Riemann correspondant à f , n'ont d'autres singularités que des pôles ou des infinis logarithmiques ; la nature des singularités est ainsi absolument la même que dans les intégrales abéliennes relatives à la courbe f .

M. Appell faisait au même moment l'étude approfondie des expressions (1) dans son grand mémoire sur les fonctions à multiplicateurs (Acta Mathematica, tome XIII).

Je m'étais posé, relativement à l'équation (1), la question suivante (paragr. 5 et 6) : *Dans quel cas une équation de la forme (1), le second membre étant de la nature indiquée, donnera-t-elle pour x et y des fonctions uniformes de u ?*

Je suis arrivé à la conclusion que la courbe devait être du genre zéro ou du genre un. Comme la démonstration de ce théorème n'est que succinctement esquissée dans mon mémoire, je crois intéressant de la reprendre avec plus de détails. On voit que ce théorème comprend comme cas particulier la proposition

déduite autrefois par M. Hermite des recherches de Briot et Bouquet sur l'inversion des intégrales abéliennes, à savoir que l'inversion d'une intégrale abélienne

$$\int R^{(x,y)}(x, y) dx = u$$

ne peut donner pour x et y des fonctions uniformes de u , que si la courbe f est de genre *zéro* ou *un*.

Au lieu de se borner aux expressions (1) n'ayant que des pôles et des infinis logarithmiques, on peut d'une manière générale considérer les expressions (1), en supposant seulement bien entendu qu'elles sont sans singularités essentielles, et se poser à leur égard la même question que plus haut. La réponse est la même, comme nous le montrons à la fin de ce mémoire.

I.

1. Commençons par faire l'étude des expressions u définies plus haut, en la réduisant à ce qui sera indispensable pour notre démonstration. Nous supposons, comme d'habitude, que la courbe f n'a que des points doubles et a ses directions asymptotiques distinctes; m désignera son degré.

L'expression u peut avoir des pôles et des infinis logarithmiques. Il est évidemment permis de supposer que ces points ne se trouvent ni à l'infini, ni en un point double, ni en un point de ramification de la surface de Riemann correspondant à la fonction algébrique y de x , car il est possible d'effectuer préalablement une transformation birationnelle convenable pour éviter ces circonstances. De plus, on peut aussi admettre que la fonction $\lambda(x, y)$ reste finie en chacun des points doubles, pour la même raison que plus haut, mais on ne peut faire ici aucune hypothèse relativement aux points de ramification.

Cela dit, envisageons les infinis de $\lambda(x, y)$. Soit d'abord (a, b) un infini qui ne soit pas un point de ramification, c'est à dire que $f'_b(a, b) \neq 0$. Le point a sera un pôle de $\lambda(x, y)$, et son résidu devra être un entier positif ou négatif, pour que le point a soit un point ordinaire, un pôle, ou un infini logarithmique de la fonction u . Désignons par k le nombre des points (a, b) et appelons

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k,$$

les résidus (entiers positifs ou négatifs) correspondant à ces différents points.

Considérons maintenant un point de ramification (x_1, y_1) de la surface de Riemann, rendant λ infini. On a

$$y - y_1 = H\sqrt{x - x_1} + \dots \quad (H \neq 0).$$

Donc $\lambda(x, y)$ se développera suivant les puissances de $(x - x_1)^{\frac{1}{2}}$, et pour que le point (x_1, y_1) de la surface de Riemann soit un point ordinaire pour u , on doit avoir pour $\lambda(x, y)$ le développement

$$\lambda(x, y) = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{B_1}{(x - x_1)^{\frac{1}{2}}} + C_1 + \dots,$$

A_1 étant de la forme $\frac{\mu_1}{2}$, μ_1 étant un entier au moins égal à -1 .

Il nous reste à parler des points à l'infini qui sont, par hypothèse, comme les précédents, des points ordinaires pour u . Sur un quelconque des m feuillets, nous devrons avoir, pour x très grand, un développement de la forme

$$\lambda(x, y) = \frac{R}{x} + \frac{R'}{x^2} + \dots,$$

R étant un entier au plus égal à -2 . Pour chaque feuillet on aura un nombre R .

Ainsi nous avons trois catégories d'entiers

$$\alpha, \mu, R.$$

Comme il est bien connu, on a entre eux la relation

$$\Sigma \alpha + \Sigma \mu = \Sigma R \quad (2)$$

en écrivant que

$$\int \lambda(x, y) dx = 0,$$

l'intégrale étant prise le long du contour fermé rendant la surface simplement connexe, contour classique dans la théorie des surfaces de Riemann.

2. Les expressions u que nous étudions, se partagent naturellement en fonctions de première espèce, de seconde espèce, et de troisième espèce. Les fonctions de première espèce restent toujours finies, celles de seconde espèce n'ont sur la surface de Riemann d'autres infinis que des pôles, enfin il y a des infinis logarithmiques pour les fonctions de troisième espèce.

On voit immédiatement à quelles conditions l'expression (1) sera une fonction de première espèce. Tous les entiers α doivent être positifs, afin que le point (a, b) ne soit pas un pôle ou un infini logarithmique.

II.

3. Nous pouvons maintenant aborder la démonstration du théorème énoncé. On va donc supposer que l'inversion de l'expression (1) donne pour x et y des

fonctions uniformes de u , et on veut démontrer que la courbe sera du genre zéro ou du genre un.

4. Ecrivons de nouveau la relation

$$\int^{(x,y)} e^{\int \lambda(x,y) dx} dx = u.$$

Supposons d'abord que le premier membre soit une fonction de première espèce. Il est immédiat qu'il ne peut y avoir pour $\lambda(x, y)$ de pôles (a, b) , car le développement de u suivant les puissances croissantes $(x - a)$ est de la forme

$$u = u_0 + O(x - a)^{\alpha+1} + \dots$$

et l'inversion ne peut conduire à une fonction uniforme que si $\alpha = 0$. Tous les nombres α sont donc nuls, et on a alors, d'après la relation (2),

$$\Sigma \mu = \Sigma R. \quad (3)$$

Passons maintenant aux points (x_1, y_1) . Comme $y - y_1$ et $x - x_1$ doivent être des fonctions uniformes de u , il en sera de même de $\sqrt{x - x_1}$, et il en résulte de suite que tous les μ doivent être égaux à -1 . Ainsi le nombre μ correspondant à chacun des points de ramification doit être égal à -1 .

Il ne nous reste plus qu'à considérer les points à l'infini. On voit encore immédiatement que tous les R doivent avoir la valeur -2 .

Ainsi nous avons

$$\Sigma \mu = -[m(m-1) - 2d],$$

en désignant par d le nombre des points doubles de f , et de plus

$$\Sigma R = -2m.$$

La relation (3) donne donc

$$d = \frac{m(m-3)}{2}.$$

La courbe sera par suite du genre un, comme nous voulions l'établir.

Allons plus loin, en cherchant quelle sera alors la forme de l'expression u . Soient $\lambda(x, y)$ et $\lambda_1(x, y)$ deux fonctions rationnelles conduisant à une expression u qui satisfassent aux conditions que nous venons de trouver. La différence

$$\int^{(x,y)} [\lambda(x, y) - \lambda_1(x, y)] dx$$

sera une intégrale abélienne n'ayant pas d'infinis; elle se réduira donc à une intégrale de première espèce. Ainsi, quand on aura une fonction $\lambda(x, y)$ satisfaisant aux conditions, requises, on les obtiendra toutes bien facilement. Or, appelons v l'intégrale de première espèce de la courbe f de genre un ; l'intégrale v est une expression u , et on peut poser

$$v = \int \frac{dv}{dx} dx = \int e^{\int \frac{v''}{v'} dx} dx \quad \left(v' = \frac{dv}{dx}, v'' = \frac{d^2v}{dx^2} \right).$$

Une forme particulière de $\lambda(x, y)$ sera donc $\frac{v''}{v'}$, et sa forme générale sera par suite

$$\lambda(x, y) = \frac{v''}{v'} + av'$$

a étant une constante, et on a comme forme générale de u :

$$u = \int e^{av} \cdot v' dx.$$

Il en résulte que u se réduit, soit à l'intégrale de première espèce (pour $a = 0$), soit à

$$e^{av}$$

abstraction faite d'un facteur constant sans intérêt. Les fonctions inverses sont donc, soit des fonctions doublement périodiques de u , soit des fonctions doublement périodiques de la combinaison linéaire

$$A \log u + B,$$

A et B étant des constantes.

5. Nous avons supposé que u était de première espèce. Supposons la maintenant de seconde espèce. Nous allons montrer d'abord qu'elle ne peut avoir qu'un seul pôle. Supposons en effet que u ait sur la surface de Riemann deux pôles A et A' . Quand (x, y) s'approche de A , u augmente indéfiniment et inversement aux valeurs de u d'un module suffisamment grand correspond uniformément un certain domaine autour de A . Allons de A en A' par un chemin déterminé, d'ailleurs quelconque; u augmentera indéfiniment quand (x, y) se rapprochera de A' , et aux valeurs de u d'un module suffisamment grand correspondra uniformément un certain domaine autour de A' . A une même valeur de u suffisamment grande correspondront ainsi deux valeurs de (x, y) l'une dans le voisinage de A , l'autre dans le voisinage de A' , et il est clair qu'on

pourra passer de l'une à l'autre en faisant décrire à u un chemin convenable dans son plan, chemin qui correspondra au déplacement de (x, y) depuis la première valeur jusqu'à la seconde sans s'éloigner du chemin déterminé tracé plus haut arbitrairement entre A et A' . L'inversion ne donnera donc pas pour x et y des fonctions uniformes de u , si l'expression (1) a plus d'un pôle.

Le pôle unique est nécessairement compris parmi les points (a, b) , et l'inversion ne peut être uniforme que si la valeur de α correspondante est égale à -2 . L'inversion uniforme exige aussi qu'il n'y ait pas d'autres points (a, b) , pour la raison donnée au paragraphe précédent. Pareillement tous les nombres μ sont égaux à -1 et les nombres R à -2 . La relation (2) nous donne alors

$$-2 - [m(m-1) - 2d] = -2m$$

d'où l'on conclut

$$d = \frac{(m-1)(m-2)}{2}$$

c'est à dire que la courbe est unicursale.*

Puisqu'il n'y a pas de cycles, la fonction de u , qui est de seconde espèce, est une fonction rationnelle de x et y , et par suite du paramètre θ en fonction rationnelle duquel on peut exprimer x et y . Il est donc évident que x et y seront des fonctions rationnelles de u .

6. Supposons enfin que u soit une fonction de troisième espèce. Tout d'abord dans le voisinage d'un point a , la partie de u devenant infinie ne peut avoir une partie polaire et une partie logarithmique, car l'inversion ne pourrait dans ce cas être uniforme. Donc dans le voisinage d'un point (a, b) nous aurons :

$$A \log(x-a) + \dots = u, \quad (4)$$

la partie non écrite étant holomorphe en $x-a$.

Posons

$$u = u' + iu'', \quad x-a = \rho(\cos \theta + i \sin \theta), \quad A = \alpha + i\beta,$$

* On pourrait arriver à ce résultat sans commencer par établir qu'il n'y a qu'un seul pôle. Supposons en effet qu'il y ait λ pôles, on aurait :

$$-2\lambda - [m(m-1) - 2d] = -2m,$$

c'est à dire

$$d = \frac{m(m-1)}{2} + \lambda.$$

λ , s'il n'est pas nul, ne peut donc être égal qu'à l'unité, puisque d ne peut surpasser $\frac{m(m-1)}{2} + 1$.

on aura

$$\begin{aligned} u' &= \alpha \log \rho - \beta \theta + \dots, \\ u'' &= \beta \log \rho + \alpha \theta + \dots, \end{aligned}$$

les parties non écrites tendant vers des valeurs finies déterminées quand x tend vers a . On tire des deux égalités précédentes

$$\alpha u' + \beta u'' = (\alpha^2 + \beta^2) \log \rho + \dots$$

Donc quand x est suffisamment voisin de a , on a

$$\alpha u' + \beta u'' < 0$$

et, en désignant par γ une quantité positive suffisamment grande, on voit de suite qu'il y a, par la relation (4), une correspondance uniforme entre un cercle d'un rayon suffisamment petit décrit autour de a , et le demi plan défini dans le plan de u par l'inégalité:

$$\alpha u' + \beta u'' + \gamma < 0. \quad (5)$$

Ceci posé, on voit d'abord, en raisonnant comme au paragraphe précédent, que u ne peut avoir à la fois un pôle et un infini logarithmique, car au voisinage de ce dernier correspond un certain demi plan, tandis qu'au voisinage du pôle correspond tout le domaine du plan u où le module est suffisamment grand; ces deux régions ont une partie commune et par suite à une même valeur de u correspondraient deux valeurs de (x, y) .

Nous devons donc seulement examiner le cas où u aurait un ou plusieurs infinis logarithmiques; ces infinis seront des points (a, b) , et la valeur correspondante de α sera égale à -1 . D'ailleurs il n'y aura pas d'autres points (a, b) , car si un point (a, b) était un point ordinaire pour u , l'inversion ne se ferait pas d'une manière uniforme (déjà dit plus haut). On voit d'abord qu'il ne peut y avoir un seul point logarithmique. On devrait avoir en effet, d'après la relation (2)

$$-1 - [m(m-1) - 2d] = -2m$$

égalité impossible, puisqu'elle donne pour d un nombre qui n'est pas entier.

Peut-il y avoir pour u deux infinis logarithmiques. En désignant par des lettres accentuées les constantes se rapportant au second infini, on fera correspondre, comme il a été dit plus haut, au voisinage de ce second point un certain demi plan

$$\alpha' u' + \beta' u'' + \gamma' < 0. \quad (6)$$

Pour que l'inversion se fasse d'une manière uniforme, les demi-plans (5) et (6) ne doivent pas avoir de partie commune. Cette circonstance se présentera, si on a

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'}$$

c'est à dire si les deux droites limitant les demi-plans sont parallèles, et si de plus α et β sont respectivement de signes contraires à α' et β' , les constantes positives γ et γ' étant d'ailleurs suffisamment grandes. Rien ne s'oppose donc à ce qu'il y ait deux infinis logarithmiques, mais notre raisonnement va nous montrer qu'il ne peut y en avoir trois. En effet, le demi plan correspondant à ce troisième point aurait nécessairement une partie commune avec l'un ou l'autre des demi-plans précédents, et par suite l'inversion ne se ferait pas d'une manière uniforme. Pour abréger, nous ne montrons pas, comme plus haut, que les diverses valeurs de (x, y) se permuteraient bien entre elles, car il n'y a rien à changer à cette partie du raisonnement.

Il y a donc deux α égaux à -1 , et nous avons donc

$$-1 - 1 - [m(m-1) - 2d] = -2m,$$

d'où on conclut encore que la courbe est unicursale.*

Si on exprime x et y en fonctions rationnelles d'un paramètre θ , l'expression (1) sera alors ici une fonction de θ , holomorphe dans le voisinage de tout point du plan, sauf de deux points θ_0 et θ_1 qui sont des infinis logarithmiques; on aura donc

$$A \log \frac{\theta - \theta_0}{\theta - \theta_1} = u$$

et par suite x et y seront des fonctions rationnelles de e^u , a étant une constante. La démonstration est achevée. La courbe f est du genre zéro ou du genre un, et nous avons indiqué les formes très simples des fonctions x et y de u .

7. Comme nous l'avons remarqué au début, le théorème de M. Hermite relatif à l'inversion d'une intégrale abélienne

$$\int^{(x,y)} R(x, y) dx = u, \quad [f(x, y) = 0], \quad (7)$$

* On pourrait encore ici se dispenser de prouver à priori que le nombre des infinis logarithmiques est deux. En le désignant par λ , on aura

$$-\lambda - [m(m-1) - 2d] = -2m$$

ou

$$d = \frac{m(m-1)}{2} + \frac{\lambda}{2}.$$

Si donc λ n'est pas nul, on a $\lambda = 2$.

est un cas particulier de la proposition que nous venons d'établir. Mais ici la démonstration est encore plus simple, et on arrive ainsi de la manière la plus rapide et la plus rigoureuse aux résultats obtenus par Briot et Bouquet dans leur mémoire classique sur les équations de la forme $\phi\left(x, \frac{dx}{du}\right) = 0$. Aussi ne sera-t-il pas inutile de reprendre dans ce cas particulier la démonstration.

Si l'intégrale (7) est de première espèce, la courbe f est nécessairement de genre un , si x et y sont fonctions uniformes de u . C'est le cas le plus facile, où la démonstration ne présente aucune difficulté, puisqu'on a alors

$$R(x, y) = \frac{Q(x, y)}{f_y'},$$

$Q(x, y)$ désignant un polynome adjoint d'ordre $m - 3$. En dehors des points doubles, il y aurait des points de rencontre de $Q = 0$ avec f , si le genre de f dépassait l'unité, et par suite x cesserait d'être fonction uniforme de u . *Le genre de f est donc égal à un.* Les deux fonctions x et y sont doublement périodiques.

Si l'intégrale (7) est de seconde espèce, on peut supposer (paragr. 1) que ses pôles sont à distance finie et sont distinctes des points de ramification. Raisonnant alors comme au paragr. 5, nous montrons que u ne peut avoir qu'un seul pôle. Ce pôle simple de u sera pour $R(x, y)$ un pôle double. A l'infini, sur chacun des feuillets, on doit avoir un développement de la forme

$$R(x, y) = \frac{h}{x^2} + \frac{h'}{x^3} + \dots \quad (h \neq 0).$$

Ensuite $R(x, y)$ deviendra infinie aux points de ramification et en ces points seulement, de telle sorte que pour un point de ramification (x, y) , on aura :

$$R(x, y) = \frac{k}{\sqrt{x - x_1}} + k' + \dots \quad (k \neq 0).$$

Dans toute autre hypothèse en effet x et y ne pourraient être fonctions uniformes de u . Enfin $R(x, y)$ ne s'annulera que pour les points à l'infini.

Ceci posé, considérons l'intégrale

$$\int d \log R, \tag{8}$$

étendue à un contour rendant la surface simplement connexe. Cette intégrale est nulle, et comme on connaît les racines et les pôles de R , elle se calcule immédiatement, ce qui donne

$$-2 - [m(m-1) - 2d] = -2m.$$

C'est la relation du par. 5; on en conclut que *la courbe est unicursale*.

Il ne reste plus à examiner que le cas où u serait de troisième espèce. Le raisonnement du paragr. 6 montre que u a deux infinis logarithmiques; pour les points à l'infini, et pour les points de ramification la forme de $R(x, y)$ est la même que ci dessus. En prenant encore l'intégrale (8) le long du même contour, on a :

$$-1 - 1 - [m(m-1) - 2d] = -2m,$$

d'où se tire encore la même conclusion.

Quant à la forme des valeurs de x et y , elle s'obtient non moins facilement. Dans le cas où u est de seconde espèce, x et y sont fonctions rationnelles de u , et dans le cas où u est de troisième espèce, x et y sont fonctions rationnelles de e^u .

III.

8. Nous allons compléter, pour terminer, le théorème général démontré plus haut. Nous avons supposé que l'expression considérée

$$u = \int^{(x,y)} e^{\int \lambda(x,y) dx} dx,$$

n'avait sur la surface de Riemann que des pôles ou des infinis logarithmiques. Si on prend à priori une expression de cette forme, en supposant seulement qu'elle n'ait pas de singularités essentielles, on pourra avoir certains points (a, b) pour lesquels le résidu correspondant α (voir paragr. 1) n'est pas un entier. La fonction u n'est pas alors uniforme dans le voisinage de (a, b) et la singularité n'est pas de nature logarithmique. Dans quels cas l'inversion pourra-t-elle conduire pour x et y à des fonctions uniformes? Il faut évidemment que

$$\alpha + 1 = \frac{1}{h},$$

h étant un entier positif ou négatif.

Si nous voulons faire la discussion, nous distinguerons le cas où la fonction u reste toujours finie et celui où elle devient infinie.

Dans le premier cas, les nombres h seront positifs et finis ($h = 1$ étant évidemment exclu). Toutes les autres conditions restant les mêmes, nous obtiendrons en écrivant l'égalité

$$\Sigma \alpha + \Sigma \mu = \Sigma R$$

la relation suivante

$$\Sigma \left(-1 + \frac{1}{h} \right) - [m(m-1) - 2d] = -2m.$$

Ceci nous conduit à :

$$d = \frac{m(m-3)}{2} + \frac{1}{2} \Sigma \left(1 - \frac{1}{h} \right).$$

On voit que d surpasse $\frac{m(m-3)}{2}$, et par suite la courbe sera unicursale. Il faudra de plus que :

$$\Sigma \left(1 - \frac{1}{h} \right) = 2.$$

Désignons par λ le nombre des termes de la somme, on aura

$$\lambda - 2 = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \dots + \frac{1}{h_\lambda},$$

les h étant des entiers supérieurs à m . On a manifestement

$$\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \dots + \frac{1}{h_\lambda} \leq \frac{\lambda}{2},$$

donc $\lambda - 2 \leq \frac{\lambda}{2}$, c'est à dire $\lambda \leq 4$.

On doit par suite avoir, soit $\lambda = 3$, soit $\lambda = 4$.

Pour $\lambda = 3$, on a la relation

$$\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} = 1.$$

Pour $\lambda = 4$, on a

$$\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4} = 2.$$

Les solutions de ces équations en entiers positifs sont en nombre très limité ; il est sans intérêt de les transcrire, car nous verrons dans un moment que leur discussion a été faite sous une autre forme par Briot et Bouquet.

Passons au cas où u deviendrait infinie. Nous avons toujours

$$\alpha = -1 + \frac{1}{h},$$

h est un entier qui peut être négatif. Le cas de $h = \infty$ correspond à l'infini logarithmique, le cas de $h = -1$ au pôle, de telle sorte que tous les cas sont compris dans la formule précédente. Nous aurons encore :

$$d = \frac{m(m-3)}{2} + \frac{1}{2} \Sigma \left(1 - \frac{1}{h}\right).$$

La courbe sera donc encore unicursale.

Quant à la nature de x et y , nous l'obtiendrons de suite, en remarquant que, la courbe étant unicursale, on a pour u

$$u = \int e^{\int R(\theta) d\theta} \cdot R_1(\theta) d\theta,$$

R et R_1 étant rationnelles en θ . Comme il n'y a pas de singularités essentielles, nous aurons nécessairement

$$u = \int (\theta - \theta_1)^{a_1} (\theta - \theta_2)^{a_2} \dots (\theta - \theta_\lambda)^{a_\lambda} d\theta$$

et nous avons donc à chercher les cas où cette relation donne pour θ une fonction uniforme de u , problème classique depuis les recherches de Briot et Bouquet; nous en déduisons encore que x et y seront des fonctions doublement périodiques, des fonctions rationnelles de u , ou des fonctions rationnelles de e^{au} .

FLANVILLE (LORRAINE), le 25 *Septembre*, 1893.

***On Orthogonal Substitutions that can be expressed as
a Function of a Single Alternate (or Skew
Symmetric) Linear Substitution.***

BY HENRY TABER.

In Crelle's Journal, Vol. 32, Cayley gave an expression in terms of the minimum number of parameters for the general proper orthogonal substitution of N variables. Cayley's expression gives all proper orthogonal substitutions except those of which -1 is a latent root (root of the characteristic equation). In a paper read August 25, 1893, at the Mathematical Congress in Chicago, it was shown by the author that the positive or negative square of Cayley's expression gives every real proper orthogonal substitution of any number of variables,* and every imaginary proper orthogonal substitution of two, three, four, or six variables. Imaginary proper orthogonal substitutions of five, or of more than six variables, are not all given by the positive or negative square of Cayley's expression. Thus the proper orthogonal substitution of five variables, whose matrix is

$$\begin{pmatrix} 1, & 0, & 0, & 0, & 0, \\ 0, & -1-\frac{1}{2}, & \frac{1}{2}\sqrt{-1}, & 0, & \sqrt{-1}, \\ 0, & \frac{1}{2}\sqrt{-1}, & -\frac{1}{2}, & 0, & 1, \\ 0, & 0, & 0, & -1, & 0, \\ 0, & -\sqrt{-1}, & -1, & 0, & -1, \end{pmatrix}$$

cannot be expressed in this way.

I find that the positive or negative square of Cayley's expression gives all orthogonal substitutions or matrices that can be expressed as a rational polynomial in powers of a single alternate or skew symmetric matrix.† In the paper

* Cf. Proc. Am. Acad. Arts and Scs., Vol. XXVI, p. 212.

† This includes not only all orthogonal substitutions that are rational integral functions of a single alternate or skew symmetric matrix, but also all orthogonal matrices which are rational functions of a single skew symmetric matrix (as those which are given by Cayley's expression), and all orthogonal matrices which can be expressed as a convergent power series in a single skew symmetric matrix. For the two latter classes of functions can be reduced to rational polynomials in powers of the skew symmetric matrix by the identical equation to that matrix.

above referred to, it was shown that every orthogonal matrix is given by the positive or negative square of Cayley's expression except those of which both ± 1 are latent roots.* For such orthogonal matrices the theorem is therefore to be proved. The theorem may be proved as follows:

1. Let ϕ be any orthogonal matrix whose distinct latent roots are $g_0 = 1$, $g_s = -1$, and g_r, g_r^{-1} , for $r = 1, 2, \dots, \mu$. Corresponding, severally and respectively, to the distinct latent roots of ϕ are certain rational integral functions of ϕ , which I term the principal auxiliary functions of ϕ . The principal auxiliary functions of ϕ corresponding respectively to the distinct latent roots

$$+1, -1, g_r, g_r^{-1}, \quad (r = 1, 2, \dots, \mu),$$

will be denoted by

$$\Phi_0, \Phi_s, \Phi_r, \Phi_r', \quad (r = 1, 2, \dots, \mu).$$

These functions are formed as follows. If the identical equation to ϕ is

$$(\phi - 1)^{m_0}(\phi + 1)^{m_s}(\phi - g_1)^{m_1}(\phi - g_1^{-1})^{m_1} \dots = 0,$$

and if

$$\Gamma_0(g_s) = \frac{[(\phi - 1)^{m_0} - (g_s - 1)^{m_s}]^{m_s} [(\phi - 1)^{m_0} - (g_s^{-1} - 1)^{m_s}]^{m_s}}{[(g_s - 1)(g_s^{-1} - 1)]^{m_s m_s}},$$

$$\Gamma_s(g_s) = \frac{[(\phi + 1)^{m_s} - (g_s + 1)^{m_s}]^{m_s} [(\phi + 1)^{m_s} - (g_s^{-1} + 1)^{m_s}]^{m_s}}{[(g_s + 1)(g_s^{-1} + 1)]^{m_s m_s}},$$

$$\Gamma_r(g_s) = \frac{[(\phi - g_r)^{m_r} - (g_s - g_r)^{m_r}]^{m_r} [(\phi - g_r)^{m_r} - (g_s^{-1} - g_r)^{m_r}]^{m_r}}{[(g_s - g_r)(g_s^{-1} - g_r)]^{m_r m_r}},$$

then

$$\Phi_0 = (-1)^{m_s(m_s+1)} \frac{[(\phi - 1)^{m_0} - (-1 - 1)^{m_0}]^{m_s}}{2^{m_0 m_s}} \Gamma_0(g_1) \Gamma_0(g_2) \dots \Gamma_0(g_\mu),$$

$$\Phi_s = (-1)^{m_0} \frac{[(\phi + 1)^{m_s} - (1 + 1)^{m_s}]^{m_0}}{2^{m_0 m_s}} \Gamma_s(g_1) \Gamma_s(g_2) \dots \Gamma_s(g_\mu),$$

and for $r = 1, 2, \dots, \mu$,

$$\begin{aligned} \Phi_r = & (-1)^{m_s + m_s(m_r+1)} \frac{[(\phi - g_r)^{m_r} - (1 - g_r)^{m_r}]^{m_0}}{(1 - g_r)^{m_r m_0}} \frac{[(\phi - g_r)^{m_r} - (-1 - g_r)^{m_r}]^{m_s}}{(1 + g_r)^{m_r m_s}} \\ & \times \Gamma_r(g_1) \Gamma_r(g_2) \dots \Gamma_r(g_{r-1}) \Gamma_r(g_{r+1}) \dots \Gamma_r(g_\mu). \end{aligned}$$

The function Φ_r' is obtained from Φ_r by substituting throughout in the expression for the latter g_r^{-1} for g_r .

The binary products of different functions all vanish; moreover,

$$\Phi_0^2 = \Phi_0, \quad \Phi_s^2 = \Phi_s,$$

* The latent roots of a matrix are the roots of its characteristic equation. The term "latent root" is Sylvester's.

and for $r = 1, 2, \dots, \mu$,

$$\Phi_r^2 = \Phi_r, \quad \Phi_r'^2 = \Phi_r'.$$

We also have

$$1 = \Phi_0 + \Phi_e + \Phi_1 + \Phi_1' + \Phi_2 + \Phi_2' + \dots$$

and

$$(\phi - 1)^{m_0} \Phi_0 = 0,$$

$$(\phi + 1)^{m_e} \Phi_e = 0,$$

$$(\phi - g_r)^{m_r} \Phi_r = 0,$$

$$(\phi - g_r^{-1})^{m_r} \Phi_r' = 0,$$

$$r = 1, 2, \dots, \mu.$$

The matrices Φ_0 and Φ_e are symmetric, and Φ_r' is the transverse (or conjugate) of Φ_r .

2. Let θ be an alternate or skew symmetric matrix; and let the distinct latent roots of θ other than zero be $h_r, h_{\nu+r} = -h_r$, for $r = 1, 2, \dots, \nu$. The principal auxiliary function of θ corresponding to h_r will be denoted by Θ_r , and that corresponding to $h_{\nu+r}$ by $\Theta_{\nu+r}$.

We have for $r, s = 1, 2, \dots, \nu$,

$$\Theta_r \Theta_{\nu+s} = 0,$$

and if $r \neq s$,

$$\Theta_r \Theta_s = 0.$$

Moreover,

$$\Theta_r^2 = \Theta_r, \quad \Theta_{\nu+r}^2 = \Theta_{\nu+r}, \quad (r = 1, 2, \dots, \nu).$$

The transverse of Θ_r is $\Theta_{\nu+r}$.

If zero is a latent root of θ , the principal auxiliary function of θ corresponding to zero will be denoted by Θ_0 , and we have

$$\Theta_0 \Theta_r = 0, \quad \Theta_0 \Theta_{\nu+r} = 0, \quad (r = 1, 2, \dots, \nu)$$

and

$$\Theta_0^2 = \Theta_0.$$

The matrix Θ_0 is symmetric.

If zero is not a latent root of θ , and if the identical equation to θ is

$$\begin{aligned} & (\theta^2 - h_1^2)^{n_1} (\theta^2 - h_2^2)^{n_2} \dots (\theta^2 - h_\nu^2)^{n_\nu} \\ & = (\theta - h_1)^{n_1} (\theta - h_{\nu+1})^{n_1} (\theta - h_2)^{n_2} (\theta - h_{\nu+2})^{n_2} \dots (\theta - h_\nu)^{n_\nu} (\theta - h_{2\nu})^{n_\nu} = 0, \end{aligned}$$

then, for $r = 1, 2, \dots, \nu$,

$$\Theta_r = \frac{[(\theta - h_r)^{n_r} - (-h_r - h_r)^{n_r}]^{n_r}}{(2h_r)^{n_r n_r}} G_r(h_1) G_r(h_2) \dots G_r(h_{r-1}) G_r(h_{r+1}) \dots G_r(h_\nu),$$

in which

$$G_r(h_s) = \frac{[(\theta - h_r)^{n_r} - (h_s - h_r)^{n_r}]^{n_s} [(\theta - h_r)^{n_r} - (-h_s - h_r)^{n_r}]^{n_s}}{(h_r^2 - h_s^2)^{n_r n_s}}.$$

On the other hand, if zero is a latent root of θ , and if the identical equation to θ is

$$\theta^{n_0} (\theta^2 - h_1^2)^{n_1} (\theta^2 - h_2^2)^{n_2} \dots (\theta^2 - h_r^2)^{n_r} = 0,$$

then

$$\Theta_r = (-1)^{n_0(n_r+1)} \frac{[(\theta - h_r)^{n_r} - (-h_r)^{n_r}]^{n_0}}{h_r^{n_r n_0}} \cdot \frac{[(\theta - h_r)^{n_r} - (-h_r - h_r)^{n_r}]^{n_r}}{(2h_r)^{n_r n_r}} \\ \times G_r(h_1) G_r(h_2) \dots G_r(h_{r-1}) G_r(h_{r+1}) \dots G_r(h_r).$$

And if

$$G(h_s) = (-1)^{n_0 n_s} \frac{[\theta^{n_0} - h_s^{n_0}]^{n_s} [\theta^{n_0} - (-h_s)^{n_0}]^{n_s}}{h_s^{2n_0 n_s}},$$

then

$$\Theta_0 = G(h_1) G(h_2) \dots G(h_r).$$

The function Θ_{r+r} is obtained from Θ_r by substituting throughout in the latter $h_{r+r} = -h_r$ for h_r .

3. Let ϕ be any function of θ which, by means of the identical equation to θ , can be expressed as a finite polynomial in integer powers of θ ; thus, let

$$\phi = f(\theta) = A\theta^n + B\theta^{n-1} + \dots + K\theta + L.$$

Then

1). If g is a latent root of ϕ , there is one or more latent roots of θ satisfying the equation

$$f(x) - g = 0.$$

If h is a latent root of θ and satisfies this equation, it may be said to belong to g .

2). If g and h are latent roots of ϕ and θ respectively, and if

$$f(h) - g = 0,$$

then

$$f(-h) - g^{-1} = 0.$$

That is, if h is a latent root of θ belonging to the latent root g of ϕ , then the latent root $-h$ of θ belongs to the latent root g^{-1} of ϕ .

3). If g is a latent root of ϕ , the multiplicity of g is equal to the sum of the multiplicities of the latent roots of θ which satisfy the equation

$$f(x) - g = 0,$$

i. e. which belong to g .

4). If g is a latent root of ϕ , and if h_α, h_β , etc., comprise all the latent roots of θ which satisfy the equation

$$f(x) - g = 0,$$

then the principal auxiliary function of ϕ corresponding to g is equal to the sum of the principal auxiliary functions of θ corresponding to h_α, h_β , etc., namely, to

$$\Theta_\alpha + \Theta_\beta + \dots$$

That is, if g is a latent root of ϕ , the auxiliary function of ϕ corresponding to g is equal to the sum of the principal auxiliary functions of θ corresponding to the latent roots of θ belonging to g .

4. From 2) it follows that if zero is a latent root of θ , it belongs either to ± 1 , i. e. it is either a root of the equation

$$f(x) - 1 = 0,$$

or of

$$f(x) + 1 = 0.$$

Assume either, that zero is not a latent root of θ , or if zero is a latent root of θ , that $f(0) = 1$ (i. e. that zero belongs to $+1$), and let h_α, h_β , etc., be roots of the equation $f(x) + 1 = 0$; then by 2) $-h_\alpha, -h_\beta$, etc., are also roots of this equation. If, therefore, α', β' , etc., denote, respectively, the smallest positive residue (modulus ν) of α, β , etc., by 4),

$$\Phi_\epsilon = \Theta_{\alpha'} + \Theta_{\nu+\alpha'} + \Theta_{\beta'} + \Theta_{\nu+\beta'} + \dots$$

5. In the paper by the author above referred to it was shown that if

$$\begin{aligned} \psi_1 &= [1 + c_1(\phi - 1) + c_2(\phi - 1)^2 + \dots + c_{m_0-1}(\phi - 1)^{m_0-1}] \Phi_0 \\ &+ \sqrt{-1} \left[1 + c_1 \left(\frac{\phi + 1}{-1} \right) + c_2 \left(\frac{\phi + 1}{-1} \right)^2 + \dots + c_{m_1-1} \left(\frac{\phi + 1}{-1} \right)^{m_1-1} \right] \Phi_\epsilon \\ &+ \sum_1^\mu \sqrt{g_r} \left[1 + c_1 \left(\frac{\phi - g_r}{g_r} \right) + c_2 \left(\frac{\phi - g_r}{g_r} \right)^2 + \dots + c_{m_r-1} \left(\frac{\phi - g_r}{g_r} \right)^{m_r-1} \right] \Phi_r \\ &+ \sum_1^\mu \frac{1}{\sqrt{g_r}} \left[1 + c_1 \left(\frac{\phi - g_r^{-1}}{g_r^{-1}} \right) + c_2 \left(\frac{\phi - g_r^{-1}}{g_r^{-1}} \right)^2 + \dots + c_{m_r-1} \left(\frac{\phi - g_r^{-1}}{g_r^{-1}} \right)^{m_r-1} \right] \Phi'_r, \end{aligned}$$

in which $1, c_1, c_2$, etc., denote the coefficients of unity, the first, second, and successive powers of x in the development by the binomial theorem of $(1 + x)^t$, then

$$\phi = \psi_1^2;$$

and denoting the transverse of ψ_1 by $\bar{\psi}_1$,

$$\bar{\psi}_1 \psi_1 = 1 - 2\Phi_e.$$

Let

$$\psi = \psi_1 (1 - 2\Theta_{\nu+\alpha'} - 2\Theta_{\nu+\beta'} - \dots),$$

then

$$\begin{aligned} \psi^2 &= \psi_1^2 (1 - 2\Theta_{\nu+\alpha'} - 2\Theta_{\nu+\beta'} - \dots)^2, \\ &= \psi_1^2 \\ &= \Phi; \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \bar{\psi} \psi &= \bar{\psi}_1 \psi_1 (1 - 2\Theta_{\alpha'} - 2\Theta_{\beta'} - \dots)(1 - 2\Theta_{\nu+\alpha'} - 2\Theta_{\nu+\beta'} - \dots) \\ &= (1 - 2\Phi_e)^2 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Therefore ψ is orthogonal.

6. We have

$$\begin{aligned} (\psi - 1)^{m_0} \Phi_0 &= (\psi_1 - 1)^{m_0} \Phi_0 = 0, \\ (\psi^2 + 1)^{m_e} \Phi_e &= (\Phi + 1)^{m_e} \Phi_e = 0, \end{aligned}$$

and for $r = 1, 2, \dots, \mu$,

$$\begin{aligned} (\psi - \sqrt{g_r})^{m_r} \Phi_r &= (\psi_1 - \sqrt{g_r})^{m_r} \Phi_r = 0, \\ \left(\psi - \frac{1}{\sqrt{g_r}}\right)^{m_r'} \Phi_r' &= \left(\psi_1 - \frac{1}{\sqrt{g_r}}\right)^{m_r'} \Phi_r' = 0. \end{aligned}$$

Consequently

$$\begin{aligned} (\psi - 1)^{m_0} &= (\psi - 1)^{m_0} (1 - \Phi_0), \\ (\psi^2 + 1)^{m_e} &= (\psi^2 + 1)^{m_e} (1 - \Phi_e), \end{aligned}$$

and for $r = 1, 2, \dots, \mu$,

$$\begin{aligned} (\psi - \sqrt{g_r})^{m_r} &= (\psi - \sqrt{g_r})^{m_r} (1 - \Phi_r), \\ \left(\psi - \frac{1}{\sqrt{g_r}}\right)^{m_r'} &= \left(\psi - \frac{1}{\sqrt{g_r}}\right)^{m_r'} (1 - \Phi_r'); \end{aligned}$$

and therefore

$$\begin{aligned} &(\psi - 1)^{m_0} (\psi^2 + 1)^{m_e} (\psi - \sqrt{g_1})^{m_1} \left(\psi - \frac{1}{\sqrt{g_1}}\right)^{m_1'} \dots \\ &= \left[(\psi - 1)^{m_0} (\psi^2 + 1)^{m_e} (\psi - \sqrt{g_1})^{m_1} \left(\psi - \frac{1}{\sqrt{g_1}}\right)^{m_1'} \dots \right] [1 - \Phi_0 - \Phi_e - \Phi_1 - \Phi_1' - \dots] = 0. \end{aligned}$$

Whence it follows that -1 is not a latent root of ψ . But then since $|\psi + 1| \neq 0$, we may put

$$\Upsilon = \frac{1 - \psi}{1 + \psi};$$

whence we obtain

$$\Upsilon = \frac{1-\Psi}{1+\Psi} = \frac{1-\psi^{-1}}{1+\psi^{-1}} = \frac{\psi-1}{\psi+1} = -\Upsilon$$

and

$$\psi = \frac{1-\Upsilon^*}{1+\Upsilon}.$$

Therefore

$$\phi = \psi^2 = \left(\frac{1-\Upsilon}{1+\Upsilon} \right)^2.$$

7. On the other hand, if zero is a latent root of ϕ and belongs to -1 , i. e. if

$$f(0) + 1 = 0,$$

let $\Phi = -\phi$, and $F(x) = -f(x)$. Then

$$\Phi = F(\theta)$$

and

$$F(0) - 1 = 0,$$

i. e. zero belongs to the latent root $+1$ of Φ . Consequently, for a proper choice of Υ we may put

$$\Phi = \left(\frac{1-\Upsilon}{1+\Upsilon} \right)^2,$$

i. e.

$$\phi = -\left(\frac{1-\Upsilon}{1+\Upsilon} \right)^2.$$

8. Let $\phi = f(\theta)$ be an orthogonal substitution of N variables. If N is odd, zero is a latent root of θ of odd multiplicity; therefore, by 3), if $|\phi| = +1$, zero belongs to the latent root $+1$ of ϕ , and consequently

$$\phi = \left(\frac{1-\Upsilon}{1+\Upsilon} \right)^2.$$

If N is odd and $|\phi| = -1$, then $-\phi$ is a proper orthogonal matrix, and we have

$$\phi = -\left(\frac{1-\Upsilon}{1+\Upsilon} \right)^2.$$

If N is even, since the determinant of both the positive and negative square of Cayley's expression is then equal to $+1$, $\phi = f(\theta)$ is a proper orthogonal substitution. Therefore, no improper orthogonal substitution in an even number of variables can be expressed as a function of a single skew symmetric matrix.

* This is Cayley's expression for an orthogonal substitution in terms of a skew symmetric or alternate linear substitution.

9. Let ϕ be an orthogonal substitution given by the positive square of Cayley's expression; ϕ is then a proper orthogonal substitution. If -1 is a latent root of ϕ , then

$$\left| \frac{\Upsilon^2 + 1}{(1 + \Upsilon)^2} \right| = |\phi + 1| = 0,$$

therefore, $|\Upsilon \pm \sqrt{-1}| = 0$. But if $\sqrt{-1}$ is a latent root of Υ , $-\sqrt{-1}$ is also a latent root, since Υ is skew symmetric. If the nullity* of $\Upsilon + \sqrt{-1}$ is m (i. e. if the minors determinants of ϕ of order $N - m + 1$ all vanish, but not all the minors of order $N - m$), the nullity of $\Upsilon - \sqrt{-1}$ is also m . Therefore by the corollary of the law of nullity,† the nullity of $\Upsilon^2 + 1$ and consequently of $\phi + 1$ is $2m$. Whence it follows that if ϕ is any proper orthogonal substitution of N variables given by the positive square of Cayley's expression, and if the $2m^{\text{th}}$ minors of $\phi + 1$ (the minors of order $N - 2m$) all vanish, then the $(2m + 1)^{\text{th}}$ minors all vanish also. In other words, if ϕ is a proper orthogonal substitution in N variables given by the square of Cayley's expression, the minor of $\phi + 1$ of highest order that does not vanish is of even or odd order according as N is even or odd. Further, the nullity of $(\phi + 1)^2$ is even, i. e. the non-vanishing minors of $(\phi + 1)^2$ of highest order are of $\begin{Bmatrix} \text{even} \\ \text{odd} \end{Bmatrix}$ order if N is $\begin{Bmatrix} \text{even} \\ \text{odd} \end{Bmatrix}$.

Similarly with respect to $(\phi + 1)^3$ and the successive powers of $\phi + 1$.

Conversely, I find that all proper orthogonal substitutions that satisfy these conditions, and of which the multiplicity of the latent root -1 is 0, 2, 4 or 6, are given by the positive square of Cayley's expression,‡ and probably this is true for any proper orthogonal substitution satisfying the above conditions.

I also find that the positive square of Cayley's expression gives all proper orthogonal substitutions ϕ whose fundamental syzygy§ contains $\phi + 1$ to the first power only, and all which satisfy the above conditions and whose fundamental syzygy contains $\phi + 1$ to the second power only.

CLARK UNIVERSITY, WORCESTER, MASS., December 8, 189 .

* This term is Sylvester's. Nullity of order m is equivalent to *rank (Rang)* $N - m$.

† See Johns Hopkins Univ. Circs., Vol. III, p. 10.

‡ Evidently all proper orthogonal substitutions of which -1 is not a latent root satisfy these conditions; and from Stieltje's theorem it follows that all those of which -1 is a latent root of multiplicity, two also satisfy the conditions. But all proper orthogonal substitutions of which -1 is a latent root of multiplicity greater than two do not satisfy the conditions, and are not therefore all given by the square of Cayley's expression, e. g. the orthogonal substitution of p .

§ The rational integral function of ϕ of lowest order that vanishes I term the fundamental syzygy in ϕ .

Compound Determinants.

BY WILLIAM H. METZLER.

INTRODUCTION.

In the theory of compound determinants it has been shown that any minor of a compound determinant $\Delta_{(m)}$, formed from the minors of order m of a determinant Δ , can be expressed in terms of powers of Δ and the complementary of the corresponding minor of the reciprocal of $\Delta_{(m)}$. No one, as far as I have been able to ascertain, has expressed these minors of $\Delta_{(m)}$ directly in terms of the minors of various orders of Δ . I shall in this paper show how to express these minors in this way, and shall also show how to express the sums of the principal minors (of various orders) of the system of compound determinants formed from the minors of Δ in terms of the principal minors (of various orders) of Δ .

From these relations I shall deduce a theorem in regard to symmetric and skew symmetric determinants from which I shall in turn deduce a theorem in matrices. The paper will therefore be divided into two parts, the first relating to determinants and the second to matrices.

I shall first state some theorems which will be required, referring the reader for their proof, where proof is necessary, to the well-known texts by Baltzer, Gordan, Scott, Muir and others.

I.—DETERMINANTS.

§1.—*Auxiliary Theorems.*

1. The minors of order m formed from the constituents of a determinant of order ω , are λ^2 in number, where $\lambda = \binom{\omega}{m} = \omega_m = \frac{\omega(\omega-1)\dots(\omega-m+1)^*}{m!}$,

*Baltzer, *Theorie der Determinanten*, §2, 4, §4, 1. Scott, *Theory of Determinants*, Chap. III, 1.

and may therefore be arranged in a square. Let us then form a compound determinant $\Delta_{(m)}$ from the minors of order m of a given determinant Δ of order ω , writing in the same row all those minors proceeding from the same selection of rows, and similarly for the columns; and also its reciprocal (adjugate) determinant $\Delta_{(\omega-m)}$ formed from the minors of order $\omega - m$, any constituent of the one being the complementary minor of the corresponding constituent in the other.

2. To express $\Delta_{(m)}$ and $\Delta_{(\omega-m)}$ in terms of Δ we have the relations

$$\Delta_{(m)} \Delta_{(\omega-m)} = \Delta^{\lambda} = \Delta^{\omega m},$$

$$\Delta_{(m)} = \Delta^{(\omega-1)m-1}$$

and

$$\Delta_{(\omega-m)} = \Delta^{(\omega-1)m} = \Delta^{(\omega-1)\omega-m-1}.*$$

If $m = \omega - m$, then $\Delta_{(m)} = \Delta_{(\omega-m)} = \pm \Delta^{\frac{\lambda}{2}}$.

3. If Δ is a symmetric determinant, then it is quite obvious that $\Delta_{(m)}$ and $\Delta_{(\omega-m)}$ are symmetric. If Δ is skew symmetric, then $\Delta_{(m)}$ will be either symmetric or skew symmetric according as i is even or odd.

4. The reciprocal of every constituent of the compound determinant $\Delta_{(m)}$ is a minor of order m of the compound determinant $\Delta_{(m-1)}$. The converse, viz. that every minor of order m of $\Delta_{(m-1)}$ is the reciprocal of some constituent of $\Delta_{(m)}$ is, however, not true.†

5. If a determinant vanishes, then all minors of order two of its reciprocal vanish.

§2.—*Expressions for Sums of Principal Minors of Compound Determinants.*

To illustrate the method employed in obtaining the expression for any minor of a compound determinant in terms of minors of Δ , let us consider a few particular cases. After considering more or less in detail these particular cases, we shall proceed to the general case of a determinant Δ of order ω , and express the sum of the principal minors of order two, of each of the system of compound determinants formed from Δ , directly in terms of minors of Δ .

* Baltzer, §7, 6. Scott, Chap. V, 9.

† Cf. Scott, Chap. V, 11.

A.—*Determinant of order four.*

6. Let

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

then

$$\Delta_{(2)} = \begin{vmatrix} A_{12} & A_{12} & A_{13} & A_{13} & A_{12} & A_{12} \\ 12 & 12 & 14 & 23 & 24 & 24 \\ A_{13} & A_{13} & A_{13} & A_{13} & A_{13} & A_{13} \\ 12 & 13 & 14 & 23 & 24 & 24 \\ A_{14} & A_{14} & A_{14} & A_{14} & A_{14} & A_{14} \\ 12 & 13 & 14 & 23 & 24 & 24 \\ A_{23} & A_{23} & A_{23} & A_{23} & A_{23} & A_{23} \\ 12 & 13 & 14 & 23 & 24 & 24 \\ A_{24} & A_{24} & A_{24} & A_{24} & A_{24} & A_{24} \\ 12 & 13 & 14 & 23 & 24 & 24 \\ A_{34} & A_{34} & A_{34} & A_{34} & A_{34} & A_{34} \\ 12 & 13 & 14 & 23 & 24 & 24 \end{vmatrix},$$

where A_{rs} denotes the minor complementary to $(a_{rs} a_{tu})$ with the proper sign attached, and where $A_{rs} = -A_{rt}$,* and

$$\Delta_{(3)} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{vmatrix},$$

where A_{rs} denotes the minor complementary to a_{rs} with the proper sign, so that

$$\begin{aligned} a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14} &= \Delta, \\ \text{etc.,} & \qquad \qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

For the reciprocal of $\Delta_{(2)}$ which will be designated by $\Delta'_{(2)}$ we have

$$\Delta'_{(2)} = \begin{vmatrix} A_{34} & A_{34} & A_{34} & A_{34} & A_{34} & A_{34} \\ 34 & 42 & 23 & 14 & 31 & 12 \\ A_{24} & A_{24} & A_{24} & A_{24} & A_{24} & A_{24} \\ 43 & 24 & 32 & 41 & 13 & 21 \\ A_{23} & A_{23} & A_{23} & A_{23} & A_{23} & A_{23} \\ 34 & 42 & 23 & 14 & 31 & 12 \\ A_{14} & A_{14} & A_{14} & A_{14} & A_{14} & A_{14} \\ 34 & 43 & 23 & 14 & 31 & 12 \\ A_{13} & A_{13} & A_{13} & A_{13} & A_{13} & A_{13} \\ 43 & 24 & 32 & 41 & 13 & 21 \\ A_{12} & A_{12} & A_{12} & A_{12} & A_{12} & A_{12} \\ 34 & 42 & 23 & 14 & 31 & 12 \end{vmatrix},$$

* Vide Gordan, *Determinanten*, §4, 42-49.

so that

$$\begin{aligned} A_{12}A_{34} + A_{12}A_{43} + A_{12}A_{34} + A_{12}A_{34} + A_{12}A_{34} + A_{12}A_{34} = \Delta, \\ \text{etc.,} \qquad \qquad \qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

7. We obtain by the ordinary methods expressions for the minors of any of these compound determinants in terms of powers of Δ and the complementaries of the corresponding minors of their reciprocals. For the principal minors and their sums we have,

in case of minors of $\Delta_{(2)}$,

$$(A_{12} A_{13} A_{14} A_{23} A_{24}) = \Delta^2 A_{12},$$

and \therefore

$$\Sigma (A_{12} A_{13} A_{14} A_{23} A_{24}) = \Delta^2 \Sigma A_{12},$$

$$(A_{12} A_{13} A_{14} A_{23}) = \Delta (A_{12} A_{13}),$$

and \therefore

$$\Sigma (A_{12} A_{13} A_{14} A_{23}) = \Delta \Sigma (A_{12} A_{13});$$

in case of minors of $\Delta_{(3)}$,

$$(A_{11} A_{23} A_{33}) = \Delta^3 a_{44},$$

and \therefore

$$\Sigma (A_{11} A_{23} A_{33}) = \Delta^3 \Sigma a_{11},$$

$$(A_{11} A_{23}) = \Delta A_{13},$$

and \therefore

$$\Sigma (A_{11} A_{23}) = \Delta \Sigma A_{13}.$$

8. In the case of minors of $\Delta_{(2)}$ of the third order, we get nothing simpler in this way. We may, however, obtain simple results as follows:

$$\begin{vmatrix} A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{14} & A_{14} & A_{14} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{23} & a_{23} & a_{24} \\ a_{23} & a_{23} & a_{34} \\ a_{23} & a_{23} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & A_{11} \end{vmatrix} \\ = A_{11}^3, \quad \therefore (A_{12} A_{13} A_{14}) = A_{11}^2.$$

Similarly,

$$(A_{12} A_{23} A_{24}) = A_{22}^2,$$

$$(A_{13} A_{23} A_{34}) = A_{33}^2,$$

$$(A_{14} A_{24} A_{34}) = A_{44}^2.$$

The product

$$\begin{vmatrix}
 A_{13} & A_{13} & A_{12} & A_{13} & A_{13} \\
 13 & 13 & 14 & 23 & 24 \\
 A_{13} & A_{13} & A_{13} & A_{13} & A_{13} \\
 13 & 13 & 14 & 23 & 24 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 A_{23} & A_{23} & A_{23} & A_{23} & A_{23} \\
 13 & 13 & 14 & 23 & 24 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{vmatrix}
 \begin{vmatrix}
 a_{23} & a_{23} & a_{24} & 0 & 0 \\
 a_{33} & a_{33} & a_{34} & 0 & 0 \\
 a_{43} & a_{43} & a_{44} & 0 & 0 \\
 -a_{31}^* & 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\
 -a_{41}^* & 0 & 0 & a_{43} & a_{44}
 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix}
 A_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & A_{11} & 0 & A_{13} & 0 \\
 a_{24} & a_{24} & a_{44} & 0 & 0 \\
 -A_{31} & A_{21} & 0 & A_{23} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & a_{24} & a_{44}
 \end{vmatrix}$$

$$= a_{44}^2 A_{11} (A_{11} A_{23} - A_{12} A_{21})$$

$$= a_{44}^2 \Delta A_{11} A_{13},$$

$$\therefore (A_{13} A_{13} A_{23}) = a_{44}^2 \Delta.$$

Similarly,

$$(A_{12} A_{14} A_{24}) = a_{33}^2 \Delta,$$

$$(A_{13} A_{14} A_{34}) = a_{22}^2 \Delta,$$

$$(A_{23} A_{24} A_{34}) = a_{11}^2 \Delta.$$

The product

$$\begin{vmatrix}
 A_{13} & A_{13} & A_{13} & A_{13} & A_{13} \\
 13 & 13 & 14 & 23 & 24 \\
 A_{13} & A_{13} & A_{13} & A_{13} & A_{13} \\
 13 & 13 & 14 & 23 & 24 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 A_{24} & A_{24} & A_{24} & A_{24} & A_{24} \\
 13 & 13 & 14 & 23 & 24
 \end{vmatrix}
 \begin{vmatrix}
 a_{23} & a_{23} & a_{24} & 0 & 0 \\
 a_{33} & a_{33} & a_{34} & 0 & 0 \\
 a_{43} & a_{43} & a_{44} & 0 & 0 \\
 -a_{31} & 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\
 -a_{41} & 0 & 0 & a_{43} & a_{44}
 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix}
 A_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & A_{11} & 0 & A_{12} & 0 \\
 a_{24} & a_{24} & a_{44} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & a_{33} & a_{43} \\
 -A_{41} & 0 & A_{21} & 0 & A_{23}
 \end{vmatrix}$$

$$= A_{11} \{ A_{11} a_{44} a_{33} A_{22} - a_{24} a_{43} A_{12} A_{21} \}$$

$$= A_{11} A_{13} \{ A_{11} A_{23} + \Delta a_{33} a_{44} - \Delta A_{12} \},$$

$$\therefore (A_{13} A_{13} A_{24}) = a_{33} a_{44} \Delta + A_{11} A_{23} - \Delta A_{12}.$$

* The reason for writing these constituents negative is obvious.

Similarly,

$$\begin{aligned}
 (A_{12} A_{13} A_{34})_{12} &= a_{22} a_{44} \Delta + A_{11} A_{33} - \Delta A_{13}, \\
 (A_{12} A_{14} A_{33})_{12} &= a_{33} a_{44} \Delta + A_{11} A_{22} - \Delta A_{12}, \\
 (A_{12} A_{14} A_{34})_{12} &= a_{22} a_{33} \Delta + A_{11} A_{44} - \Delta A_{14}, \\
 (A_{13} A_{14} A_{23})_{12} &= a_{33} a_{44} \Delta + A_{11} A_{33} - \Delta A_{13}, \\
 (A_{13} A_{14} A_{24})_{12} &= a_{22} a_{33} \Delta + A_{11} A_{44} - \Delta A_{14}, \\
 (A_{13} A_{23} A_{34})_{12} &= a_{11} a_{44} \Delta + A_{22} A_{33} - \Delta A_{23}, \\
 (A_{13} A_{24} A_{34})_{12} &= a_{11} a_{33} \Delta + A_{22} A_{44} - \Delta A_{24}, \\
 (A_{13} A_{23} A_{24})_{12} &= a_{11} a_{44} \Delta + A_{22} A_{33} - \Delta A_{23}, \\
 (A_{13} A_{24} A_{34})_{12} &= a_{11} a_{22} \Delta + A_{33} A_{44} - \Delta A_{34}, \\
 (A_{14} A_{23} A_{24})_{12} &= a_{11} a_{33} \Delta + A_{22} A_{44} - \Delta A_{24}, \\
 (A_{14} A_{23} A_{34})_{12} &= a_{11} a_{22} \Delta + A_{33} A_{44} - \Delta A_{34}.
 \end{aligned}$$

Taking the sum of all principal minors of order three we get

$$\Sigma (A_{12} A_{13} A_{14})_{12} = (\Sigma A_{11})^3 + \Delta \{(\Sigma a_{11})^2 - 2 \Sigma A_{12}\}.$$

It is obvious that the expression for any minor may be found in this way, but being particularly interested in the expressions for principal minors, and especially in principal minors of order two, the examples will be almost entirely confined to those cases.

9. We shall now express the principal second minors of $\Delta_{(3)}$ directly in terms of minors of Δ .

The product

$$\begin{vmatrix} A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{12} & A_{13} & A_{13} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & A_{11} & 0 \\ a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix} \\
 = a_{44} A_{11}^3, \quad \therefore (A_{12} A_{13})_{12} = a_{44} A_{11}.$$

Similarly,

$$(A_{13} A_{14})_{13 \ 14} = a_{33} A_{11},$$

$$(A_{13} A_{23})_{13 \ 23} = a_{44} A_{22},$$

$$(A_{13} A_{24})_{13 \ 24} = a_{33} A_{22},$$

$$(A_{13} A_{14})_{18 \ 14} = a_{22} A_{11},$$

$$(A_{13} A_{23})_{18 \ 23} = a_{44} A_{33},$$

$$(A_{13} A_{24})_{18 \ 24} = a_{22} A_{33},$$

$$(A_{14} A_{24})_{14 \ 24} = a_{33} A_{44},$$

$$(A_{14} A_{24})_{14 \ 24} = a_{22} A_{44},$$

$$(A_{23} A_{24})_{23 \ 24} = a_{11} A_{22},$$

$$(A_{23} A_{24})_{23 \ 24} = a_{11} A_{33},$$

$$(A_{24} A_{24})_{24 \ 24} = a_{11} A_{44}.$$

The product

$$\begin{vmatrix} A_{13} & A_{12} & A_{13} & A_{13} & A_{13} \\ 12 & 18 & 14 & 28 & 34 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ A_{24} & A_{24} & A_{24} & A_{24} & A_{24} \\ 12 & 18 & 14 & 23 & 34 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} & 0 & 0 \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 & 0 \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} & 0 & 0 \\ 0 & a_{21} & 0 & a_{22} & -a_{24} \\ 0 & a_{41} & 0 & a_{42} & -a_{44} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= \begin{vmatrix} A_{11} & 0 & 0 & -A_{13} & 0 \\ a_{23} & a_{33} & a_{43} & a_{21} & a_{41} \\ a_{24} & a_{34} & a_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{22} & a_{42} \\ 0 & -A_{41} & A_{31} & 0 & -A_{33} \end{vmatrix} \\ &= A_{11} \{ A_{13} (a_{34} A_{31} + a_{44} A_{41}) - a_{22} A_{33} A_{12} \} \\ &\quad + A_{13} a_{42} \{ A_{41} A_{13} - A_{31} A_{14} \}, \end{aligned}$$

which, after easy transformations,

$$= A_{11} A_{13} \{ \Delta - a_{11} A_{11} - a_{12} A_{12} - a_{21} A_{21} - a_{22} A_{22} \},$$

$$\therefore (A_{13} A_{24})_{13 \ 24} = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{21} A_{21} + a_{22} A_{22} - \Delta.$$

Similarly,

$$(A_{18} A_{24}) = a_{11} A_{11} + a_{18} A_{18} + a_{31} A_{31} + a_{33} A_{33} - \Delta,$$

$$(A_{14} A_{23}) = a_{11} A_{11} + a_{14} A_{14} + a_{41} A_{41} + a_{44} A_{44} - \Delta,$$

$$\therefore (A_{13} A_{34}) + (A_{18} A_{24}) + (A_{14} A_{23}) = a_{11} A_{11} + a_{22} A_{22} + a_{33} A_{33} + a_{44} A_{44} - \Delta.$$

Taking now the sum of all principal minors of order two, we get

$$\Sigma (A_{12} A_{13}) = (\Sigma a_{11})(\Sigma A_{11}) - \Delta.$$

10. Having the sum of the principal minors of any order, we have of course the sum of their complementaries. That is

$$\Sigma (A_{12} A_{13} A_{14} A_{23}) = \Delta \Sigma (A_{12} A_{13}) = \Delta \{(\Sigma a_{11})(\Sigma A_{11}) - \Delta\},$$

which is the expression for the sum of the minors of order four.

B.—*Determinant of order five.*

11. Let

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix},$$

then

$$\Delta_{(2)} = \begin{vmatrix} A_{123} & A_{123} & A_{123} & A_{123} & A_{123} & A_{123} & A_{123} & A_{123} & A_{123} & A_{123} \\ 123 & 124 & 125 & 124 & 125 & 125 & 124 & 123 & 124 & 125 \\ A_{124} & A_{124} & A_{124} & A_{124} & A_{124} & A_{124} & A_{124} & A_{124} & A_{124} & A_{124} \\ 123 & 124 & 125 & 124 & 125 & 125 & 124 & 123 & 124 & 125 \\ A_{125} & A_{125} & A_{125} & A_{125} & A_{125} & A_{125} & A_{125} & A_{125} & A_{125} & A_{125} \\ 123 & 124 & 125 & 124 & 125 & 125 & 124 & 123 & 124 & 125 \\ A_{124} & A_{124} & A_{124} & A_{124} & A_{124} & A_{124} & A_{124} & A_{124} & A_{124} & A_{124} \\ 123 & 124 & 125 & 124 & 125 & 125 & 124 & 123 & 124 & 125 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{125} & A_{125} & A_{125} & A_{125} & A_{125} & A_{125} & A_{125} & A_{125} & A_{125} & A_{125} \\ 123 & 124 & 125 & 124 & 125 & 125 & 124 & 123 & 124 & 125 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{(9)} = \begin{vmatrix} A_{45}^{45} & A_{45}^{58} & A_{45}^{34} & A_{45}^{59} & A_{45}^{24} & A_{45}^{38} & A_{45}^{18} & A_{45}^{41} & A_{45}^{81} & A_{45}^{12} \\ A_{35}^{54} & A_{35}^{86} & A_{35}^{43} & A_{35}^{25} & A_{35}^{42} & A_{35}^{82} & A_{35}^{15} & A_{35}^{41} & A_{35}^{13} & A_{35}^{21} \\ A_{24}^{45} & A_{24}^{58} & A_{24}^{34} & A_{24}^{25} & A_{24}^{42} & A_{24}^{28} & A_{24}^{51} & A_{24}^{14} & A_{24}^{31} & A_{24}^{12} \\ A_{25}^{45} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & A_{25}^{18} \\ A_{24}^{54} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & A_{24}^{21} \\ A_{23}^{45} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & A_{23}^{18} \\ A_{15}^{54} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & A_{15}^{21} \\ A_{14}^{45} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & A_{14}^{12} \\ A_{18}^{54} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & A_{18}^{21} \\ A_{13}^{45} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & A_{13}^{12} \end{vmatrix}$$

and

$$\Delta_{(4)} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix}.$$

12. Expressing the principal minors of these compound determinants in terms of powers of Δ and the complementaries of the corresponding minors of their reciprocals, we have for $\Delta_{(2)}$ and $\Delta_{(3)}$

$$(A_{123}^{123} A_{124}^{124} \dots A_{245}^{245}) = \Delta^8 A_{12}^{12},$$

and therefore

$$\Sigma (A_{123}^{123} A_{134}^{134} \dots A_{245}^{245}) = \Delta^8 \Sigma A_{12}^{12}.$$

Similarly,

$$\begin{aligned} \Sigma (A_{123}^{123} A_{134}^{134} \dots A_{235}^{235}) &= \Delta^3 \Sigma (A_{12}^{12} A_{13}^{13}), \\ \Sigma (A_{123}^{123} A_{124}^{124} \dots A_{234}^{234}) &= \Delta \Sigma (A_{12}^{12} A_{13}^{13} A_{14}^{14}), \\ \Sigma (A_{123}^{123} A_{124}^{124} \dots A_{145}^{145}) &= \Sigma (A_{12}^{12} A_{13}^{13} A_{14}^{14} A_{15}^{15}), \\ \Delta \Sigma (A_{123}^{123} A_{124}^{124} \dots A_{135}^{135}) &= \Sigma (A_{12}^{12} A_{13}^{13} \dots A_{23}^{23}), \\ \Delta^2 \Sigma (A_{123}^{123} A_{124}^{124} \dots A_{184}^{184}) &= \Sigma (A_{12}^{12} A_{13}^{13} \dots A_{24}^{24}), \\ \Delta^3 \Sigma (A_{123}^{123} A_{124}^{124} A_{125}^{125}) &= \Sigma (A_{12}^{12} A_{13}^{13} \dots A_{25}^{25}), \\ \Delta^4 \Sigma (A_{123}^{123} A_{124}^{124}) &= \Sigma (A_{12}^{12} \dots A_{34}^{34}); \end{aligned}$$

and for $\Delta_{(4)}$,

$$(A_{11} A_{22} A_{33} A_{44}) = a_{55} \Delta^3,$$

and therefore

$$\Sigma (A_{11} A_{22} A_{33} A_{44}) = \Delta^3 \Sigma a_{11}.$$

Similarly,

$$\begin{aligned} \Sigma (A_{11} A_{22} A_{33}) &= \Delta^2 \Sigma A_{123}, \\ \Sigma (A_{11} A_{22}) &= \Delta \Sigma A_{12}. \end{aligned}$$

13. To obtain the expressions for principal minors of $\Delta_{(3)}$ of order two, we have the product

$$\begin{vmatrix} A_{123} & A_{123} & A_{123} \\ 123 & 124 & 125 \\ A_{124} & A_{124} & A_{124} \\ 123 & 124 & 125 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{12} & 0 & 0 \\ 12 & A_{12} & 0 \\ a_{35} & a_{45} & a_{55} \end{vmatrix} \\ = a_{55} A_{12}^2;$$

$$\therefore (A_{123} A_{124}) = a_{55} A_{12}.$$

Similarly,

$$\begin{aligned} (A_{123} A_{125}) &= a_{44} A_{12}, \\ \text{etc.,} & \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

The product

$$\begin{vmatrix} A_{123} & A_{123} & A_{123} & A_{123} & A_{123} \\ 123 & 124 & 125 & 124 & 145 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ A_{145} & A_{145} & A_{145} & A_{145} & A_{145} \\ 123 & 124 & 125 & 124 & 145 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & a_{35} & 0 & 0 \\ a_{43} & a_{44} & a_{45} & 0 & 0 \\ a_{53} & a_{54} & a_{55} & 0 & 0 \\ 0 & a_{33} & 0 & a_{33} & -a_{35} \\ 0 & a_{53} & 0 & a_{53} & -a_{55} \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} A_{12} & 0 & 0 & -A_{12} & 0 \\ 12 & a_{34} & a_{44} & a_{54} & a_{53} \\ a_{35} & a_{45} & a_{55} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{33} & a_{53} \\ 0 & -A_{15} & A_{14} & 0 & -A_{14} \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 14 \end{vmatrix} \\ = A_{12} \{ -a_{33} A_{14} A_{123} + a_{55} A_{15} A_{124} + a_{45} A_{14} A_{124} \} \\ - a_{53} A_{12} \{ A_{14} A_{125} - A_{15} A_{124} \} \\ = A_{12} \{ -a_{33} A_{14} A_{123} + (a_{55} A_{15} + a_{45} A_{14}) A_{124} - a_{53} A_{12} A_{145} \}.$$

which, after easy transformations,

$$\begin{aligned}
 &= A_{12} A_{134} \{ A_{11} - a_{44} A_{14} - a_{55} A_{15} - a_{45} A_{14} - a_{54} A_{15} \}, \\
 \therefore (A_{123} A_{145}) &= (a_{44} A_{14} + a_{55} A_{15} + a_{45} A_{14} + a_{54} A_{15} - A_{11}).
 \end{aligned}$$

Similarly,

$$\begin{aligned}
 (A_{124} A_{135}) &= (a_{33} A_{13} + a_{55} A_{15} + a_{35} A_{13} + a_{53} A_{15} - A_{11}), \\
 \text{etc.,} & \qquad \qquad \text{etc.}
 \end{aligned}$$

Taking the sum of all principal minors of order two, we get

$$\Sigma (A_{123} A_{124}) = \Sigma a_{11} \Sigma A_{12} - \Sigma A_{11}.$$

14. In a similar manner it may be found that

$$\begin{aligned}
 \Sigma (A_{123} A_{124} A_{135}) &= (\Sigma A_{12})^3 + (\Sigma a_{11})^3 \Sigma A_{11} - 2 \Sigma A_{123} \Sigma A_{11} - \Delta \Sigma a_{11}, \\
 \Sigma (A_{123} A_{124} A_{125} A_{234}) &= (\Sigma a_{11})^3 \cdot \Delta + \Sigma a_{11} \cdot \Sigma A_{12} \cdot \Sigma A_{11} - 3 \Sigma a_{11} \cdot \Sigma A_{123} \cdot \Delta - (\Sigma A_{11})^2 + \Sigma A_{12} \cdot \Delta, \\
 \text{etc.,} & \qquad \qquad \text{etc.}
 \end{aligned}$$

15. To find expressions for the principal minors of $\Delta_{(3)}$ of order two, we have the product

$$\begin{aligned}
 &\begin{vmatrix} A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} \\ A_{13} & A_{18} & A_{14} & A_{15} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{23} & -a_{23} & a_{24} & -a_{25} \\ a_{32} & -a_{33} & a_{34} & -a_{35} \\ a_{42} & -a_{43} & a_{44} & -a_{45} \\ a_{52} & -a_{53} & a_{54} & -a_{55} \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} A_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A_{11} & 0 & 0 \\ a_{24} & a_{34} & a_{44} & a_{54} \\ -a_{25} & -a_{35} & -a_{45} & -a_{55} \end{vmatrix} \\
 &= A_{11}^2 A_{123}, \\
 \therefore (A_{12} A_{13}) &= A_{11} A_{123}.
 \end{aligned}$$

Similarly,

$$\begin{aligned}
 (A_{12} A_{14}) &= A_{11} A_{124}, \\
 (A_{12} A_{15}) &= A_{11} A_{125}, \\
 \text{etc.,} & \qquad \text{etc.}
 \end{aligned}$$

The product

$$\begin{vmatrix}
 A_{12} & A_{12} & A_{12} & A_{12} & A_{12} & A_{12} & A_{12} \\
 12 & 31 & 14 & 51 & 42 & 34 & 45 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 A_{45} & A_{45} & A_{45} & A_{45} & A_{45} & A_{45} & A_{45} \\
 12 & 31 & 14 & 51 & 42 & 34 & 45
 \end{vmatrix}
 \begin{vmatrix}
 a_{23} & -a_{23} & a_{24} & -a_{25} & 0 & 0 & 0 \\
 a_{33} & -a_{33} & a_{34} & -a_{35} & 0 & 0 & 0 \\
 a_{43} & -a_{43} & a_{44} & -a_{45} & 0 & 0 & 0 \\
 a_{53} & -a_{53} & a_{54} & -a_{55} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & a_{21} & 0 & -a_{22} & a_{33} & -a_{23} \\
 0 & 0 & a_{31} & 0 & -a_{32} & a_{33} & -a_{35} \\
 0 & 0 & a_{51} & 0 & -a_{52} & a_{53} & -a_{55}
 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix}
 A_{11} & 0 & 0 & 0 & -A_{14} & 0 & 0 \\
 -a_{23} & -a_{33} & -a_{43} & -a_{53} & 0 & 0 & 0 \\
 a_{24} & a_{34} & a_{44} & a_{54} & a_{21} & a_{31} & a_{51} \\
 -a_{25} & -a_{35} & -a_{45} & a_{55} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & a_{22} & a_{32} & a_{52} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & a_{33} & a_{33} & a_{53} \\
 0 & 0 & -A_{51} & A_{41} & 0 & 0 & -A_{44}
 \end{vmatrix}$$

$$= A_{11} A_{14} \{ A_{44} A_{125} + A_{55} A_{124} - A_{45} A_{125} - A_{54} A_{124} - a_{33} \Delta \},$$

$$\therefore (A_{12} A_{45}) = A_{44} A_{125} + A_{55} A_{124} - A_{45} A_{125} - A_{54} A_{124} - a_{33} \Delta.$$

Similarly,

$$(A_{12} A_{34}) = A_{44} A_{123} + A_{33} A_{124} - A_{43} A_{123} - A_{34} A_{124} - a_{55} \Delta,$$

etc., etc.

The sum of the last fifteen minors may be easily found to be

$$= A_{11} (A_{245} + A_{245} + A_{235} + A_{234}) + A_{22} A_{245} - \Delta \Sigma a_{11},$$

and therefore

$$\Sigma (A_{12} A_{13}) = \Sigma A_{11} \Sigma A_{123} - \Delta \Sigma a_{11}.$$

16. In a similar manner we may find that

$$\begin{aligned}
 \Sigma (A_{12} A_{13} A_{14}) &= \Sigma a_{11} (\Sigma A_{11})^3 \\
 &\quad + \Delta \{ (\Sigma A_{123})^2 - 2 \Sigma a_{11} \Sigma A_{12} \} \\
 &\quad - \Delta \cdot \Sigma A_{11},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Sigma (A_{12} A_{13} A_{14} A_{15}) &= \Delta \cdot \Sigma a_{11} \cdot \Sigma A_{11} \cdot \Sigma A_{123} + (\Sigma A_{11})^3 \\
 &\quad - \Delta^2 \cdot (\Sigma a_{11})^2 - 3 \Delta \cdot \Sigma A_{11} \cdot \Sigma A_{12} \\
 &\quad + \Delta^2 \cdot \Sigma A_{123},
 \end{aligned}$$

etc.,

etc.

C.—*Determinant of order ω .*

17. In the general case (for a determinant Δ of order ω) I shall adopt, for sake of convenience, the following notation:

$\Delta_{(m)}$ will denote the compound determinant formed from the minors of Δ of order m ,

$\Delta_{(m)(n)}$ will denote the compound determinant formed from the minors of $\Delta_{(m)}$ of order n ,

Δ_m will denote a minor of Δ of order m ,

Δ_m will denote the constituent in the r^{th} row and s^{th} column of $\Delta_{(m)}$,

$\Delta_{(m)n}$ will denote a minor of $\Delta_{(m)}$ of order n ,

$\Delta_{(m)n}$ will denote the constituent in the r^{th} row and s^{th} column of $\Delta_{(m)(n)}$,

$\Sigma \Delta_m$ will denote the sum of the principal minors of Δ of order m ,

$\Sigma \Delta_{(m)n}$ will denote the sum of the principal minors of $\Delta_{(m)}$ of order n .

Let

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1\omega} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2\omega} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\omega 1} & a_{\omega 2} & a_{\omega 3} & \dots & a_{\omega \omega} \end{vmatrix},$$

then

$$\Delta_{(2)} = \begin{vmatrix} \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} & \dots & \Delta_{2\omega} \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} & \dots & \Delta_{3\omega} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta_{\omega 1} & \Delta_{\omega 2} & \Delta_{\omega 3} & \dots & \Delta_{\omega \omega} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{(m)} = \begin{vmatrix} \Delta_{m1} & \Delta_{m2} & \Delta_{m3} & \dots & \Delta_{m\omega} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} & \dots & \Delta_{2\omega} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta_{\omega 1} & \Delta_{\omega 2} & \Delta_{\omega 3} & \dots & \Delta_{\omega \omega} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{(\omega-1)} = \begin{vmatrix} \Delta_{11}^{\omega-1} & \Delta_{12}^{\omega-1} & \Delta_{13}^{\omega-1} & \dots & \Delta_{1\omega}^{\omega-1} \\ \Delta_{21}^{\omega-1} & \Delta_{22}^{\omega-1} & \Delta_{23}^{\omega-1} & \dots & \Delta_{2\omega}^{\omega-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta_{\omega 1}^{\omega-1} & \Delta_{\omega 2}^{\omega-1} & \Delta_{\omega 3}^{\omega-1} & \dots & \Delta_{\omega \omega}^{\omega-1} \end{vmatrix}.$$

18. On observing that $\omega_m = \omega_{\omega-m}$, or more generally $(\omega-k)_m = (\omega-k)_{\omega-m-k}$, and that any minor of order p of the determinant $\Delta_{(\omega-m)}$ is equal to the complementary of the corresponding minor of $\Delta_{(m)}$ multiplied by $\Delta^{\omega-(\omega-1)_m-1}$,† we may write

$$\begin{aligned} \Sigma \Delta_{ss}^{(\omega-1)} &= \Delta^{\omega-2} \cdot \Sigma \Delta_{ss}^{\omega-2}, \\ \Sigma \Delta_{ss}^{(\omega-1)\omega-1} &= \Delta^{(\omega-1)_m-1} \cdot \Sigma \Delta_{ss}^{\omega-m}, \\ \Sigma \Delta_{ss}^{(\omega-1)\omega-1} &= \Delta^{(\omega-1)_m-1} \cdot \Sigma \Delta_{ss}^m = \Delta^{(\omega-1)_m-1} \cdot \Sigma \Delta_{ss}^m, \\ \Sigma \Delta_{ss}^{(\omega-1)\omega-1} &= \Delta^{(\omega-1)_m-1} \cdot \Sigma \Delta_{ss}^{(m)n} = \Delta^{(\omega-1)_m-1} \cdot \Sigma \Delta_{ss}^{(m)n}, \\ \Sigma \Delta_{ss}^{(\omega-1)\omega-1} &= \Delta^{(\omega-1)_m-1} \cdot \Sigma a_{11} = \Delta^{\omega-2} \cdot \Sigma a_{11}, \\ &\text{etc.,} \qquad \qquad \qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

19. Proceeding in the same way as in the cases of determinants of the fourth and fifth order, we get

$$\begin{aligned} \Sigma \Delta_{ss}^{(2)} &= \Sigma a_{ss} \Sigma \Delta_{ss} - \Sigma \Delta_{ss}^4, \\ \Sigma \Delta_{ss}^{(3)} &= \Sigma \Delta_{ss}^2 \Sigma \Delta_{ss}^4 - \Sigma a_{ss} \Sigma \Delta_{ss}^5 + \Sigma \Delta_{ss}^6, \\ \Sigma \Delta_{ss}^{(4)} &= \Sigma \Delta_{ss}^3 \Sigma \Delta_{ss}^5 - \Sigma \Delta_{ss}^2 \Sigma \Delta_{ss}^6 + \Sigma a_{ss} \Sigma \Delta_{ss}^7 - \Sigma \Delta_{ss}^8, \\ &\dots \\ \Sigma \Delta_{ss}^{(m)} &= \Sigma \Delta_{ss}^{m-1} \Sigma \Delta_{ss}^{m+1} - \Sigma \Delta_{ss}^{m-2} \Sigma \Delta_{ss}^{m+2} + \dots \\ &\qquad \qquad \qquad + (-1)^{m-2} \Sigma a_{ss} \Sigma \Delta_{ss}^{2m-1} + (-1)^{m-1} \Sigma \Delta_{ss}^{2m}, \\ &\dots \\ \Sigma \Delta_{ss}^{(\omega-2)} &= \Sigma \Delta_{ss}^{\omega-3} \Sigma \Delta_{ss}^{\omega-1} - \Sigma \Delta_{ss}^{\omega-4} \cdot \Delta, \\ \Sigma \Delta_{ss}^{(2)} &= (\Sigma \Delta_{ss}^2 + \Sigma \Delta_{ss}^4) \{ (\Sigma a_{ss})^2 - 2 \Sigma \Delta_{ss}^2 \} - \Sigma a_{ss} \Sigma \Delta_{ss}^5 + \Sigma \Delta_{ss}^6, \\ \Sigma \Delta_{ss}^{(3)} &= (\Sigma \Delta_{ss}^2)^2 \Sigma \Delta_{ss}^5 + \Sigma a_{ss} (\Sigma \Delta_{ss}^4)^2 - 2 \Sigma a_{ss} \Sigma \Delta_{ss}^3 \Sigma \Delta_{ss}^5 - \Sigma a_{ss} \Sigma \Delta_{ss}^2 \Sigma \Delta_{ss}^6 \\ &\qquad \qquad \qquad + (\Sigma a_{ss})^3 \Sigma \Delta_{ss}^7 - \Sigma \Delta_{ss}^4 \Sigma \Delta_{ss}^5 + 3 \Sigma \Delta_{ss}^3 \Sigma \Delta_{ss}^6 - \Sigma \Delta_{ss}^2 \Sigma \Delta_{ss}^7 - \Sigma a_{ss} \Sigma \Delta_{ss}^8 + \Sigma \Delta_{ss}^9, \\ &\dots \\ &\text{etc.,} \qquad \qquad \qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

* These constituents would be written $\Delta_{\omega-1}^{\omega-1}$, $\Delta_{\omega-1}^{\omega-1}$, etc., but since $\omega_{\omega-1} = \omega$, we may write them as above.

† Vide Scott, Chap. V, Art. 10.

Having found $\Sigma \Delta_{(m)}^{(n)}$ for values of $m \leq \frac{\omega}{2}$, we may readily obtain $\Sigma \Delta_{(m)}^{(n)}$ for values of $m > \frac{\omega}{2}$ by applying what Muir terms the *Law of Complementaries*.*

Applying these expressions to the relations given in Art. 18, we have

$$\Sigma \Delta_{(\omega-2)}^{(\omega-2)} = \Delta^{(\omega-1)-2} (\Sigma a_{ii} \Sigma \Delta_{ii} - \Sigma \Delta_{ii}^2),$$

or generally

$$\Sigma \Delta_{(\omega-m)}^{(\omega-m)} = \Delta^{(\omega-1)-m} (\Sigma \Delta_{m-1} \Sigma \Delta_{m+1} \dots + (-1)^{m-2} \Sigma a_{ii} \Sigma \Delta_{2m-1} + (-1)^{m-1} \Sigma \Delta_{2m}^2).$$

§3.—*Roots of the Equation* $|\Delta_{(m)} - x| = 0$.

20. Let us for convenience use $|\Delta_{(m)} - x|$ to denote the determinant $\Delta_{(m)}$ with the quantity x subtracted from each constituent along the principal diagonal. Then $|\Delta_{(m)} - x| = 0$ will be a polynomial in x of the order ω_m .

(a). If Δ is of the third order, we have the system of equations:

$$(-1)^3 |\Delta - x| = x^3 - \Sigma a_{ii} x^2 + \Sigma \Delta_{ii} x - \Delta = 0, \quad (1)$$

$$(-1)^3 |\Delta_{(2)} - x| = x^3 - \Sigma \Delta_{ii} x^2 + \Sigma \Delta_{(2)}^2 x - \Delta^2 = 0, \quad (2)$$

which may, in virtue of the relations found in Art. 19, be written

$$x^3 - \Sigma a_{ii} x^2 + \Sigma \Delta_{ii} x - \Delta = 0, \quad (1)$$

$$x^3 - \Sigma \Delta_{ii} x^2 + \Delta \Sigma a_{ii} x - \Delta^2 = 0. \quad (2)$$

From these equations we see that if the roots of equation (1) are g_1, g_2, g_3 , the roots of (2) are $g_1 g_2, g_2 g_3, g_1 g_3$. That is, the roots of equation (2) are the products of the roots of equation (1) taken two at a time.

(b). If Δ is of the fourth order, we have the system of equations

$$(-1)^4 |\Delta - x| = x^4 - \Sigma a_{ii} x^3 + \Sigma \Delta_{ii} x^2 - \Sigma \Delta_{(2)}^2 x + \Delta = 0, \quad (1)$$

$$(-1)^6 |\Delta_{(2)} - x| = x^6 - \Sigma \Delta_{ii} x^5 + \Sigma \Delta_{(2)}^2 x^4 - \Sigma \Delta_{(3)}^2 x^3 + \Sigma \Delta_{(2)}^4 x^2 - \Sigma \Delta_{(2)}^5 x + \Delta^2 = 0, \quad (2)$$

$$(-1)^4 |\Delta_{(3)} - x| = x^4 - \Sigma \Delta_{ii} x^3 + \Sigma \Delta_{(3)}^2 x^2 - \Sigma \Delta_{(3)}^3 x + \Delta^3 = 0. \quad (3)$$

* Muir's Theory of Determinants, Chap. III, §98.

On substituting the values already found for the coefficients in these equations, we may write them as follows:

$$x^4 - \sum a_{ii} x^3 + \sum \Delta_2 x^2 - \sum \Delta_3 x + \Delta = 0, \quad (1)$$

$$x^6 - \sum \Delta_2 x^5 + (\sum a_{ii} \sum \Delta_3 - \Delta) x^4 - \{(\sum \Delta_3)^2 + \Delta (\sum a_{ii})^2 - 2 \sum \Delta_2\} x^3 + \Delta (\sum a_{ii} \sum \Delta_3 - \Delta) x^2 - \Delta^2 \sum \Delta_2 x + \Delta^3 = 0, \quad (2)$$

$$x^4 - \sum \Delta_2 x^3 + \Delta \sum \Delta_2 x^2 - \Delta^2 \sum a_{ii} x + \Delta^3 = 0. \quad (3)$$

The coefficients in these equations show us that if g_1, g_2, g_3, g_4 are the roots of equation (1), then $g_1 g_2, g_1 g_3, g_1 g_4, g_2 g_3, g_2 g_4, g_3 g_4$ are the roots of equation (2), and $g_1 g_2 g_3, g_1 g_2 g_4, g_1 g_3 g_4, g_2 g_3 g_4$ are the roots of equation (3). That is, the roots of equation (2) are the products, two at a time, of the roots of equation (1), and the roots of equation (3) are the products, three at a time, of the roots of equation (1).

(c). It is apparently true in general that if Δ is a determinant of order ω , and if the roots of the equation

$$(-1)^* |\Delta - x| = 0 \quad (1)$$

are $g_1, g_2, g_3, \dots, g_\omega$, then the roots of the equation

$$(-1)^{**} |\Delta_{(2)} - x| = 0 \quad (2)$$

are the products of the roots of equation (1) taken two at a time,

the roots of the equation

$$(-1)^{m*} |\Delta_{(m)} - x| = 0 \quad (m)$$

are the products of the roots of equation (1) taken m at a time,

etc.,

etc.

§4.—*Symmetric and Skew Symmetric Determinants.*

21. If a symmetric determinant Δ of order ω vanishes, and if all principal minors of order $\omega - 1$ vanish, then all minors of order $\omega - 1$ vanish.

That is, if

$$\Delta = 0,$$

and

$$\Delta_{\omega-1} = 0 \text{ for all values of } s,$$

then

$$\Delta_{\omega-1} = 0 \quad " \quad " \quad " \quad r \text{ and } s.$$

Proof: The determinant $\Delta_{(\omega-1)}$ is symmetric (Art. 3), and therefore $\Delta_{\substack{\omega-1 \\ ij}} = \Delta_{\substack{\omega-1 \\ ji}}$; and since $\Delta_{(\omega-1)\substack{ss}}$ represents any principal minor of $\Delta_{(\omega-1)}$ of order two it may be written

$$\Delta_{(\omega-1)\substack{ss}} = \Delta_{\substack{\omega-1 \\ ii}} \Delta_{\substack{\omega-1 \\ jj}} - \Delta_{\substack{\omega-1 \\ ij}} \Delta_{\substack{\omega-1 \\ ji}} = -(\Delta_{\substack{\omega-1 \\ ij}})^2, \text{ since } \Delta_{\substack{\omega-1 \\ ss}} = 0.$$

But $\Delta_{(\omega-1)\substack{ss}} = 0$ (Art. 5),

$$\therefore \Delta_{\substack{\omega-1 \\ ij}} = 0 \text{ for all values of } i \text{ and } j;$$

that is, all minors of order $\omega - 1$ vanish.

22. We may now prove the following more general theorem:

If a symmetric determinant Δ of order ω vanishes, and if the sums of all principal minors of orders $\omega - 1, \omega - 2, \omega - 3, \dots, \omega - m + 1$ respectively vanish, and if all principal minors of order $\omega - m$ vanish, then all minors of order $\omega - m$ vanish.

That is, if $\Delta = 0,$

$$\Sigma \Delta_{\substack{\omega-1 \\ ss}} = 0,$$

$$\Sigma \Delta_{\substack{\omega-2 \\ ss}} = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\Sigma \Delta_{\substack{\omega-m+1 \\ ss}} = 0,$$

and if $\Delta_{\substack{\omega-m \\ ss}} = 0$ for all values of $s,$

then $\Delta_{\substack{\omega-m \\ rs}} = 0$ " " " r and $s.$

Proof: Let

$$\Delta_{(\omega-m)\substack{ss}} = \Delta_{\substack{\omega-m \\ ii}} \Delta_{\substack{\omega-m \\ jj}} - \Delta_{\substack{\omega-m \\ ij}} \Delta_{\substack{\omega-m \\ ji}},$$

and since $\Delta_{(\omega-m)}$ is symmetric and $\Delta_{\substack{\omega-m \\ ss}} = 0$ for all values of $s,$ we have

$$\Delta_{(\omega-m)\substack{ss}} = -(\Delta_{\substack{\omega-m \\ ij}})^2,$$

and

$$\therefore \Sigma \Delta_{(\omega-m)\substack{ss}} = -\Sigma (\Delta_{\substack{\omega-m \\ ij}})^2.$$

But

$$\begin{aligned} \Sigma \Delta_{(\omega-m)\substack{ss}} &= \Sigma \Delta_{\substack{\omega-m-1 \\ ss}} \Sigma \Delta_{\substack{\omega-m+1 \\ ss}} - \Sigma \Delta_{\substack{\omega-m-2 \\ ss}} \Sigma \Delta_{\substack{\omega-m+2 \\ ss}} \\ &\quad + \dots + (-1)^{\omega-m-1} \Sigma \Delta_{\substack{\omega-2m \\ ss}} \cdot \Delta = 0 \text{ (Art. 19),} \end{aligned}$$

since one factor of every term is zero, and

$$\therefore \sum (\Delta_{\omega-m}^i)^2 = 0,$$

consequently

$$\Delta_{\omega-m}^i = 0 \text{ for all values of } i \text{ and } j;$$

that is, all minors of order $\omega - m$ vanish.

23. This theorem is also true for skew symmetric determinants, for if Δ is skew symmetric and if

$$\Delta_{(\omega-m)s}^s = \Delta_{\omega-m}^i \Delta_{\omega-m}^j - \Delta_{\omega-m}^j \Delta_{\omega-m}^i,$$

then since $\Delta_{(\omega-m)}$ is either symmetric or skew symmetric according as $\omega - m$ is even or odd, we get, as in the case of Δ symmetric, that

$$\sum (\Delta_{\omega-m}^i)^2 = 0,$$

and

$$\therefore \Delta_{\omega-m}^i = 0 \text{ for all values of } i \text{ and } j.$$

It is to be observed, however, that the theorem for skew symmetric determinants may be stated as follows:

If a skew symmetric determinant Δ of order ω vanishes, and if the sums of all principal minors of orders $\omega - 1$, $\omega - 2$, ..., $\omega - m$ respectively vanish, then all minors of order $\omega - m$ vanish.

That is, if

$$\Delta = 0,$$

$$\sum \Delta_{\omega-1}^s = 0,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots$$

and

$$\sum \Delta_{\omega-m}^s = 0,$$

then

$$\Delta_{\omega-m}^r = 0 \text{ for all values of } r \text{ and } s.$$

For since a skew symmetric determinant of even order is a perfect square and a skew symmetric determinant of odd order vanishes, and since the principal minors of Δ are skew symmetric determinants of either odd or even order, it follows from the statement that the sum of all principal minors of order $\omega - m$ vanishes, that every principal minor of order $\omega - m$ vanishes.

§5.—*Determinants in General.*

24. If Δ is any determinant of order ω which vanishes, and if all principal minors of order $\omega - 1$ vanish, then at least $\omega^2 - \omega + 1$ of the minors of order $\omega - 1$ vanish.

For if
and
then
and

$$\begin{aligned} \Delta &= 0, \\ \Delta_{\omega-1} &= 0, \\ \Delta_{(\omega-1)2} &= 0, \\ \Delta_{(\omega-1)} &= \begin{vmatrix} 0 & \Delta_{\omega-1} & \dots & \Delta_{\omega-1} \\ \Delta_{\omega-1} & 0 & \dots & \Delta_{\omega-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta_{\omega-1} & \Delta_{\omega-1} & \dots & 0 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Now
therefore if
then

$$\begin{aligned} \Delta_{\omega-1} \cdot \Delta_{\omega-1} &= 0, \quad (s=1, 3, 4, \dots, \omega), \\ \Delta_{\omega-1} &\neq 0, \\ \Delta_{\omega-1} &= \Delta_{\omega-1} = \dots = \Delta_{\omega-1} = 0. \end{aligned}$$

Again,

$$\Delta_{\omega-1} \cdot \Delta_{\omega-1} = 0, \quad (s=1, 2, 4, \dots, \omega),$$

and if either of these factors does not vanish, then there are $\omega - 1$ others (besides those already zero) which do vanish. In this way we show that for every constituent which does not vanish there are $\omega - 1$ which do. There cannot, therefore, be more than $\omega - 1$ constituents which do not vanish, or in other words, there are at least $\omega^2 - (\omega - 1) = \omega^2 - \omega + 1$ which do.

II.—MATRICES.

25. As an immediate consequence of Art. 23 we have the following theorem in matrices:

Every skew symmetric matrix has a nullity equal to its vacuity.

26. If ϕ is an orthogonal matrix of order ω , and if $\phi_{(m)}$ denote the matrix whose constituents are the minors of order m of the content of ϕ , then each of the matrices $\phi_{(2)}, \phi_{(3)}, \dots, \phi_{(\omega-1)}$ is orthogonal.

This follows from the fact that every minor of $|\phi|$ is equal to its complementary,* and therefore

$$\begin{aligned} \phi_{(m)} &= \phi_{(n-m)} \\ \text{We know that } \phi_{(m)} \check{\phi}_{(n-m)} &= 1, \\ \therefore \phi_{(m)} \check{\phi}_{(m)} &= 1. \end{aligned}$$

27. If ϕ and ψ are two orthogonal matrices of the same odd order, then the matrix $(\phi - \psi)$ is vacuous.

This follows from the theorem that if ϕ_{ik} denote the constituent of ϕ in the i^{th} row and k^{th} column, then the determinant $|\lambda\phi_{ik} + \mu\psi_{ik}|$ is not altered by interchanging λ and μ .†

MASS. INST. TECHNOLOGY, Boston, Dec. 1, 1898.

* *Vide* Scott, Chap. XI, Art. 16.

† *Vide* Scott, Chap. XI, Art. 17.

On the Order of Terms in a Semi-Convergent Series.

BY HENRY P. MANNING.

We may give to a semi-convergent series of real terms any value we please by suitably changing the order of its terms. (See Jordan, *Cours d'Analyse*, t. I, 1893, p. 277.)

Suppose we have a series of the form

$$S = f(1) - f(2) + \dots + f(2n-1) - f(2n) + \dots,$$

where $f(x)$ is a continuous positive function, at least for large values of x .

We have

$$\lim f(n) = 0 \quad \text{and} \quad \lim \frac{f(n+1)}{f(n)} = 1,$$

but

$$f(1) + f(3) + \dots + f(2n-1) + \dots,$$

and

$$f(2) + f(4) + \dots + f(2n) + \dots,$$

both divergent series.

Suppose for all values of r greater than n

$$\frac{f(r+\theta)}{f(r)} > m \quad \text{and} \quad < M \quad (0 \leq \theta \leq 2),$$

then

$$\int_0^2 f(r+\theta) d\theta > \int_0^2 m f(r) d\theta$$

and

$$< \int_0^2 M f(r) d\theta,$$

or

$$f(r) < \frac{1}{2m} \int_r^{r+2} f(x) dx,$$

and

$$> \frac{1}{2M} \int_r^{r+2} f(x) dx.$$

m and M are functions of n , and for n indefinitely large they will usually have the same limit, 1.

Now in the series S we will take n' positive terms and n negative terms, $n' > n$, and consider the sum

$$S'_{n'+n} = f(1) + f(3) + \dots + f(2n' - 1) \\ - f(2) - f(4) - \dots - f(2n),$$

or $S'_{n'+n} = S_{2n} + f(2n+1) + f(2n+3) + \dots + f(2n' - 1).$

[If $n' < n$, these terms will be negative.]

$$\therefore S'_{n'+n} < S_{2n} + \frac{1}{2m} A,$$

and

$$> S_{2n} + \frac{1}{2M} A,$$

where

$$A = \int_{2n+1}^{2n'+1} f(x) dx. \quad (1)$$

There will be a limit if A has a limit, and we shall generally have

$$S' = S + \frac{1}{2} \lim A.$$

Since the series S is semi-convergent,

$$\lim \int_a^n f(x) dx = \infty, \text{ and } \lim \int_n^{n+a} f(x) dx = 0,$$

a being a finite quantity.

Equation (1) establishes a relation between n' and n if we assign some value to A ; or establishes the value of A corresponding to some relation connecting n' and n .

This relation will reduce approximately for large values of n to a simple form satisfied by integer values of n' and n .

If these solutions are

$$n' = n_1, n_3, \dots, n_{2r-1}, \dots,$$

$$n = n_2, n_4, \dots, n_{2r}, \dots,$$

and if we write

$$\alpha_{2r-1} = f(2n_{2r-3} + 1) + f(2n_{2r-3} + 3) + \dots + f(2n_{2r-1} - 1),$$

$$\alpha_{2r} = f(2n_{2r-3} + 2) + f(2n_{2r-2} + 4) + \dots + f(2n_{2r}),$$

we have

$$S' = (\alpha_1 - \alpha_2) + (\alpha_3 - \alpha_4) + \dots + (\alpha_{2r-1} - \alpha_{2r}) + \dots \\ = S + \frac{1}{2} \lim A.$$

The parentheses may be removed if the α 's tend to zero as a limit, and in any case we can arrange the order of the terms in the group $\alpha_{2r-1} - \alpha_{2r}$ in such

a way that the parenthesis will not be necessary. See second example discussed below.

S' , then, will be a series whose terms are the terms of the series S arranged in a different order, and we see how we can actually change the order of the terms of a given semi-convergent series, if it can be expressed as assumed above, so that it will take any value we please; and, conversely, we have a method of getting the value of the new series S' produced from S by a given change in the order of the terms, if the change can be expressed by a relation between n' and n as assumed.

Take for example the series

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$$

Here (1) becomes

$$\log (2n' + 1) = \log (2n + 1) + A.$$

Putting $A = 2 \log a$,

$$2n' + 1 = (2n + 1)a^2,$$

or we may say

$$n' = a^2 n.$$

We shall then get

$$S' = \log (2a).$$

We might have put $A = 2 \log [\frac{1}{2}f(n)]$,

$$\therefore n' = [\frac{1}{2}f(n)]^2 n$$

and

$$S' = \lim \log [f(n)].$$

As another example take

$$S = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} + \dots$$

(1) becomes $\sqrt{2n' + 1} = \sqrt{2n + 1} + \frac{1}{2}A.$

Putting $A = 4a$, and $2n + 1 = (2r + 1)^2$,

$$n = 2r(r + 1),$$

$$n' = 2(a + r)(a + r + 1),$$

$$n' - n = 2a(a + 2r + 1);$$

$$\Delta n = 4(r + 1),$$

$$\Delta n' = 4(a + r + 1),$$

$$\Delta^2 n = \Delta^2 n' = 4.$$

Hence we have the following system of values:

$$\begin{aligned}
 \text{For } r &= 1, \quad 2, \quad 3, \dots, r, \dots, \\
 \Delta n &= 4, \quad 8, \quad 12, \dots, 4(r+1), \dots, \\
 n &= 4, \quad 12, \quad 24, \dots, 2r(r+1), \dots, \\
 \alpha_{2r} &= \frac{1}{\sqrt{4r(r-1)+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{4r(r+1)}}. \\
 \Delta n' &= 4(a+1), \quad 4(a+2), \quad 4(a+3), \dots, 4(a+r+1), \dots, \\
 n' &= 2(a+1)(a+2), \quad 2(a+2)(a+3), \dots, 2(a+r)(a+r+1), \dots, \\
 \alpha_{2r-1} &= \frac{1}{\sqrt{4(a+r)(a+r-1)+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{4(a+r)(a+r+1)-1}}. \\
 2\sqrt{4(a+r)(a+r+1)+1} &= 2(2a+2r+1), \\
 2\sqrt{4r(r+1)+2} &= 4r+2 + \frac{1}{2r} - \frac{1}{4r^3} + \dots
 \end{aligned}$$

An application of the method employed in this paper will give

$$\begin{aligned}
 \lim \alpha_{2r-1} &= \lim [2(2a+2r+1) - 2(2a+2r-1)] = 4, \\
 \lim \alpha_{2r} &= \lim [2\sqrt{4r(r+1)+2} - 2\sqrt{4r(r-1)+2}] \\
 &= \lim \left(4 - \frac{1}{2r^3} + \dots \right),
 \end{aligned}$$

therefore

$$\lim (\alpha_{2r-1} - \alpha_{2r}) = \lim \left(\frac{1}{2r^3} - \dots \right).$$

The series

$$\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 + \dots$$

in this case will not be convergent but "oscillating." We may, however, mix the positive and negative terms, as suggested above, in such a way as to produce a convergent series having for value $S + 2a$ without using any parentheses.

α_{2r-1} and α_{2r} consist of terms of the original series $\Delta n'$ and Δn in number. Our rule then would be: Take $a+r+1$ positive terms and distribute among them $r+1$ negative terms. Do this four times for every value of r , beginning with zero.

Suppose we take $a = -1$. We have

$$S' = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{8}} \\ - \frac{1}{\sqrt{10}} + 1 - \frac{1}{\sqrt{12}} - \frac{1}{\sqrt{14}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{16}} - \frac{1}{\sqrt{18}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{20}} - \frac{1}{\sqrt{22}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{24}} \\ - \dots = S - 2.$$

We can say in regard to the series S : If $n' - n$ is a quantity of the same order of magnitude as n , S' will be divergent. If $n' - n$ is finite, $S' = S$. This will be true of any semi-convergent series.

If $n' - n$ is of the same order of magnitude as the square root of n , S' will usually converge to a value different from S .

BROWN UNIVERSITY, October, 1893.

On the Addition Theorems of Jacobi and Weierstrass.

BY E. STUDY.

In the paper "Sphärische Trigonometrie, orthogonale Substitutionen und elliptische Functionen" (Leipzig, Hirzel, 1893) an investigation has been made of the addition theorems of elliptic θ -functions due to Jacobi and Weierstrass, in order to simplify the statement of these theorems, considered as a whole, and to bring them into connection with certain geometrical ideas. The importance of the subject, which forms, as is well known, the true basis of a great and most beautiful part of the theory of elliptic functions, may justify our attempt to give still a new presentation of the matter.

To Mr. Caspari we owe the important remark that the said addition theorems may be derived from simple algebraic identities by means of a quadratic transformation (Math. Annalen, Bd. 28, S. 495). We shall make a liberal use of this principle, deducing from it not single formulæ, but at once the complete system of addition theorems, as stated in the above paper, without referring, however, to the theory of transformation.

Since the author's "Trigonometry" cannot be supposed to be in the hands of the readers of this journal, we may repeat the main definitions. The notation introduced here is, as far as the same ground is covered, exactly the same that has been used by Tannery and Molk in their "Traité des fonctions elliptiques" (I, Paris, 1893), to which the reader may be referred. Harkness and Morley, in their "Treatise on the Theory of Functions" (New York and London, 1893), have introduced a very similar system of notation, but a certain difference is caused by their supposing $\Re\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) > 0$, whereas we suppose $\Re\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) > 0$.

In two subsequent papers I purpose to extend these considerations to some more complicated addition theorems in the theory of elliptic and hyper-

elliptic functions, where new and important results can be derived from the principle of applying a transformation of the period 3 instead of the usual involutory transformation of the arguments.

Denoting by ω_1 and ω_3 the primitive periods ω and ω' of Weierstrass, and by ω_2 the negative sum of these periods $\omega_2 = -\omega'' = -\omega - \omega'$, we have

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0.$$

Now let λ, μ, ν denote the indices 1, 2, 3 in any one of the three arrangements (1, 2, 3); (2, 3, 1); (3, 1, 2): we have

$$\sqrt{e_\mu - e_\nu} = \frac{\zeta_\nu \omega_\mu}{\zeta \omega_\mu} = -\frac{e^{-\eta_\nu \omega_\mu} \zeta \omega_\lambda}{\zeta \omega_\mu \zeta \omega_\nu}, \quad \sqrt{e_\nu - e_\mu} = \frac{\zeta_\mu \omega_\nu}{\zeta \omega_\nu} = -\frac{e^{-\eta_\mu \omega_\nu} \zeta \omega_\lambda}{\zeta \omega_\mu \zeta \omega_\nu}, \quad (1)$$

$$\therefore \sqrt{e_\nu - e_\mu} = i \sqrt{e_\mu - e_\nu}.$$

Denote further the quantity $-e^{-\frac{\pi i}{4}}$ by $\sqrt{-i}$, and let the signs $\sqrt{e_\mu - e_\nu}$ be chosen in accordance with (1) and with the equations

$$\zeta \omega_\lambda = \frac{\sqrt{-i} e^{\frac{1}{2} \eta_\lambda \omega_\lambda}}{\sqrt{e_\nu - e_\lambda} \sqrt{e_\lambda - e_\mu}} \quad (2)$$

derived from (1): write finally

$$\sqrt{e_\nu - e_\mu} = \sqrt{i} \sqrt{e_\mu - e_\nu}, \quad (3)$$

where \sqrt{i} means the one or the other of the two values of this radical. Then the equations

$$\Theta u = \sqrt{e_\mu - e_\nu} \sqrt{e_\nu - e_\lambda} \sqrt{e_\lambda - e_\mu} \cdot \zeta u = \sqrt{G} \cdot \zeta u, \quad (4)$$

$$\Theta_\lambda u = \sqrt{e_\mu - e_\nu} \cdot \zeta_\lambda u, \quad \Theta_\mu u = \sqrt{e_\nu - e_\lambda} \cdot \zeta_\mu u, \quad \Theta_\nu u = \sqrt{e_\lambda - e_\mu} \cdot \zeta_\nu u,$$

in which λ, μ, ν now may denote 1, 2, 3 in an arbitrary but fixed order, define a set of four functions, $\Theta, \Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$, which we shall use instead of Weierstrass' functions $\zeta, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$.

The Θ -functions (4) are interchanged and at the same time multiplied by

certain factors, if we augment the argument u by a half period; the formulæ in question are

$$\begin{aligned}\Theta(u \pm \omega_\lambda) &= \pm (\sqrt{-i})^\epsilon \cdot e^{\frac{1}{2}\eta_\lambda \omega_\lambda} e^{\pm \eta_\lambda u} \cdot \Theta_\lambda u, \\ \Theta_\lambda(u \pm \omega_\lambda) &= \mp (\sqrt{-i})^{-\epsilon} \cdot e^{\frac{1}{2}\eta_\lambda \omega_\lambda} e^{\pm \eta_\lambda u} \cdot \Theta u, \\ \Theta_\mu(u \pm \omega_\lambda) &= (\sqrt{-i})^\epsilon \cdot e^{\frac{1}{2}\eta_\lambda \omega_\lambda} e^{\pm \eta_\lambda u} \cdot \Theta_\mu u, \\ \Theta_\nu(u \pm \omega_\lambda) &= (\sqrt{-i})^{-\epsilon} \cdot e^{\frac{1}{2}\eta_\lambda \omega_\lambda} e^{\pm \eta_\lambda u} \cdot \Theta_\nu u,\end{aligned}\tag{5}$$

etc., with *cyclical* permutation of λ, μ, ν .

The exponent ϵ has the value $+1$ or -1 , namely

$$\epsilon = \frac{(e_\mu - e_\nu)(e_\nu - e_\lambda)(e_\lambda - e_\mu)}{(e_2 - e_3)(e_3 - e_1)(e_1 - e_2)}.\tag{6}$$

The Θ functions are one-valued functions of u , but two-valued functions if also the ratio $\omega:\omega'$ is considered as variable (like the functions Θ of Mr. Weierstrass). But we may easily transform them into one-valued functions of all their arguments by multiplying them with a properly chosen function of $\omega:\omega'$. Taking, for instance, $G^{\frac{1}{2}} = \sqrt[4]{e_\mu - e_\nu} \sqrt[4]{e_\nu - e_\lambda} \sqrt[4]{e_\lambda - e_\mu}$ as a multiplier, we obtain one-valued homogeneous functions of the degree -2 satisfying the equation $\Theta'(0)^2 = \Theta_1(0)\Theta_2(0)\Theta_3(0)$ instead of the equation $\Theta'(0) = \Theta_1(0)\Theta_2(0)\Theta_3(0)$, satisfied by the Θ -functions as defined above; and taking $G^{-\frac{1}{2}}$ as a multiplier, we obtain one-valued homogeneous functions of the degree zero, satisfying the equation $1 = \Theta_1(0)\Theta_2(0)\Theta_3(0)$. The advantage of the above system of notation is simply this, that it enables us to express the quantity $\sqrt[4]{e_\mu - e_\nu}$ by $\Theta_\lambda(0)$.

Our functions $\Theta, \Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ are very similar to the functions $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \Theta_0$ used in the collection of formulæ edited by Mr. Schwarz, but they differ from them in some respects. They have especially this property, not to be found in the functions employed by Weierstrass, that from every formula which is right for a given arrangement of the marks λ, μ, ν , a right formula may be deduced by a *cyclical* permutation of the marks. It follows from this that we must decompose some of our sets of formulæ into three different sets if we prefer to apply the original notation of Mr. Weierstrass.

We start from a set of four equations, which are really a special case of the formulæ to be demonstrated, but can easily be derived from the very principles of this theory,* since they contain only two arguments, u, v :

* See, for instance, Weber, *Theorie der elliptischen Functionen*, II, §19. (Braunschweig, 1898.)

$$\begin{aligned}
& \Theta_\mu(0) \Theta_\nu(0) [\Theta(2u) \Theta_\lambda(2v) + \Theta_\lambda(2u) \Theta(2v)] \\
&= 2\Theta(u+v) \Theta_\lambda(u+v) \Theta_\mu(u-v) \Theta_\nu(u-v), \\
& \Theta_\mu(0) \Theta_\nu(0) [\Theta(2u) \Theta_\lambda(2v) - \Theta_\lambda(2u) \Theta(2v)] \\
&= 2\Theta_\mu(u+v) \Theta_\nu(u+v) \Theta(u-v) \Theta_\lambda(u-v), \\
& \Theta_\mu(0) \Theta_\nu(0) [\Theta_\mu(2u) \Theta_\nu(2v) + \Theta_\nu(2u) \Theta_\mu(2v)] \\
&= 2\Theta_\mu(u+v) \Theta_\nu(u+v) \Theta_\mu(u-v) \Theta_\nu(u-v), \\
& \Theta_\mu(0) \Theta_\nu(0) [\Theta_\mu(2u) \Theta_\nu(2v) - \Theta_\nu(2u) \Theta_\mu(2v)] \\
&= -2\Theta(u+v) \Theta_\lambda(u+v) \Theta(u-v) \Theta_\lambda(u-v).
\end{aligned} \tag{7}$$

Introducing here the abbreviation

$$T_{0\lambda}u = \Theta u \cdot \Theta_\lambda u, \quad T_{\mu\nu}u = \Theta_\mu u \cdot \Theta_\nu u,$$

we may write the equations (7) in the following form :

$$\begin{aligned}
\Theta_\mu(0) \Theta_\nu(0) \cdot \Theta(u+v) \Theta_\lambda(u-v) &= T_{0\lambda}u T_{\mu\nu}v + T_{\mu\nu}u T_{0\lambda}v, \\
\Theta_\mu(0) \Theta_\nu(0) \cdot \Theta_\lambda(u+v) \Theta(u-v) &= T_{0\lambda}u T_{\mu\nu}v - T_{\mu\nu}u T_{0\lambda}v, \\
\Theta_\mu(0) \Theta_\nu(0) \cdot \Theta_\mu(u+v) \Theta_\nu(u-v) &= T_{\mu\nu}u T_{\mu\nu}v - T_{0\lambda}u T_{0\lambda}v, \\
\Theta_\mu(0) \Theta_\nu(0) \cdot \Theta_\nu(u+v) \Theta_\mu(u-v) &= T_{\mu\nu}u T_{\mu\nu}v + T_{0\lambda}u T_{0\lambda}v.
\end{aligned} \tag{8}$$

Hence the four Θ -products on the left are connected with certain two functions ϕu and ψu by equations of the following peculiar form :

$$\begin{aligned}
\Theta(u+v) \Theta_\lambda(u-v) &= \mathfrak{U} \cdot \mathfrak{B} \cdot (U+V) \\
\Theta_\lambda(u+v) \Theta(u-v) &= \mathfrak{U} \cdot \mathfrak{B} \cdot (-U+V), \\
\Theta_\mu(u+v) \Theta_\nu(u-v) &= \mathfrak{U} \cdot \mathfrak{B} \cdot (-1+UV), \\
\Theta_\nu(u+v) \Theta_\mu(u-v) &= \mathfrak{U} \cdot \mathfrak{B} \cdot (1+UV),
\end{aligned} \tag{9}$$

where, for sake of simplicity, U, V stand for $\phi(u), \phi(v)$ and $\mathfrak{U}, \mathfrak{B}$ for $\psi(u), \psi(v)$.

Augmenting u and v by $\frac{\omega_\lambda}{2}$, we find that a similar system of four equations holds for the products $\Theta_\kappa(u+v) \Theta_\kappa(u-v)$:

$$\begin{aligned}
\Theta(u+v) \Theta(u-v) &= \mathfrak{U} \cdot \mathfrak{B} \cdot (U-V), \\
\Theta_\lambda(u+v) \Theta_\lambda(u-v) &= \varepsilon i \cdot \mathfrak{U} \cdot \mathfrak{B} \cdot (U+V), \\
\Theta_\mu(u+v) \Theta_\mu(u-v) &= \mathfrak{U} \cdot \mathfrak{B} \cdot (1+UV), \\
\Theta_\nu(u+v) \Theta_\nu(u-v) &= -\varepsilon i \cdot \mathfrak{U} \cdot \mathfrak{B} \cdot (1-UV).
\end{aligned} \tag{10}$$

U , U and \mathfrak{B} , V have here, of course, not the same meaning they have in the formulæ (9).

Now, between such equations as (9) or (10), written with different arguments, we are able to eliminate the quantities U , U , etc., by means of the following elementary theorem:

The quantities

$$\begin{aligned} r_0 &= (U - U_1)(U_2 - U_3), \\ r_1 &= -(U + U_1)(U_2 + U_3), \\ r_2 &= (1 + UU_1)(1 + U_2U_3), \\ r_3 &= -(1 - UU_1)(1 - U_2U_3), \end{aligned} \quad (11, I)$$

and the corresponding quantities $\mathfrak{r}_\alpha, \delta_\alpha$, derived from r_α by cyclical permutation of the indices 1, 2, 3, are connected by the following linear equations:

$$\begin{aligned} 0 = & \\ \begin{array}{cccc} r_0 + \mathfrak{p}_0 + \delta_0, & r_1 + \mathfrak{p}_2 + \delta_3, & r_2 + \mathfrak{p}_3 + \delta_1, & r_3 + \mathfrak{p}_1 + \delta_2, \\ r_1 + \mathfrak{p}_3 + \delta_2, & r_0 - \mathfrak{p}_1 + \delta_1, & r_3 + \mathfrak{p}_0 - \delta_3, & -r_2 + \mathfrak{p}_2 + \delta_0, \\ r_2 + \mathfrak{p}_1 + \delta_3, & -r_3 + \mathfrak{p}_3 + \delta_0, & r_0 - \mathfrak{p}_2 + \delta_2, & r_1 + \mathfrak{p}_0 - \delta_1, \\ r_3 + \mathfrak{p}_2 + \delta_1, & r_2 + \mathfrak{p}_0 - \delta_2, & -r_1 + \mathfrak{p}_1 + \delta_0, & r_0 - \mathfrak{p}_3 + \delta_3, \end{array} \end{aligned} \quad (12)$$

or, in a different arrangement,

$$\begin{aligned} r_0 + r_\alpha &= -\mathfrak{p}_0 + \mathfrak{p}_\alpha = -\delta_\beta - \delta_\gamma, \\ r_0 - r_\alpha &= \mathfrak{p}_\beta + \mathfrak{p}_\gamma = -\delta_0 - \delta_\alpha, \\ r_\beta + r_\gamma &= -\mathfrak{p}_0 - \mathfrak{p}_\alpha = \delta_0 - \delta_\alpha, \\ r_\beta - r_\gamma &= \mathfrak{p}_\beta - \mathfrak{p}_\gamma = \delta_\beta - \delta_\gamma, \end{aligned} \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3) \quad (13)$$

or finally,

$$\begin{aligned} -\delta_0 - \delta_1 - \delta_2 - \delta_3 &= 2r_0 = -\mathfrak{p}_0 + \mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2 + \mathfrak{p}_3, \\ \delta_0 + \delta_1 - \delta_2 - \delta_3 &= 2r_1 = -\mathfrak{p}_0 + \mathfrak{p}_1 - \mathfrak{p}_2 - \mathfrak{p}_3, \\ \delta_0 - \delta_1 + \delta_2 - \delta_3 &= 2r_2 = -\mathfrak{p}_0 - \mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2 - \mathfrak{p}_3, \\ \delta_0 - \delta_1 - \delta_2 + \delta_3 &= 2r_3 = -\mathfrak{p}_0 - \mathfrak{p}_1 - \mathfrak{p}_2 + \mathfrak{p}_3, \end{aligned} \quad (14)$$

etc. (with cyclical permutation of r, \mathfrak{p}, δ).

Before applying this to the Θ -functions we may, for sake of convenience, still change slightly the expressions r_α . Writing $-U$ or $\frac{1}{U}$ instead of U , and

neglecting factors common to all the quantities r, y, z , we obtain two other sets of 12 quantities enjoying the same property:

(11, II).

(11, III).

$$\begin{aligned} r_0 &= -(U + U_1)(U_2 - U_3), & r_0 &= (1 - UU_1)(U_2 - U_3), \\ r_1 &= (U - U_1)(U_2 + U_3), & r_1 &= -(1 + UU_1)(U_2 + U_3), \\ r_2 &= (1 - UU_1)(1 + U_2U_3), & r_2 &= (U + U_1)(1 + U_2U_3), \\ r_3 &= -(1 + UU_1)(1 - U_2U_3), & r_3 &= -(U - U_1)(1 - U_2U_3). \end{aligned}$$

Now, we substitute in the equations (11, I) and (11, II) instead of the quantities $U_x = \phi(u_x)$ their expressions in terms of the functions Θ from (10), and in the same way we introduce into (11, III) the Θ -products taken from (9). Then, suppressing again factors common to all the quantities r, y, z , we obtain the following expressions of 12 quantities connected by the equations (12), (13), (14):

(15, I).

$$\begin{aligned} r_0 &= \Theta(u_2 - u_3) \Theta(u_2 + u_3) \Theta(u + u_1) \Theta(u - u_1) = \Theta a \Theta b \Theta c \Theta d, \\ r_1 &= \Theta_\lambda(u_2 - u_3) \Theta_\lambda(u_2 + u_3) \Theta_\lambda(u + u_1) \Theta_\lambda(u - u_1) = \Theta_\lambda a \Theta_\lambda b \Theta_\lambda c \Theta_\lambda d, \\ r_2 &= \Theta_\mu(u_2 - u_3) \Theta_\mu(u_2 + u_3) \Theta_\mu(u + u_1) \Theta_\mu(u - u_1) = \Theta_\mu a \Theta_\mu b \Theta_\mu c \Theta_\mu d, \\ r_3 &= \Theta_\nu(u_2 - u_3) \Theta_\nu(u_2 + u_3) \Theta_\nu(u + u_1) \Theta_\nu(u - u_1) = \Theta_\nu a \Theta_\nu b \Theta_\nu c \Theta_\nu d, \end{aligned}$$

(15, II).

$$\begin{aligned} r_0 &= -\Theta(u_2 - u_3) \Theta(u_2 + u_3) \Theta_\lambda(u + u_1) \Theta_\lambda(u - u_1) = \Theta a \Theta b \Theta_\lambda c \Theta_\lambda d, \\ r_1 &= \Theta_\lambda(u_2 - u_3) \Theta_\lambda(u_2 + u_3) \Theta(u + u_1) \Theta(u - u_1) = -\Theta_\lambda a \Theta_\lambda b \Theta c \Theta d, \\ r_2 &= -\Theta_\mu(u_2 - u_3) \Theta_\mu(u_2 + u_3) \Theta_\nu(u + u_1) \Theta_\nu(u - u_1) = -\Theta_\mu a \Theta_\mu b \Theta_\nu c \Theta_\nu d, \\ r_3 &= \Theta_\nu(u_2 - u_3) \Theta_\nu(u_2 + u_3) \Theta_\mu(u + u_1) \Theta_\mu(u - u_1) = \Theta_\nu a \Theta_\nu b \Theta_\mu c \Theta_\mu d. \end{aligned}$$

(15, III).

$$\begin{aligned} r_0 &= \Theta(u_2 - u_3) \Theta_\lambda(u_2 + u_3) \Theta_\mu(u + u_1) \Theta_\nu(u - u_1) = \Theta a \Theta_\lambda b \Theta_\mu c \Theta_\nu d, \\ r_1 &= -\Theta_\lambda(u_2 - u_3) \Theta(u_2 + u_3) \Theta_\nu(u + u_1) \Theta_\mu(u - u_1) = \Theta_\lambda a \Theta b \Theta_\nu c \Theta_\mu d, \\ r_2 &= \Theta_\mu(u_2 - u_3) \Theta_\nu(u_2 + u_3) \Theta(u + u_1) \Theta_\lambda(u - u_1) = \Theta_\mu a \Theta_\nu b \Theta c \Theta_\lambda d, \\ r_3 &= -\Theta_\nu(u_2 - u_3) \Theta_\mu(u_2 + u_3) \Theta_\lambda(u + u_1) \Theta(u - u_1) = \Theta_\nu a \Theta_\mu b \Theta_\lambda c \Theta d. \end{aligned}$$

The quantities y_x, z_x are, in each case, derived from the quantities r_x by cyclical permutation of u_1, u_2, u_3 . The quantities a, b, c, d introduced here, and the

corresponding quantities a', b', c', d' and a'', b'', c'', d'' which enter into the expressions of the quantities \wp and ζ , are defined as follows:

$$\begin{aligned} a &= u_2 - u_3, & b &= -u_2 - u_3, & c &= u + u_1, & d &= -u + u_1, \\ a' &= u_3 - u_1, & b' &= -u_3 - u_1, & c' &= u + u_2, & d' &= -u + u_2, \\ a'' &= u_1 - u_2, & b'' &= -u_1 - u_2, & c'' &= u + u_3, & d'' &= -u + u_3, \end{aligned} \quad (16)$$

These quantities, forming the arguments of the Θ -functions x, y, z as defined by (15, I) or (15, II) or (15, III), are connected by the same linear equations that are satisfied by the functions x, y, z , namely,

$$\begin{aligned} -a'' - b'' - c'' - d'' &= 2a = -a' + b' + c' + d', \\ a'' + b'' - c'' - d'' &= 2b = -a' + b' - c' - d', \\ a'' - b'' + c'' - d'' &= 2c = -a' - b' + c' - d', \\ a'' - b'' - c'' + d'' &= 2d = -a' - b' - c' + d', \text{ etc.} \end{aligned} \quad (17)$$

This is the new formulation of the theorems of Jacobi and Weierstrass, as given in the author's Trigonometry. Its peculiarity consists in the statement of the whole system of 256 equations of the type of Weierstrass' equations with three terms, and in the bringing of these formulæ into close connection with the formulæ of Jacobi's; finally, in the division of all these formulæ into $1 + 9 + 6 = 16$ families. We indicate briefly, for the sake of completeness, the main features of this arrangement.

The expressions (15, I) define one single family. The formulæ (15, II) correspond to 9 families, derived from one another by cyclical permutations of λ, μ, ν and b, c, d . Finally (8, III) represents 6 families, since λ, μ, ν in these formulæ (as well as in (15, I)) may be taken in any order whatever.

Our formulæ are interchanged among each other if we augment the quantities a, b, c, d by multiples of $\omega_\lambda, \omega_\mu, \omega_\nu$, the sum of which is a multiple of a whole period. These substitutions constitute, of course, a *group* of commutative operations containing an infinite number of substitutions. Augmenting, however, one of the arguments by a double period $4\tilde{\omega}$, or two of the arguments by the same simple period $2\tilde{\omega}$, we transform every one of our formulæ into itself. Considering these substitutions, which form evidently a *subgroup* of the above group, as not different from the identical operation, we have in our group only a finite number, namely 256 substitutions. This finite group now contains a subgroup of 16 substitutions which interchange with one another only such formulæ as

belong to the same family. The generating operations of this subgroup consist in augmenting one argument by a simple period $2\tilde{\omega}$, and in augmenting all arguments a, b, c, d by the same half period $\tilde{\omega}$. Considering finally also these operations as not differing from identity, our group is reduced to 16 substitutions which interchange the 16 families, each family looked upon as a whole.

For further details and applications we refer to the last chapter of the paper mentioned above.

The process applied here to the demonstration of Jacobi's and Weierstrass's theorems is perhaps the most rapid one, producing all these formulæ at one time, and allowing a full insight into the structure of the whole system. But we must not forget that the above algebraic theorem, although utterly simple, is by no means obvious; it has apparently not hitherto presented itself. As a matter of fact, the Θ -functions are in general easier to deal with than such algebraic expressions.

JOHNS HOPKINS UNIVERSITY, *February, 1894.*

Summation of Logarithmic and Exponential Series.

BY A. CHESSIN.

§1. Let us consider an infinite series, of which the general term is

$$F(n)x^n,$$

where $F(n)$ is a rational function of n . We can suppose that the degree of the numerator is less than that of the denominator, for if this were not the case we could break up the general term into two, of which one $E(n)x^n$ is the general term of a well known series,* $E(n)$ being an integral function of n , and the other one

$$\phi(n) = \frac{G(n)}{H(n)}x^n, \quad (1)$$

would satisfy the above condition, the degree of $G(n)$ being less than that of $H(n)$. We can also suppose the form (1) to be irreducible, for if $G(n)$ and $H(n)$ had common divisors we could cancel them. We will suppose, moreover, that μ being the degree of $H(n)$,

$$H(n) = C(n + a_1)(n + a_2) \dots (n + a_\mu), \quad (2)$$

in which the a_1, a_2, \dots, a_μ are all different from each other, and can be any whole or fractional numbers, positive or negative. In the last case, however, it must be observed that the series may become divergent, as we shall see later.

Breaking up the fraction $\frac{G(n)}{H(n)}$ into partial ones, we shall have

$$\phi(n) = \sum_{e=1}^{e=\mu} \frac{A_e}{n + a_e} x^n. \quad (3)$$

* See Chrystal's Algebra, Chap. XX, §18.

Now, let $a_e = \frac{b_e}{c_e}$, the fraction supposed to be irreducible, then

$$\phi(n) = \sum_{e=1}^{e=\mu} \frac{A_e c_e}{nc_e + b_e} x^n, \quad (4)$$

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \phi(n) = \sum_{e=1}^{e=\mu} A_e c_e \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{x^n}{c_e n + b_e}. \quad (5)$$

We see from these expressions that if one of the b_e is negative,

$$\frac{x^n}{c_e n + b_e}$$

will be infinite for a certain value of n , namely, for $n = -\frac{b_e}{c_e}$. But n being a whole number and $\frac{b_e}{c_e}$ irreducible, it can only happen when $c_e = 1$, i. e. when a_e is a whole number. And we see at once that the condition, sufficient and necessary for the elimination of infinite terms in (5) is, that *for every whole negative number a_e there should be another whole negative number $a_{e'}$, and that at the same time $A_e x^{a_e} + A_{e'} x^{a_{e'}} = 0$* . If none of the a_e are whole numbers, no infinite terms will occur in (5) and the series will be always convergent for $-1 < x < 1$.

If in the expression of the infinite series

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{x^n}{c_e n + b_e}, \quad (6)$$

b_e is negative, we can transform it into one containing only positive terms in the denominator, and into a finite series. In fact we can write

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{x^n}{c_e n + b_e} = \sum_{n=0}^{n=m-1} \frac{x^n}{c_e n + b_e} + \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{x^{n+m}}{c_e n + (c_e m + b_e)},$$

taking m so that $(c_e m + b_e) > 0$. And the first series on the right is a finite one; the second has the form

$$x^m \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{x^n}{c_e n + b'_e},$$

where $b'_e > 0$. Thus we can limit ourselves to the series (6) and suppose $b_e > 0$.

§2. To find the sum of the series

$$S = \sum_0^{\infty} \frac{x^n}{na + b} \quad (1)$$

we will first make the substitution

$$x = y^a, \quad (2)$$

so that

$$S = \sum_0^{\infty} \frac{y^{na}}{na + b}. \quad (1')$$

Three cases are possible

- 1) $b < a$,
- 2) $b = ra$,
- 3) $b = ra + s \quad s < a$.

The last one is the most general one. Cases 1) and 2) can be derived from it by making either $r = 0$ or $s = 0$. We will begin with case

$$3) \quad b = ra + s,$$

$$S = \sum_0^{\infty} \frac{y^{na}}{s + (n+r)a} = y^{-ra} \sum_{n=r}^{\infty} \frac{y^{na}}{s + na} = \left. \begin{aligned} &= - \sum_{n=0}^{n=r-1} \frac{y^{(n-r)a}}{s + na} + y^{-ra} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{na}}{s + na} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

We know that

$$-\log(1-y) = \sum_{n=1}^{n=s-1} \frac{y^n}{n} + \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{y^{n+s}}{n+s}.$$

Let us put

$$\Theta(y) = -\log[(1-y)]^{y^{-r}} = \sum_{n=1}^{n=s-1} \frac{y^{n-s}}{n} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{y^n}{n+s}. \quad (4)$$

Now let $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_a$ be the roots of the equation

$$\rho^a = 1.$$

We know that

$$\sum_{s=1}^{s=a} \rho_s^n \begin{cases} = 0 & \text{when } n \neq \text{a multiple of } a, \\ = a & \text{when } n = 0 \text{ or } n = \text{a multiple of } a. \end{cases}$$

Hence,

$$\sum_{s=1}^{s=a} \Theta(\rho_s y) = \sum_{s=1}^{s=a} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(y\rho_s)^n}{n+s} = a \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{y^{na}}{na+s}. \quad (5)$$

But we also have

$$\left. \begin{aligned} \sum_{s=1}^{s=a} \Theta(\rho_s y) &= -\log \{(1-y\rho_1)^{(y\rho_1)^{-1}} (1-y\rho_2)^{(y\rho_2)^{-1}} \dots (1-y\rho_a)^{(y\rho_a)^{-1}}\} \\ &\quad - \sum_{s=1}^{s=a} \sum_{n=1}^{n=s-1} \frac{(y\rho_s)^{n-s}}{n} \\ &= -y^{-s} \log \{(1-y\rho_1)^{\rho_1^{-1}} (1-y\rho_2)^{\rho_2^{-1}} \dots (1-y\rho_a)^{\rho_a^{-1}}\} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

This last expression can be easily transformed into

$$\left. \begin{aligned} -y^{-s} \sum_{s=1}^{s=a} \left\{ \cos\left(\frac{2\pi es}{a}\right) \log \sqrt{1 - 2y \cos \frac{2\pi e}{a} + y^2} \right. \\ \left. - \sin \frac{2\pi es}{a} \tan^{-1} \left(\frac{y \sin \frac{2\pi e}{a}}{1 - y \cos \frac{2\pi e}{a}} \right) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Thus,

$$\left. \begin{aligned} S &= - \sum_{n=0}^{n=r-1} \frac{y^{(n-r)a}}{s+na} - \frac{y^{-b}}{a} \sum_{s=1}^{s=a} \left\{ \cos\left(\frac{2\pi se}{a}\right) \log \sqrt{1 - 2y \cos \frac{2\pi e}{a} + y^2} \right. \\ &\quad \left. - \sin \frac{2\pi se}{a} \tan^{-1} \left(\frac{y \sin \frac{2\pi e}{a}}{1 - y \cos \frac{2\pi e}{a}} \right) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

1). When a is even, this formula can be written thus:

$$\left. \begin{aligned} S &= - \sum_{n=0}^{n=r-1} \frac{y^{(n-r)a}}{s+na} - \frac{1}{ay^b} \log(1-y) - \frac{(-1)^s}{ay^b} \log(1+y) \\ &\quad - \frac{1}{ay^b} \sum_{s=1}^{s=\frac{a}{2}-1} \cos \frac{2\pi se}{a} \log \left[1 - 2y \cos \frac{2\pi e}{a} + y^2 \right] \\ &\quad + \frac{2}{ay^b} \sum_{s=1}^{s=\frac{a}{2}-1} \sin \frac{2\pi se}{a} \tan^{-1} \left(\frac{y \sin \frac{2\pi e}{a}}{1 - y \cos \frac{2\pi e}{a}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (9)_1$$

2). When a is odd,

$$S = - \sum_{n=0}^{n=r-1} \frac{y^{(n-r)a}}{s+na} - \frac{1}{ay^b} \log(1-y) \left. \begin{aligned} & - \frac{1}{ay^b} \sum_{e=1}^{e=\frac{a-1}{2}} \cos \frac{2\pi se}{a} \log \left[1 - 2y \cos \frac{2\pi e}{a} + y^2 \right] \\ & + \frac{2}{ay^b} \sum_{e=1}^{e=\frac{a-1}{2}} \sin \frac{2\pi se}{a} \tan^{-1} \left(\frac{y \sin \frac{2\pi e}{a}}{1 - y \cos \frac{2\pi e}{a}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (9)_2$$

Remark: When $y < 0$ and $a = \text{even number}$, the expression (1)' shows that S does not change its value. It seems at a first glance as if (9)₁ did not satisfy this property, but it is very easy to see that the expression (9)₁ does not change after the substitution of $(-y)$ for y . For example, the term,

$$\frac{1}{ay^b} \sum_{e=1}^{e=\frac{a}{2}-1} \cos \frac{2\pi se}{a} \log \left[1 - 2y \cos \frac{2\pi e}{a} + y^2 \right] \quad (10)$$

after this substitution will change into

$$\begin{aligned} & \frac{(-1)^s}{ay^b} \sum_{e=1}^{e=\frac{a}{2}-1} \cos \frac{2\pi se}{a} \log \left[1 + 2y \cos \frac{2\pi e}{a} + y^2 \right] \\ & = \frac{(-1)^s}{ay^b} \sum_{e_1=\frac{a}{2}-1}^{e_1=1} (-1)^s \cos \frac{2\pi se_1}{a} \log \left[1 - 2y \cos \frac{2\pi e_1}{a} + y^2 \right], \end{aligned}$$

and the last expression is obviously identical with (10).

In the special case, when

$$r = 0,$$

we will have instead of formulæ (9)₁ and (9)₂ the following ones:

1). $a = \text{even number}$,

$$S = - \frac{1}{ay^b} \log(1-y) - \frac{(-1)^b}{ay^b} \log(1+y) \left. \begin{aligned} & - \frac{1}{ay^b} \sum_{e=1}^{e=\frac{a}{2}-1} \cos \frac{2\pi se}{a} \log \left[1 - 2y \cos \frac{2\pi e}{a} + y^2 \right] \\ & + \frac{2}{ay^b} \sum_{e=1}^{e=\frac{a}{2}-1} \sin \frac{2\pi se}{a} \tan^{-1} \left(\frac{y \sin \frac{2\pi e}{a}}{1 - y \cos \frac{2\pi e}{a}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (11)_1$$

2). $a = \text{odd number}$,

$$S = -\frac{1}{ay^b} \log(1-y) - \frac{1}{ay^b} \sum_{e=1}^{e=\frac{a-1}{2}} \cos \frac{2\pi se}{a} \log \left[1 - 2y \cos \frac{2\pi e}{a} + y^2 \right] \\ + \frac{2}{ay^b} \sum_{e=1}^{e=\frac{a-1}{2}} \sin \frac{2\pi se}{a} \tan^{-1} \left(\frac{y \sin \frac{2\pi e}{a}}{1 - y \cos \frac{2\pi e}{a}} \right) \quad \left. \vphantom{\sum_{e=1}^{\frac{a-1}{2}}} \right\} (11)_2$$

In the special case, when $r > 0$ and $s = 0$,

$$\sum_{e=1}^{e=a} \Theta(y\rho_e) = -\log(1-y^a),$$

and thus

$$S = -\frac{1}{ay^b} \log(1-y^a) - \frac{1}{ay^b} \sum_{n=1}^{n=r-1} \frac{y^{na}}{n} \quad (12)$$

Remark: We have used the substitution

$$x = y^a \quad (2)$$

to find the sum of the series (1). When $x < 0$ this substitution is not always justified. In fact if a is even and $x < 0$, there is no real value of y that satisfies (2). To find the sum of the series (1) when $x < 0$ and a is an even number, we shall therefore make the substitution

$$x = -y^a, \quad (2),$$

so that

$$S = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n y^{na}}{na + b} \quad (13)$$

of which we will now find the expression.

§3. To find the sum (13) we proceed in the same way as we did to find the sum (1), §2. The only difference is that we shall have to consider the roots of the equation

$$\rho^a + 1 = 0$$

instead of those of the equation

$$\rho^a = 1.$$

Again,

$$S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{na}}{na+b} = (-y^a)^{-r} \sum_{n=r}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{na}}{s+na} \\ = (-y^a)^{-r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{na}}{s+na} - \sum_{n=0}^{n=r-1} \frac{(-1)^{n-r} y^{(n-r)a}}{s+na} \quad (1)$$

while $b = ra + s$. Introducing the function Θ again,

$$\Theta(y) = -\log(1-y)^{1/s} = \sum_{n=1}^{n=s-1} \frac{y^{n/s}}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n+s}.$$

We shall find in like manner

$$\sum_{s=1}^{s=a} \Theta(y\nu_s) = \sum_{s=1}^{s=a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(y\nu_s)^n}{n+s} = a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{na}}{na+s}, \quad (2)$$

and also

$$\sum_{s=1}^{s=a} \Theta(y\nu_s) = -y^{-r} \sum_{s=0}^{s=a-1} \left\{ \cos \frac{(2e+1)s\pi}{a} \log \sqrt{1 - 2y \cos \frac{(2e+1)\pi}{a} + y^2} \right. \\ \left. - \sin \frac{(2e+1)s\pi}{a} \tan^{-1} \left(\frac{y \sin \frac{(2e+1)\pi}{a}}{1 - y \cos \frac{(2e+1)\pi}{a}} \right) \right\} \quad (3)$$

$\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_a$ being the roots of the equation $\rho^a + 1 = 0$. Thus

$$S_1 = - \sum_{n=0}^{n=r-1} \frac{(-1)^{n-r} y^{(n-r)a}}{s+na} \\ - \frac{(-1)^r}{ay^b} \sum_{s=0}^{s=a-1} \left\{ \cos \frac{(2e+1)s\pi}{a} \log \sqrt{1 - 2y \cos \frac{(2e+1)\pi}{a} + y^2} \right. \\ \left. - \sin \frac{(2e+1)s\pi}{a} \tan^{-1} \left(\frac{y \sin \frac{(2e+1)\pi}{a}}{1 - y \cos \frac{(2e+1)\pi}{a}} \right) \right\} \quad (4)$$

1). When a is even,

$$S_1 = - \sum_{n=0}^{n=r-1} \frac{(-1)^{n-r} y^{(n-r)a}}{s + na} - \frac{(-1)^r}{ay^b} \sum_{s=0}^{s=\frac{a}{2}-1} \left\{ \cos \frac{(2e+1)s\pi}{a} \log \left(1 - 2y \cos \frac{(2e+1)\pi}{a} + y^2 \right) - 2 \sin \frac{(2e+1)s\pi}{a} \tan^{-1} \left(\frac{y \sin \frac{(2e+1)\pi}{a}}{1 - y \cos \frac{(2e+1)\pi}{a}} \right) \right\} \quad (5)_1$$

2). When a is odd,

$$S_1 = - \sum_{n=0}^{n=r-1} \frac{(-1)^{n-r} y^{(n-r)a}}{s + na} - \frac{(-1)^b}{ay^b} \log(1+y) - \frac{(-1)^r}{ay^b} \sum_{s=0}^{s=\frac{a-1}{2}} \left\{ \cos \frac{(2e+1)s\pi}{a} \log \left(1 - 2y \cos \frac{(2e+1)\pi}{a} + y^2 \right) - 2 \sin \frac{(2e+1)s\pi}{a} \tan^{-1} \left(\frac{y \sin \frac{(2e+1)\pi}{a}}{1 - y \cos \frac{(2e+1)\pi}{a}} \right) \right\} \quad (5)_2$$

In the special case of $r=0$ we have, when

1). a is even,

$$S_1 = - \frac{1}{ay^b} \sum_{s=0}^{s=\frac{a}{2}-1} \left\{ \cos \frac{(2e+1)b\pi}{a} \log \left(1 - 2y \cos \frac{(2e+1)\pi}{a} + y^2 \right) - 2 \sin \frac{(2e+1)b\pi}{a} \tan^{-1} \left(\frac{y \sin \frac{(2e+1)\pi}{a}}{1 - y \cos \frac{(2e+1)\pi}{a}} \right) \right\} \quad (6)_1$$

2). a is odd,

$$S_1 = - \frac{(-1)^b}{ay^b} \log(1+y) - \frac{1}{ay^b} \sum_{e=0}^{\frac{a-s}{2}} \left\{ \cos \frac{(2e+1)b\pi}{a} \log \left(1 - 2y \cos \frac{(2e+1)\pi}{a} + y^2 \right) - 2 \sin \frac{(2e+1)b\pi}{a} \tan^{-1} \left(\frac{y \sin \frac{(2e+1)\pi}{a}}{1 - y \cos \frac{(2e+1)\pi}{a}} \right) \right\}, \quad (6)_2$$

and finally, when $s=0$ and $r>0$,

$$S_1 = - \frac{1}{ay^b} \log(1+y^a) - \frac{(-1)^r}{ay^b} \sum_{n=1}^{n=r-1} \frac{(-1)^n y^{na}}{n}. \quad (7)$$

Thus we found the solution of our problem: to find the sum of the series

$$\sum_0^{\infty} \frac{x^n}{na+b}$$

for either positive or negative values of x . We shall now take up a few special cases.

§4. Let us consider the infinite series

$$S_{p,q} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{x^{na}}{[p+na][p+(n+1)a][p+(n+2)a] \dots [p+(n+q)a]} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \phi(p, q, n) \quad (1)$$

where a, p, q are whole, positive numbers. The test of convergence is obvious. Instead of breaking up the general term of the series into partial fractions, as we did in the general case, we shall establish a formula of reduction which will lead us quicker to the final results.

Multiply (1) by x^{ma} , then the following relation between the functions $S_{p,q}$ will result:

$$x^{ma} S_{p,q} = S_{p-ma,q} - \sum_{n=0}^{n=m-1} \phi(p-ma, q, n). \quad (2)$$

Another relation is found thus:

$$\begin{aligned} \phi(p, q, n) - \phi(p, q, n+1) &= (1-x^a) \phi(p+a, q, n) + a(1+q) \phi(p, q+1, n), \\ \phi(p, q, n+1) - \phi(p, q, n+2) &= (1-x^a) \phi(p+a, q, n+1) + a(1+q) \phi(p, q+1, n+1), \\ &\dots\dots\dots \\ \phi(p, q, n+m) - \phi(p, q, n+m+1) &= (1-x^a) \phi(p+a, q, n+m) + a(1+q) \phi(p, q+1, n+m). \end{aligned}$$

Adding all these formulæ, we get

$$\begin{aligned} \phi(p, q, n) - \phi(p, q, n+m+1) &= (1-x^a) \sum_{\mu=0}^{\mu=m} \phi(p+a, q, n+\mu) + a(1+q) \sum_{\mu=0}^{\mu=m} \phi(p, q+1, n+\mu). \end{aligned}$$

But

$$\begin{aligned} \phi(p+a, q, n+\mu) &= \phi(p+(n+1)a, q, \mu) \cdot x^{na}, \\ \phi(p, q+1, n+\mu) &= \phi(p+na, q+1, \mu) \cdot x^{na}. \end{aligned}$$

Hence

$$\begin{aligned} \phi(p, q, n) - \phi(p, q, n+m+1) &= (1-x^a) x^{na} \sum_{\mu=0}^{\mu=m} \phi(p+(n+1)a, q, \mu) + a x^{na} (1+q) \sum_{\mu=0}^{\mu=m} \phi(p+na, q+1, \mu). \end{aligned}$$

Now let m increase indefinitely. Then obviously, since we only deal with convergent series,

$$\lim_{m=\infty} \phi(p, q, n+m+1) = 0,$$

and the above relation becomes

$$\phi(p, q, n) = x^{na} (1-x^a) S_{p+(n+1)a,q} + a x^{na} (1+q) S_{p+na,q+1}. \quad (3)$$

For our purposes we shall need only special cases of (2) and (3). Let in (2) m be $= 1$ and write $p + a$ for p ; the formula then becomes

$$x^a S_{p+a, q} = S_{p, q} - \frac{1}{p(p+a)(p+2a) \dots (p+qa)}. \quad (4)$$

In (3) let n be $= 0$. This will give

$$\frac{1}{p(p+a)(p+2a) \dots (p+qa)} = (1-x^a) S_{p+a, q} + a(1+q) S_{p, q+1}. \quad (5)$$

From (4) and (5) we get an interesting relation between three functions $S_{p, q}$; namely,

$$S_{p+a, q} = S_{p, q} - a(q+1) S_{p, q+1}. \quad (6)$$

From (4) and (6) we easily obtain the required formula of reduction,

$$S_{p, q} = \frac{1}{aqx^a} \left\{ \frac{1}{p(p+a)(p+2a) \dots [p+(q-1)a]} - (1-x^a) S_{p, q-1} \right\}. \quad (7)$$

I have substituted q for $q+1$ and $q-1$ for q in this formula. We have thus diminished the symbol (q) in $S_{p, q}$ by unity. Giving q all the values from 0 to q in formula (7), we shall, by successive reduction, obtain the formula

$$S_{p, q} = \frac{(-1)^q}{q!} \left(\frac{1-x^a}{ax^a} \right)^q S_{p, 0} + \frac{1}{ax^a} \sum_{n=0}^{q-1} P_n \left(\frac{1-x^a}{ax^a} \right)^n, \quad (8)$$

$$P_n = \frac{(-1)^n}{q(q-1)(q-2) \dots (q-n) \cdot p(p+a)(p+2a) \dots [p+(q-n-1)a]}. \quad (9)$$

But $S_{p, 0}$ is what we have called S before; that is,

$$S_{p, 0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{na}}{p+na}, \quad (\text{See } \S 2, \text{ formula (1)'}) \quad (10)$$

and we have found the expression of this sum (formulae (8) and (9), §2); thus our problem is solved.

In the special case of $a = 1$, formulae (8) and (9) reduce to

$$S_{p, q}^0 = - \frac{(-1)^q (1-x)^q}{q! x^{p+q}} \left\{ \log(1-x) + \sum_{n=1}^{p-1} \frac{x^n}{n} \right\} + \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{q-1} \frac{(-1)^n}{q(q-1) \dots (q-n) \cdot p(p+1) \dots (p+q-n-1)} \left(\frac{1-x}{x} \right)^n \quad (11)$$

§5. Let us consider the series

$$S'_{p,q} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{na}}{[p+na][p+(n+1)a] \dots [p+(n+q)a]} = \sum_{n=0}^{\infty} \Psi(p, q, n). \quad (1)$$

By a process similar to that used in §4 we shall find

$$S'_{p,q} = \frac{1}{q!} \left(\frac{1+x^a}{ax^a} \right)^q S'_{p,0} - \frac{1}{ax^a} \sum_{n=0}^{q-1} P'_n \left(\frac{1+x^a}{ax^a} \right)^n, \quad (2)$$

where

$$P'_n = (-1)^n P_n. \quad (3)$$

It is obvious that (2) could be directly received by substituting $(-x^a)$ for x^a in formula (8) of the preceding section.

Again,

$$S'_{p,0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{na}}{p+na}$$

is the series (13), §2, and we have given the expression of its sum in §3 (see formulæ (5), (6), (7)).

In the special case of $a = 1$, formula (2) reduces to

$$\begin{aligned} S'_{p,q} = & -\frac{(-1)^p}{q!} \frac{(1+x)^p}{x^{p+q}} \left\{ \log(1+x) + \sum_{n=1}^{p-1} \frac{(-1)^n x^n}{n} \right\} \\ & - \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{q-1} \frac{1}{q(q-1) \dots (q-n) \cdot p(p+1) \dots (p+q-n-1)} \left(\frac{1+x}{x} \right)^n. \end{aligned}$$

§6. Let us now consider the series

$$S''_{p,q} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{[p+na][p+(n+1)a] \dots [p+(n+q)a]}. \quad (1)$$

When $x > 0$, we reduce the case to that considered in §4 by the substitution

$$x = y^a.$$

When $x < 0$, we reduce it to the case considered in §5 by the substitution

$$-x = y^a.$$

Therefore we shall find the expressions for $S''_{p,q}$ if in the formula (8), §4, we substitute x for x^a , and in the formula (2), §5, substitute $-x$ for x^a . Thus,

$$S''_{p,q} = \frac{(-1)^q}{q!} \left(\frac{1-x}{ax} \right) S''_{p,0} + \frac{1}{ax} \sum_{n=0}^{q-1} P_n \left(\frac{1+x}{ax} \right)^n \quad (2)$$

for positive or negative values of x . But the expression of $S''_{p,0}$ will be different according to whether x is positive or negative. For

$$S''_{p,0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{p+na},$$

and we have seen that, to find the sum of this series, we must distinguish the two cases of $x \geq 0$. The expressions are given by the formulæ (9), §2, when $x > 0$, if in those formulæ we substitute $x^{1/a}$ for y ; and by formulæ (5), §3, when $x < 0$, if we make the substitution $(-x)^{1/a}$ for y . Thus,

1). $x > 0$ and a is even :

$$\left. \begin{aligned} S''_{p,0} = & - \sum_{n=0}^{n=r-1} \frac{x^{n-r}}{s+na} - \frac{1}{ax^{p/a}} \log(1-x^{1/a}) - \frac{(-1)^s}{ax^{p/a}} \log(1+x^{1/a}) \\ & - \frac{1}{ax^{p/a}} \sum_{s=1}^{s=\frac{a}{2}-1} \cos \frac{2\pi se}{a} \log \left[1 - 2x^{1/a} \cos \frac{2\pi e}{a} + x^{2/a} \right] \\ & + \frac{2}{ax^{p/a}} \sum_{s=1}^{s=\frac{a}{2}-1} \sin \frac{2\pi se}{a} \tan^{-1} \left(\frac{x^{1/a} \sin \frac{2\pi e}{a}}{1 - x^{1/a} \cos \frac{2\pi e}{a}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

2). $x > 0$ and a is odd :

$$\left. \begin{aligned} S''_{p,0} = & - \sum_{n=0}^{n=r-1} \frac{x^{n-r}}{s+na} - \frac{1}{ax^{p/a}} \log(1-x^{1/a}) \\ & - \frac{1}{ax^{p/a}} \sum_{s=1}^{s=\frac{a-1}{2}} \cos \frac{2\pi se}{a} \log \left[1 - 2x^{1/a} \cos \frac{2\pi e}{a} + x^{2/a} \right] \\ & + \frac{2}{ax^{p/a}} \sum_{s=1}^{s=\frac{a-1}{2}} \sin \frac{2\pi se}{a} \tan^{-1} \left(\frac{x^{1/a} \sin \frac{2\pi e}{a}}{1 - x^{1/a} \cos \frac{2\pi e}{a}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

3). When $x < 0$ and a is even:

$$\left. \begin{aligned} S_{p,0}'' &= - \sum_{n=0}^{n=r-1} \frac{x^{n-r}}{s+na} \\ &- \frac{(-1)^r}{a(-x)^{p/a}} \sum_{e=0}^{e=\frac{a}{2}-1} \left\{ \cos \frac{(2e+1)s\pi}{a} \log \left[1 - 2(-x)^{1/a} \cos \frac{(2e+1)\pi}{a} + (-x)^{2/a} \right] \right. \\ &\left. - 2 \sin \frac{(2e+1)s\pi}{a} \tan^{-1} \left(\frac{(-x)^{1/a} \sin \frac{(2e+1)\pi}{a}}{1 - (-x)^{1/a} \cos \frac{(2e+1)\pi}{a}} \right) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

4). When $x < 0$ and a is odd:

$$\left. \begin{aligned} S_{p,0}'' &= - \sum_{n=0}^{n=r-1} \frac{x^{n-r}}{s+na} - \frac{1}{ax^{p/a}} \log(1 - x^{1/a}) \\ &- \frac{(-1)^s}{ax^{p/a}} \sum_{e=0}^{e=\frac{a-3}{2}} \cos \frac{(2e+1)s\pi}{a} \log \left[1 + 2x^{1/a} \cos \frac{(2e+1)\pi}{a} + x^{2/a} \right] \\ &+ \frac{(-1)^s}{ax^{p/a}} \sum_{e=0}^{e=\frac{a-3}{2}} \sin \frac{(2e+1)s\pi}{a} \tan^{-1} \left(\frac{-x^{1/a} \sin \frac{(2e+1)\pi}{a}}{1 + x^{1/a} \cos \frac{(2e+1)\pi}{a}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Formula (6) is identical with formula (4).

§7. Consider now the series

$$S_{p,q}^* = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{x^n}{(p+n)(p+a+n)(p+2a+n) \dots (p+qa+n)}; \quad (1)$$

it can be written in the following way:

$$\left. \begin{aligned} S_{p,q}^* &= \sum_{n=0}^{n=a-1} \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{x^{n+ma}}{[p+n+ma][p+n+(m+1)a] \dots [p+n+(m+q)a]} \\ &= \sum_{n=0}^{n=a-1} x^n S_{p+n,q} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

and as we found the expression for the sum $S_{p,q}$ in §4, we can consider the problem as solved.

§8. Let us now consider another type of series, the general term of which is

$$\frac{F(n)x^n}{(an+b)!},$$

where again $F(n)$ is a rational function of n ; a and b are whole positive numbers. In the general case,

$$F(n) = E(n) + \frac{G(n)}{H(n)},$$

where $E(n)$ is an integral function of n and the degree of $G(n)$ is less than that of $H(n)$. We have thus to consider the two series:

$$1) \quad \sum_0^{\infty} \phi(n); \quad \phi(n) = \frac{E(n)x^n}{(an+b)!},$$

$$2) \quad \sum_0^{\infty} \psi(n); \quad \psi(n) = \frac{G(n)x^n}{H(n)(an+b)!}.$$

The summation of the first series can be reduced to the question of summing the series with the general term

$$\frac{E(n)x^n}{n!},$$

and this summation is known.* In fact, suppose we substitute $\frac{n-b}{a}$ for n in $E(n)$, and let

$$E\left(\frac{n-b}{a}\right) = E_1(n),$$

where $E_1(n)$ is also an integral function of n . We can find by known methods the sum of the series

$$\sum_0^{\infty} \frac{E_1(n)x^n}{n!}.$$

* See Chrystal's Algebra, II, p. 209, on integro-exponential series.

Suppose it is equal to $\zeta_1(x)$. Then

$$\sum_0^{\infty} E \frac{\left(\frac{n-b}{a}\right) x^{n-b}}{n!} = x^{-b} \zeta_1(x). \quad (1)$$

But

$$\sum_0^{\infty} \frac{E \left(\frac{n-b}{a}\right) x^{n-b}}{n!} = \sum_0^{b-1} \frac{E \left(\frac{n-b}{a}\right) x^{n-b}}{n!} + \sum_0^{\infty} \frac{E \left(\frac{n}{a}\right) x^n}{(n+b)!},$$

and if we put

$$\mathfrak{S}_1(x) = x^{-b} \zeta_1(x) - \sum_0^{b-1} \frac{E_1(n) x^{n-b}}{n!}, \quad (2)$$

we shall have

$$\sum_0^{\infty} \frac{E \left(\frac{n}{a}\right) x^n}{(n+b)!} = \mathfrak{S}_1(x). \quad (3)$$

Now let again $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_a$ be the roots of the equation

$$\rho^a = 1.$$

Then

$$\sum_{s=1}^{s=a} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{E \left(\frac{n}{a}\right) (x\rho_s)^n}{(n+b)!} = a \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{E(n) x^{na}}{(na+b)!} = \sum_{s=1}^{s=a} \mathfrak{S}_1(x\rho_s),$$

or

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{E(n) x^{na}}{(na+b)!} = \frac{1}{a} \sum_{s=1}^{s=a} \mathfrak{S}_1(x\rho_s) = \frac{1}{ax^b} \sum_{s=1}^{s=a} \frac{\zeta_1(x\rho_s)}{\rho_s^b}, \quad (4)$$

and as the expression on the right side is known, the function $\zeta(x)$ being known, the sum of the series (4) is found. And we need only substitute x for x^a to get the required sum of the series 1),

$$\sum_0^{\infty} \frac{E(n) x^n}{(an+b)!} = \frac{1}{ax^{b/a}} \sum_{s=1}^{s=a} \frac{\zeta_1(x^{1/a} \rho_s)}{\rho_s^b}. \quad (5)$$

Remark: We must observe again that we cannot make the substitution $x = y^a$ when $x < 0$ and a is an even number. In this case we shall again make

the substitution $x = y^a$, so that

$$\sum_0^{\infty} \frac{E(n) x^n}{(an+b)!} = \sum_0^{\infty} \frac{E(n) \cdot (-1)^n y^{na}}{(an+b)!}, \quad (6)$$

and we shall introduce the roots (v_1, v_2, \dots, v_a) of the equation $v^a + 1 = 0$, instead of those of $v^a = 1$. Then, as it is easy to see,

$$\sum_0^{\infty} \frac{E(n) x^n}{(an+b)!} = \frac{1}{a(-x)^{b/a}} \sum_{s=1}^{s=a} \frac{\zeta[(-x)^{1/a} v_s]}{v_s^b}. \quad (7)$$

We have supposed a and b both to be whole positive numbers. It is obvious, however, that the solution is possible when b is negative, if only we observe that the expression $m!$ has a sense only when $m > 0$. Thus, if the general term were

$$\frac{E(n) x^n}{(an-b)!}$$

we would have to consider the values of $n > \frac{b}{a}$. Suppose n_1 is the first whole number $> \frac{b}{a}$, then we would consider the series

$$\sum_{n=n_1}^{n=\infty} \frac{E(n) x^n}{(an-b)!}. \quad (8)$$

Let us again put

$$E\left(\frac{n+b}{a}\right) = E_2(n), \quad (9)$$

$$\zeta_2(x) = \sum_0^{\infty} \frac{E_2(n) x^n}{n!}, \quad (10)$$

$$S_2(x) = x^b \zeta_2(x) + \sum_{n=n_1}^{n=n_1+b-1} \frac{E\left(\frac{n}{a}\right) x^n}{(n-b)!}. \quad (11)$$

In the expression of the last sum only those terms are supposed to be taken for which the expression $(n-b)!$ has a sense, i. e. for which $n-b > 0$. Then

$$\sum_{n=n_1}^{n=\infty} \frac{E\left(\frac{n}{a}\right) x^n}{(n-b)!} = S_2(x).$$

Here also only terms, for which $n - b > 0$, are to be taken. Operating as before we find

$$\sum_{n=n_1}^{n=\infty} \frac{E(n) x^{na}}{(na - b)!} = \frac{1}{a} \sum_{e=1}^{e=a} \mathfrak{S}_2(x\rho_e) = \frac{x^b}{a} \sum_{e=1}^{e=a} \rho_e^b \zeta_2(x\rho_e), \quad (12)$$

or

$$\sum_{n=n_1}^{n=\infty} \frac{E(n) x^n}{(na - b)!} = \frac{x^{b/a}}{a} \sum_{e=1}^{e=a} \rho_e^b \zeta_2(x^{1/a} \rho_e) \quad (13)$$

when $x > 0$ and

$$\sum_{n=n_1}^{n=\infty} \frac{E(n) x^n}{(na - b)!} = \frac{(-x)^{b/a}}{a} \sum_{e=1}^{e=a} \rho_e^b \zeta_2[(-x)^{1/a} \rho_e]$$

when $x < 0$.

§9. Let us now take the second part of our series:

$$\sum_0^\infty \psi(n); \quad \psi(n) = \frac{G(n) x^n}{H(n) (an + b)!}.$$

We will again suppose that $\frac{G(n)}{H(n)}$ is in irreducible form and that

$$H(n) = C(n + \alpha_1)(n + \alpha_2) \dots (n + \alpha_\mu),$$

in which expression the $\alpha_1, \dots, \alpha_\mu$ are all different from each other and can be any whole or fractional numbers, positive or negative, with the same restriction in the last case as in §1. The whole numbers a and b are again positive. Breaking up the function into partial fractions, we shall obtain expressions of the form

$$\frac{A_e x^n}{(n + \alpha_e)(an + b)!}, \quad (1)$$

and we shall have

$$\sum_0^\infty \psi(n) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \sum_{e=1}^{e=\mu} \frac{A_e x^n}{(n + \alpha_e)(an + b)!}. \quad (2)$$

Let again $\alpha_e = \frac{\beta_e}{\gamma_e}$, and let the fraction be irreducible, then

$$\sum_0^{\infty} \psi(n) = \sum_{e=1}^{\infty} A_e \gamma_e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(\gamma_e n + \beta_e)(an + b)!} \quad (3)$$

We see again that only when a number α_e is a *whole negative number*, infinite terms will occur in (3). And the condition necessary and sufficient for the elimination of such terms is that *for every such α_e there should be another whole negative number $\alpha_{e'}$, and that at the same time*

$$\frac{A_e x^{-\alpha_e}}{(-a\alpha_e + b)!} + \frac{A_{e'} x^{-\alpha_{e'}}}{(-a\alpha_{e'} + b)!} = 0.$$

If these conditions subsist, the series will be convergent for all positive and negative values of x (except $x = \infty$).

If in (3) any of the β_e are negative, we can reduce the expression to one in which the corresponding number will be positive, by operating just in the same way as in §1. Thus all is reduced to find the sum of the series

$$\sum_0^{\infty} \frac{x^n}{(an + \beta)(an + b)!}, \quad (4)$$

where α, β, a, b are all positive whole numbers.

§10. From the expression of the development of e^x into a series we deduce the formula

$$x^{-\lambda b} e^{x^\lambda} = \sum_{n=0}^{n=b-1} \frac{x^{\lambda(n-b)}}{n!} + \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{x^{\lambda n}}{(n+b)!}, \quad (1)$$

in which $\lambda = \frac{a}{a}$. Multiply (1) by $x^{\beta-1}$ and integrate between the limits 0 and x :

$$\int_0^x e^{x^\lambda} x^{\beta-\lambda b-1} dx = \sum_{n=0}^{n=b-1} \frac{x^{\lambda(n-b)+\beta}}{n! [\lambda(n-b) + \beta]} + \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{x^{\lambda n + \beta}}{(n+b)! (\lambda n + \beta)}.$$

Let us introduce the function

$$\Psi(x) = x^{-\beta} \int_0^x e^{x^\lambda} x^{\beta-\lambda b-1} dx - \sum_{n=0}^{n=b-1} \frac{x^{\lambda(n-b)}}{n! [\lambda(n-b) + \beta]}. \quad (2)$$

Then

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{an}}{(n+b)! (\lambda n + \beta)} = \Psi(x). \quad (3)$$

Let again $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_a$ be the roots of the equation

$$\rho^a = 1.$$

Then by the same device as before we shall find

$$\sum_{e=1}^{e=a} \Psi(x \rho_e^{1/a}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{e=1}^{e=a} \frac{\rho_e^n x^{an}}{(n+b)! (\lambda n + \beta)} = a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{an}}{(an+b)! (an + \beta)}. \quad (4)$$

In this formula substitute $x^{1/a}$ for x (when $x > 0$). Then

$$\sum_0^{\infty} \frac{x^n}{(an+b)! (an + \beta)} = \frac{1}{a} \sum_{e=1}^{e=a} \Psi[x^{1/a} \rho_e^{a/a}] = \frac{1}{a} \sum_{e=1}^{e=a} \Psi[x^{1/a} \rho'_e], \quad (5)$$

where

$$\rho'_e = \cos \frac{2\pi e}{a} + i \sin \frac{2\pi e}{a}; \quad (6)$$

that is to say, the ρ'_e are roots of the equation $\rho^a = 1$; but as $a \neq a$, we shall not generally have a complete set of these roots in the expression on the right of (5). In formula (2) the sum on the right will vanish when $b < a$ after the substitution $x \rho_e^{1/a}$ for x ; when $b > 0$, those terms for which $b - n = a$ multiple of a will remain on account of the property of the roots of unity.

For $x < 0$ we shall find the formula

$$\sum_0^{\infty} \frac{x^n}{(an+b)! (an + \beta)} = \frac{1}{a} \sum_{e=1}^{e=a} \Psi[(-x)^{1/a} \nu_e^{a/a}] = \frac{1}{a} \sum_{e=1}^{e=a} \Psi[(-x)^{1/a} \nu'_e], \quad (7)$$

where

$$\nu'_e = \cos \frac{(2e+1)\pi}{a} + i \sin \frac{(2e+1)\pi}{a}; \quad (8)$$

that is to say, the ν'_e are roots of the equation $\nu^a + 1 = 0$. Thus we can consider our problem as solved.

Remark: We made the supposition $b > 0$ throughout the last analysis. But the results are obviously valid for $b < 0$ if we only remember that in this

case the summation must be done from $n = n_1$ to $n = \infty$, where n_1 is the first whole number greater than $-\frac{b}{a}$.

§11. The conditions necessary and sufficient for the integrability of the expression (2), §10, are obviously the following ones:

$$\left. \begin{array}{l} 1) \quad \beta = \kappa\lambda = \kappa \frac{a}{a}, \\ 2) \quad \kappa \geq b + 1. \end{array} \right\} \quad (1)$$

Then:

$$\Psi(x) = \frac{x^{-\kappa\lambda}}{\lambda} \int_0^{x^\lambda} e^y y^{\kappa-b-1} dy - \sum_{n=0}^{n=b-1} \frac{x^{\lambda(n-b)}}{n! [\lambda(n-b) + \beta]}. \quad (2)$$

$$\text{Suppose} \quad \kappa - (b + 1) = m. \quad (3)$$

Then

$$\left. \begin{array}{l} \int_0^{x^\lambda} e^y y^m dy = e^{x^\lambda} [x^{\lambda m} - m x^{\lambda(m-1)} + m(m-1) x^{\lambda(m-2)} \\ \quad \quad \quad - \dots \pm m(m-1) \dots 2.1] \mp (m!) \end{array} \right\} \quad (4)$$

But if the conditions (1) subsist, we shall have

$$\frac{1}{an + \beta} = \frac{a}{a(na + \kappa)}$$

and

$$\sum_0^\infty \frac{x^n}{(an + b)! (an + \beta)} = \frac{a}{a} \sum_0^\infty \frac{x^n}{(an + b)! (an + \kappa)};$$

that is to say, we can suppose in formulæ (5) and (7), §10,

$$\begin{array}{l} \alpha = a, \\ \beta = \kappa, \end{array}$$

if only we multiply the formulæ by $\frac{a}{a}$, hence

$$\sum_0^\infty \frac{x^n}{(an + b)! (an + \beta)} = \frac{1}{a} \sum_{e=1}^{e=a} \Psi[x^{1/a} \rho_e], \quad (5)$$

when $x > 0$, and

$$\sum_0^\infty \frac{x^n}{(an + b)! (an + \beta)} = \frac{1}{a} \sum_{e=1}^{e=a} \Psi[(-x)^{1/a} \nu_e], \quad (6)$$

when $x < 0$. Moreover, we have then

$$\Psi(x) = x^{-\kappa} \int_0^x e^x x^m dx - \sum_{n=0}^{n=b-1} \frac{x^{n-b}}{n! (n-b+\kappa)}, \quad (7)$$

$$\int_0^x e^x x^m dx = e^x \left[x^m - m x^{m-1} + m(m-1) x^{m-2} - \dots \pm m(m-1) \dots 2.1 \right] \mp (m!), \quad (8)$$

and from these formulæ it will be easy to deduce

$$\sum_{e=1}^{e=a} \Psi[x^{1/a} \rho_e] \text{ and } \sum_{e=1}^{e=a} \Psi[(-x)^{1/a} \nu_e].$$

Interesting applications can be made, but we will not go into further details.

Note on the General Solution of Bessel's Equation.

BY A. CHESSIN.

The general solution of Bessel's equation

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dz}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) z = 0,$$

when n is neither an integer nor zero, as we know, is

$$z = AJ_n(x) + BJ_{-n}(x),$$

where

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{(-1)^\kappa \left(\frac{x}{2}\right)^{2\kappa}}{\kappa! (n+\kappa)!}, \quad (1)$$

and $J_{-n}(x)$ is exactly the same function of $-n$ as $J_n(x)$ is of n . If n is an integer, which we can suppose to be positive, the general solution of Bessel's equation is

$$z = AJ_n(x) + BK_n(x), \quad (2)$$

where*

$$K_n(x) = J_n(x) \log x - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n} \sum_{\kappa=0}^{n-1} \frac{(n-\kappa-1)!}{\kappa!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\kappa} - \frac{1}{2} S_n(x), \quad (3)$$

$$S_n(x) = S_{n1}(x) + S_{n2}(x); \quad (4)$$

$$S_{n1}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{(-1)^\kappa \left(\frac{x}{2}\right)^{2\kappa}}{\kappa! (n+\kappa)!} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{\kappa}\right], \quad (5)$$

$$S_{n2}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{(-1)^\kappa \left(\frac{x}{2}\right)^{2\kappa}}{\kappa! (n+\kappa)!} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+\kappa}\right]. \quad (6)$$

* Vide M. Bocher, *Ann. Math.*, Vol. VI, No. 4; W. Byerly, *An elementary treatise on Fourier's series and spherical, cylindrical, etc., harmonics*, p. 230.

We will give to the sum $S_n(x)$ the form of a definite integral. To that purpose remark that

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{\kappa} = \int_0^1 \frac{1-y^\kappa}{1-y} dy,$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+\kappa} = \int_0^1 \frac{1-y^{n+\kappa}}{1-y} dy.$$

Therefore,

$$\begin{aligned} S_{n1}(x) &= \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{\kappa=0}^{\kappa=\infty} \left\{ \frac{(-1)^\kappa \left(\frac{x}{2}\right)^{2\kappa}}{\kappa! (n+\kappa)!} \int_0^1 \frac{1-y^\kappa}{1-y} dy \right\} \\ &= \left(\frac{x}{2}\right)^n \int_0^1 \frac{dy}{1-y} \left\{ \sum_{\kappa=0}^{\kappa=\infty} \frac{(-1)^\kappa \left(\frac{x}{2}\right)^{2\kappa}}{\kappa! (n+\kappa)!} - \sum_{\kappa=0}^{\kappa=\infty} \frac{(-1)^\kappa \left(\frac{x\sqrt{y}}{2}\right)^{2\kappa}}{\kappa! (n+\kappa)!} \right\} \\ &= \int_0^1 \frac{J_n(x) - y^{-n/2} J_n(x\sqrt{y})}{1-y} dy, \end{aligned}$$

and in like manner

$$S_{n2}(x) = \int_0^1 \frac{J_n(x) - y^{n/2} J_n(x\sqrt{y})}{1-y} dy.$$

Hence

$$S_n(x) = \int_0^1 \frac{{}_1F_2 J_n(x) - (y^{n/2} + y^{-n/2}) J_n(x\sqrt{y})}{1-y} dy. \quad (7)$$

When $n=0$,

$$K_0(x) = J_0(x) \log x - \int_0^1 \frac{J_0(x) - J_0(x\sqrt{y})}{1-y} dy. \quad (8)$$

On Adjustable Cycloidal and Trochoidal Curves.

BY FRANK MORLEY.

There are certain well-known facts about the simpler cycloids,* such as the following:

A hypocycloid of class 3 makes a constant intercept on any tangent.

A cardioid makes a constant intercept on any line through the cusp.

The cusp-tangents of a hypocycloid of class 4 make an intercept of constant length on any tangent.

My object is to obtain some general theorems which include facts like those mentioned. A way of effecting this lies in the incidental remark of Chasles (*Aperçu Historique*, p. 69) that when a circle rolls on a fixed circle the envelope of a diameter of the rolling circle is a cycloid. Here we can regard the diameter as a hypocycloid of class 2 whose cusps are attached to the rolling circle; and the first extension of Chasles's remark is to ascertain the envelope of any cycloid whose cusps are attached to the rolling circle.

With the kinematical method by which Williamson (*Differential Calculus*, §291 of the fourth edition) establishes Chasles's result, it will be easy to prove that the envelope sought is two distinct cycloids. Some special cases of this general theorem will next be discussed, and the existence of mutually "adjustable" cycloids will present itself naturally. Lastly, the extended problem, when the moving curve is a trochoid, calls for consideration; a general theorem is given, but there is no discussion of the special cases; instead, the question of mutually "adjustable" trochoids is taken up *ab initio*.

It will be convenient to begin (§§1-3) with some remarks on the modes of generation of a trochoid and on the normals. So far as concerns the cycloidal case these remarks are practically already stated in a former paper, this Journal, t. XIII, in which the tangents of cycloids were briefly considered. But it is to

* It is convenient, and not without precedent, to include epicycloids and hypocycloids under the general term cycloid, and epitrochoids and hypotrochoids under the general term trochoid.

be noticed that the normals of a trochoid, as of roulettes in general, are to be preferred to the tangents.

§1. The usual definition of a trochoid, as the roulette produced when a circle rolls on a fixed circle, is open to the objection that, of the two ways of regarding the curve as a roulette, one is arbitrarily preferred, the other subsequently dragged in. The ancient way of regarding the curve as an epicycle seems to me the proper one. It comes to this, that if we take a parallelogram $0, x'_q, x, x'_p$ (Fig. A), of which one point 0 is fixed, and two others, x'_p and x'_q ,

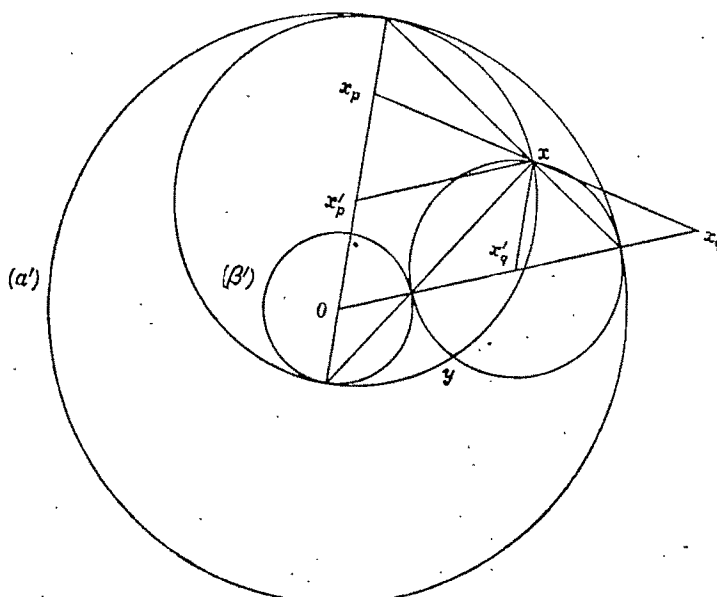


FIG. A.

describe circles about 0 with assigned angular velocities p and q ; then the locus of the fourth point x is defined as a trochoid.* If t is always a point of a unit circle, that is if $|t| = 1$, the equation which maps the unit circle into the trochoid is evidently

$$x = at^q + \beta t^p, \quad (1)$$

where $\beta = |x_p|$, $\alpha = |x_q|$, and the parallelogram is supposed initially, when $t = 1$, to lie in a state of collapse along the positive half of the real axis.

*It is of slight use to talk of trochoids unless the curves are present. Mr. Henry Perigal's sheets of diagrams, called *Contributions to Kinematics*, are most serviceable here.

The way in which the definitions by means of rolling circles come out of this equation is indicated in Williamson, *Differential Calculus*, §295a, and in Harkness and Morley's *Theory of Functions*, p. 17, and the same results can also be obtained by considering the equation

$$dx = (qat^q + p\beta t^p) dt/t,$$

which, if $t = \exp i\theta$, is

$$dx = i(qat^q + p\beta t^p) d\theta;$$

for in this form the equation shows that the normal is parallel to the stroke $qat^q + p\beta t^p$, whence it readily follows that if the normal meets x'_q and x'_p at x_q and x_p , then

$$x_q = (p - q)x'_q/p$$

and

$$x_p = (q - p)x'_p/q.$$

These points x_q and x_p lie on fixed concentric circles whose radii will be called a and b ; they are the instantaneous centres in the two ways in which the curve is produced by a rolling circle. A table of these two ways is as follows:

Fixed radius.	Rolling radius.	Arm.*
a	$qa/(q - p)$	$qb/(q - p),$
b	$pb/(p - q)$	$pa/(p - q),$

or, in a convenient notation,

$$\begin{array}{ccc} a & a_q & b_q, \\ b & b_p & a_p. \end{array}$$

In terms of a and b , the equation of the trochoid (1) is

$$(p - q)x = pat^q - qbt^p. \quad (2)$$

When $a = b$, the tracing point is in each case on the rolling circle, and the curve is a cycloid, the equation being

$$(p - q)x/a = pt^q - qt^p. \quad (3)$$

*That is, the distance from the rolling centre to the tracing point. It must be understood that the rolling radii are the radii of curvature at the point of contact; so that, a and b being positive, when p and q have the same sign either

$$a_q < 0, b_p > b \text{ or } a_q > a, b_p < 0,$$

and when p and q have different signs,

$$0 < a_q < a \text{ and } 0 < b_p < b.$$

In the former case the curve is an epitrochoid, in the latter, a hypotrochoid; in accord with Proctor's *Geometry of Cycloids*.

§2. The method of generating cycloids given by Wolstenholme (Proc. London Math. Soc., t. IV, 1871-3) and Kiepert (Schlömilch's Zeitschrift, t. XVII, 1872) can be shown to be a form of the epicyclic method. For draw through x any line making intercepts α' , β' on those sides of the parallelogram which meet at 0, so that $\alpha/\alpha' + \beta/\beta' = 1$. Thus x is a point which divides in a fixed ratio a stroke whose ends describe fixed circles with constant velocities. The radii of these circles are subject only to the equation just written, and we can take, instead of the two, a single circle of radius $\alpha' = \alpha + \beta$. Thus, if two points describe the same circle (α') with velocities p , q , the locus of a point which divides the stroke in a fixed ratio α/β is a trochoid. As before, the normal is parallel to a line from the origin which divides the stroke in the ratio $qa/p\beta$. When $qa = -p\beta$, the stroke is normal to the curve, and when $qa = p\beta$ the stroke is tangent to the curve; in both cases the curve is a cycloid. The second case is the mode of generation of Wolstenholme and Kiepert. It will be noticed that we have here a very simple proof of the fact that the evolute of a cycloid is a cycloid.

We may take instead of the circle (α') a circle (β') of radius $\beta' = \alpha - \beta$; the two circles (α') and (β') are the vertex circles of the trochoids, for evidently the greatest and least values of $|x|$, or

$$|\alpha t^q + \beta t^p|,$$

are $|\alpha \pm \beta|$.

The two tracing circles through x intersect again at a point y . The locus of y is readily determined, for from Fig. A, the points 0, x'_p , y , x'_q form a contra-parallelogram,* and hence, by a calculation which presents no difficulty,

$$y = (\alpha^2 - \beta^2)/(\alpha t^{-q} - \beta t^{-p});$$

therefore the locus of y is the inverse of a trochoid with regard to its centre.

§3. We suppose henceforth that p and q are integers; thus the curves are algebraic.

It is evident that when $x_p = bt^p$, is given, there are p points of the trochoid corresponding to the p values of t , the normals at these points all passing through x_p . Moreover, from (2), these p points form a regular polygon Γ_p , of circum-radius a_p , concentric with and rigidly attached to the rolling circle (b_p).

* I take this term from the works on Linkages; see for example Kempe, How to draw a Straight Line.

In the second mode of trochoidal generation, we must then regard the curve as simultaneously described by the groups of points Γ_p .*

When $x_q = at^q$, is given, there are q points Γ_q , which play a similar part in the first mode of trochoidal generation.

If we desire to show the simultaneous generation by p or q points, in the equation which defines the curve, all we have to do is to write in (1) $t^p = \tau$, so that

$$(p - q)x = pa\tau^{1/p} - qb\tau,$$

or $t^q = \tau$, so that

$$(p - q)x = pa\tau - qb\tau^{1/q}.$$

But a more symmetrical procedure is to write $t^{pq} = \tau$, so that

$$(p - q)x = pa\tau^{1/p} - qb\tau^{1/q}. \quad (4)$$

In this form we take on the circle (a) the p points $a\tau^{1/p}$, and on the circle (b) the q points $b\tau^{1/q}$; and the pq lines joining the one set to the other are all normals to the curve.

In the case of the cycloid we have an evident way of correlating two groups Γ_p and Γ_q , namely, by taking the feet of the $p + q$ normals from any point of the cusp-circle. For the trochoid there is no evident useful way, and herein lies a point of departure. The next four articles refer only to the cycloid; the remaining ones to the trochoid.

§4. In the theory of the cycloid, when we speak of groups Γ_p and Γ_q on the same curve, it will be understood that they are the feet of the normals from any one point of the cusp-circle.

The cycloid whose equation is (3) will, however displaced, be denoted by $C_{p,q}^a$, or (when the size is not in question) by $C_{p,q}$.

A cycloid with all its cusps at Γ_p or Γ_q may be said to be *adjustable* to $C_{p,q}^a$; and when of two cycloids each is adjustable to the other, it may be said that the two are adjustable. The existence of two adjustable cycloids is clear to begin with from the example already stated, in which the rod C_{1-1}^{2a} has its cusps on the cardioid $C_{2,1}^a$, and conversely, the cardioid has its cusp on the rod so soon as we notice that the cusps of the rod form a group Γ_2 of the cardioid; that is,

*This idea is given by Kiepert for the cycloid when $q=1$; by Wolstenholme for any cycloid. I have not come across the evident extension to trochoids.

so soon as we know that the instantaneous centre of rotation of the rod is on the cusp-circle of the cardioid.

We have seen that $C_{p,q}^a$ is generated by Γ_p , a regular polygon fixed in the rolling circle of radius $a_p \equiv pa/(p-q)$; or by Γ_q , a regular polygon fixed in the rolling circle of radius $a_q \equiv qa/(q-p)$. Let a curve $C_{p_1, p_1-p}^{a_p}$ be described with its p cusps at Γ_p ; we require the envelope of this curve as the circle (Γ_p) rolls on the fixed circle. From the point of contact x' draw the normals to C_{p_1, p_1-p} . The feet of these normals form two regular polygons Γ_{p_1} and Γ_{p_1-p} ; attending only to the first of these, it lies on a circle of radius $p_1 a_p/p$ or $p_1 a/(p-q)$, which has rolling motion on (a_p) and therefore also on (a). Therefore the locus of Γ_{p_1} , which is part of the envelope of $C_{p_1, p_1-p}^{a_p}$, is the curve C_{p_1, p_1-p+q}^a , or C_{p_1, q_1}^a , where $p_1 - q_1 = p - q$. The cusps of this new curve are evidently the cusps of $C_{p,q}^a$. Hence we have the general theorem:

Let $C_{p,q}^a$ and C_{p_1, q_1}^a have the same cusps, so that $p - q = p_1 - q_1$. Let the feet of the normals from a point of the common cusp-circle be $\Gamma_p, \Gamma_q; \Gamma_{p_1}, \Gamma_{q_1}$. Then the curve $C_{p_1, p_1-p}^{a_p}$ with cusps at Γ_p will touch the second curve at Γ_{p_1} . And in this statement it is sufficiently implied also that

$$C_{p_1, p_1-p_1}^{a_{p_1}} \text{ with cusps at } \Gamma_{p_1} \text{ will touch at } \Gamma_p,$$

together with three other pairs of statements of the same kind obtained from these by interchanging p with q , or p_1 with q_1 , or p with p_1 and q with q_1 .

In applying this result to special cases it is essential to notice what happens when p and q have a common integer factor r . Let us see what is meant by $C_{2,-2}$. Geometrically, we say that Γ_2 is inscribed in a circle of radius $a/2$, which rolls with like curvature on a circle of radius a ; and the locus is two orthogonal diameters, say $C_{1,-1}$ and $iC_{1,-1}$. And analytically the same comes from the equation (4), which here becomes

$$4x/a = 2(\tau^{\dagger} + \tau^{-\dagger}),$$

for, according as the product of the roots selected is ± 1 , the equation is $x = \pm a \cos \theta/2$ or $x = \pm ia \sin \theta/2$. And so generally by $C_{p,q}$, when p and q have the factor r , we understand r curves $C_{p/r, q/r}$ obtained from any one curve by successive rotations through the angle $2\pi/(p-q)$.*

* It may be the more natural view that when a circle rolls on another, the locus of a polygon Γ_r inscribed in the rolling circle is p distinct curves which may happen to coalesce. But the view taken, namely that the locus is one curve which may happen to break up, is permissible; and it alone renders possible a clear statement of a theorem which covers all the facts in question.

§5. Case 1. Let $p_1 = -q$, $q_1 = -p$. Then C_{p_1, q_1} and $C_{p, q}$ are the same curve, and $\Gamma_{p_1}, \Gamma_{q_1}$ coincide respectively with Γ_q, Γ_p . Hence the curve $C_{p+q, q}^a$ with cusps at Γ_p will touch at Γ_q . Similarly the curve $C_{p, p+q}^a$ with cusps at Γ_q will touch $C_{p, q}$ at Γ_p ; thus if the cusps of $C_{p, p+q}^a$ are points Γ_q of $C_{p+q, q}^b$, then the cusps of $C_{p+q, q}^b$ are points Γ_p of $C_{p, p+q}^a$, provided $a/a_q = \beta/a_p$, or $p\alpha + q\beta = 0$.

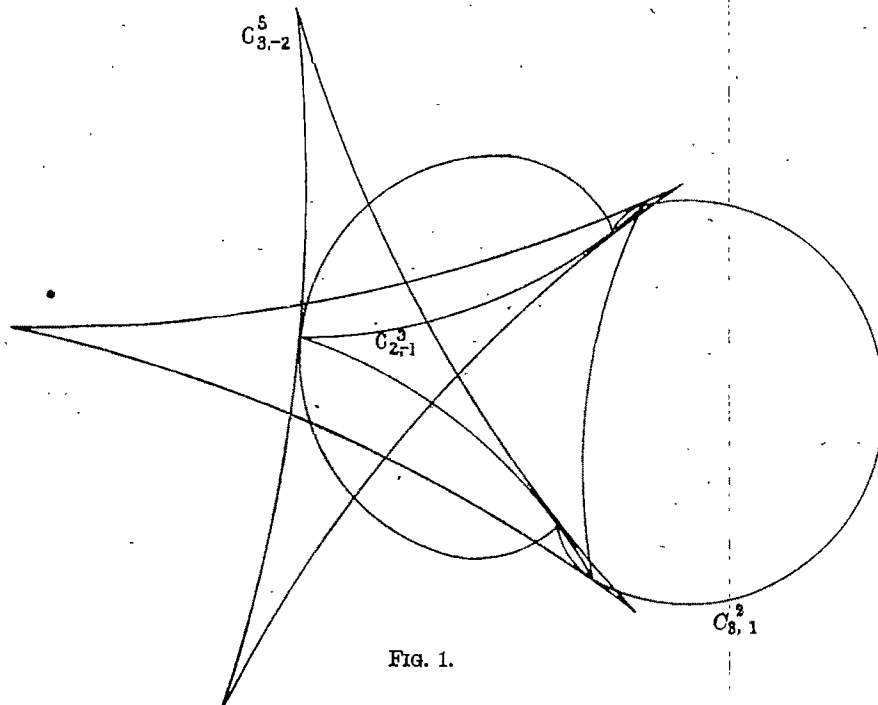


FIG. 1.

See Fig. 1, where $p = 3$, $q = -2$; also Fig. 3, where $p = 3$, $q = -1$; but in Fig. 3 the curve $C_{p, p+q}$ is not drawn.

The above conditions for an adjustable pair of cycloids may be stated as follows:

Let a circle (α), rolling on a circle (β), give the irreducible cycloid $C_{p', q'}^b$; and let the circle (β), rolling on the circle (α), give the irreducible cycloid $C_{p, q}^a$; then the two cycloids are adjustable. For we have

$$\begin{aligned} \alpha &= p'\beta/(p' - q') \text{ or } q'\beta/(q' - p'), \\ \beta &= p\alpha/(p - q) \text{ or } q\alpha/(q - p), \end{aligned}$$

and therefore we have an equation of the form

$$p'/(p' - q') = (p - q)/p,$$

and bearing in mind that a simultaneous change of sign in p and q is permissible, we can say that

$$\begin{aligned} p' &= q - p, \\ p' - q' &= -p, \end{aligned}$$

that is,

$$q = q' = p + p',$$

where

$$p\alpha + p'\beta = 0;$$

and these conditions tally with the above ones.

Case 2. Let $p_1 = -q_1 = (p - q)/2$. Then C_{p_1, q_1} is p_1 equiangular diameters of a circle, and Γ_{p_1} or Γ_{q_1} is the feet of the perpendiculars on these diameters from any point of the circle. If with these feet as cusps a curve C_{p_1, q_1} be described, then writing

$$p = p_0, \quad p - p_1 = q_0,$$

so that $p + q = 2q_0$, $q = 2q_0 - p_0$, $p_1 = p_0 - q_0$, $a_{p_1} = a/2$, we have the result that the curve C_{p_0, q_0}^a touches $C_{p_0, 2q_0 - p_0}^{2a}$, whose cusp-tangents are the p_1 diameters, at Γ_{p_0} ; and similarly it touches $C_{q_0, 2p_0 - q_0}^{2a}$ at Γ_{q_0} .

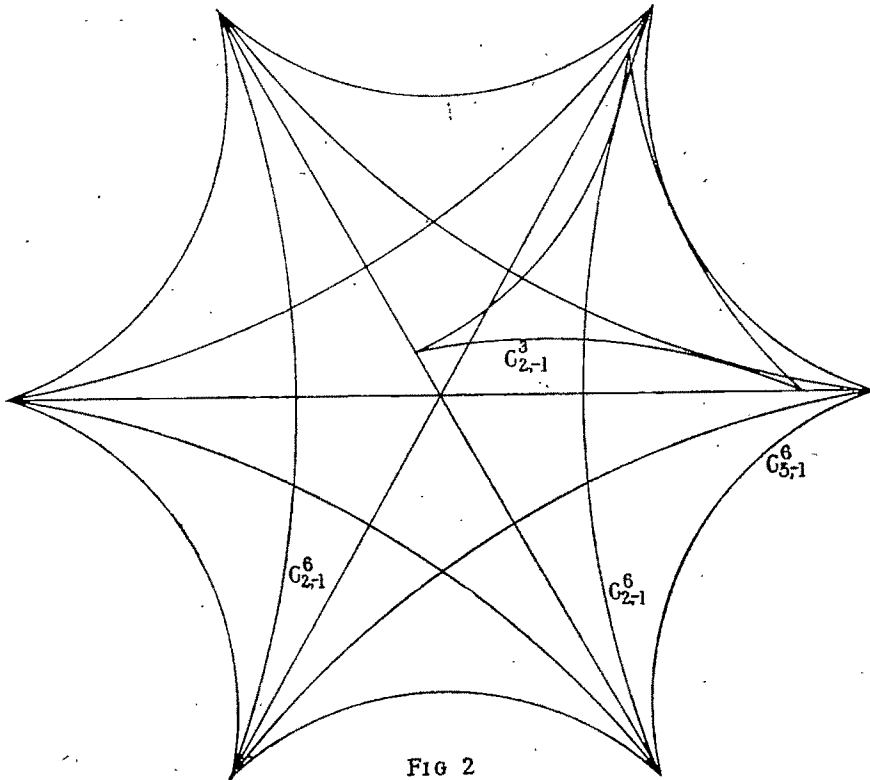


FIG 2

This case is illustrated in Fig. 2, where $p_0 = 2$, $q_0 = -1$; here, as always when p_0 or q_0 is even, one partial envelope breaks up into two curves.

Case 3. As in case 2, let $p_1 = -q_1$. Let a curve C_{p_0, q_0} touch the p_1 diameters at the feet of the perpendiculars from any point of the fixed circle; then if we write

$$p_1 = p_0, \quad p_1 - p = q_0,$$

so that $p - q = 2p_0$, $p + q = -2q_0$, $a_p = (p_0 - q_0)a/2p_0$, we see that the cusps of $C_{p_0, q_0}^{(p_0 - q_0)a}$ lie on the fixed curve $C_{p_0 + q_0, q_0 - p_0}^{2p_0 a}$. This is illustrated by the curves $C_{2, -1}^3$ and $C_{3, -1}^4$ in Fig. 3.*

§6. Fig. 3 is an example of a chain of cycloids, each of which is adjustable to the next after it, while all touch at a group Γ_p . The figure shows that the hypocycloids $C_{1, -1}^2$, $C_{1, -2}^3$, \dots , $C_{1, 1-r}^r$ all touch at the single point Γ_1 , and each passes through the cusps of the preceding. It will be noticed that the cusps of $C_{1, 1-r}^r$ lie on the cusp-tangents of $C_{1, 1-2r}$; but it should be added that this is a peculiarity of the chain selected. For generally if $C_{p, q}$, $C_{p, q-p}$, \dots , $C_{p, q-rp}$ touch at Γ_p , a necessary condition that the cusps of $C_{p, q}$ lie on the cusp-tangents of $C_{p, q-rp}$ is (see case 2 above)

$$2q - p = q - rp,$$

or

$$q = (1 - r)p,$$

so that $p = \pm 1$, either sign leading to the result that $C_{1, 1-r}$, if of the right size, has its cusps on the cusp-tangents of $C_{1, 1-2r}$. The proof that $C_{1, 1-r}$ is of the right size, in the chain shown in Fig. 3, is immediate, for its cusp-radius is half that of $C_{1, 1-2r}$.

It may be remarked that the cusp-circles of all the curves of Fig. 3 must touch at a point lying on the common normal at Γ_1 ; further, the equation of the curve $C_{1, 1-r}$ can be written

$$x = (1 - r)t_0 + rt + t_0^{-1}/t, \quad (5)$$

*With respect to the relations of these curves, it is worth remarking that if parallel rays of light fall on $C_{2, -1}$, their direction being those of the common tangent, the caustic by reflexion at $C_{2, -1}$ is $C_{3, -1}$. A proof of this will be found in my note "On the Caustic of the Epicycloid" in the Haverford College Studies, No. 4.

where t_0 is a fixed point and t a variable point on the unit circle, and r is an integer positive or negative. And starting *ab initio* with such a system of equations, we can verify analytically the facts which the figure shows.

§7. The general theorem solves the problems of finding (1) the envelope of a cycloid which is adjustable to a given cycloid, and (2) the cusp-locus of a cycloid which touches a given cycloid at a group Γ_p . There remains the problem of finding the rest of the envelope of a cycloid which touches a given cycloid at Γ_p . This is in reality solved already, for we can find first the cusp-locus, and then the envelope of the curve whose cusp-locus is now known. One part of the envelope is the given curve, and the other part is the curve sought. But it is desirable to eliminate the cusp-locus and express the result solely in terms of the given partial envelope and the moving curve, as follows. From the general theorem,

$C_{p,p-p_1}^{a_{p_1}}$ with cusps Γ_{p_1} on C_{p_1,q_1}^a will touch $C_{p,p-p_1+q_1}^a$ at Γ_p ,
and $C_{q,q-q_1}^{a_{p_1}}$ " " " " " " " " $C_{q,q-p_1+q_1}^a$ at Γ_q .

To make the curves $C_{p,p-p_1}$ and $C_{q,q-p_1}$ coincide let

$$p + q = p_1.$$

Then $C_{p,p-q}^{a_{p_1}}$, which is adjustable to C_{p_1,q_1}^a , has the partial envelopes C_{p,q_1-q}^a and C_{q,q_1-p}^a .

Write $-q$ for q , and $p-r$ for q_1-q ; then $a_{p_1} = (p-q)a/r$; thus:

If $C_{p,q}^{(p-q)a}$ touches a fixed curve $C_{p,p-r}^a$ at Γ_p , it touches the fixed curve $C_{q,q+r}^a$ at Γ_q , the two fixed curves having the same cusps.

For example, let $r = 2p$; then the curve $C_{p,q}^{(p-q)a}$ slides on p equiangular lines, and envelopes the curve $C_{q,q+2p}^{2pa}$. This is illustrated by the curves $C_{2,-1}^3$ and $C_{2,-1}^4$ of Fig. 3.

§8. In the cycloidal case, when $a = b$, the cusps are the most salient points, and accordingly the theory was explained with reference to them alone. But we might have selected any definite group of $(p-q)$ points, forming a regular polygon concentric with the curve, instead of the cusps; and in dealing with the trochoid it is not advisable to specify the group beforehand. Only, for simplicity, we suppose the group on the chief axes of the curve, that is on those axes which are cusp-tangents when $a = b$. Such a group of $p-q$ points, which

is a group of the curve but not necessarily on the curve, will be called a *chief group*.

A chief group is evidently given by any one of its points—say a point on the real axis. When, for two trochoids given in the form (6), the two points which indicate two chief groups are given by the same value of t , we can say that the chief group of the one curve *corresponds* to the chief group of the other. A trochoid T_1 is adjustable to a trochoid T , when a definite chief group of T_1 is a group Γ_p or Γ_q of T ; and the two trochoids are adjustable when also the corresponding chief group of T is a group Γ_{p_1} or Γ_{q_1} of T_1 .

We denote the trochoid given by equation (2), however displaced, by $T_{p,q}^{a,b}$.

Consider the group Γ_p which is describing the curve $T_{p,q}^{a,b}$. With Γ_p as a chief group describe a curve $T_{p_0,q_0}^{a_0,b_0}$, which moves with the rolling circle (b_p) . This involves

$$p_0 - q_0 = p, \quad (8)$$

and a further condition, expressed by the equation

$$(p_0 a_0^{t q_0} - q_0 b_0^{t p_0}) / (p_0 - q_0) = a_p \quad (9)$$

and its conjugate.

Further, let us specialize by making the circle (b_p) a fixed circle of $T_{p_0,q_0}^{a_0,b_0}$; that is, let

$$b_0 = pb / (p - q). \quad (10)$$

The feet of the normals from the point of contact of the circles (b) and (b_0) to $T_{p_0,q_0}^{a_0,b_0}$ now contain a group Γ_{p_1} ; this group has the circum-radius a_{p_1} and is attached concentrically to a circle (b_{p_1}) which touches the circles (b) and (b_0) at their point of contact. Since (b_{p_0}) rolls on (b_0) while (b_0) rolls on (b) , (b_{p_1}) rolls on (b) . Therefore the locus of Γ_{p_1} is a trochoid $T_{p_1,q_1}^{a_1,b_1}$ determined by the equations

$$p_1 = p_0, \quad (11)$$

$$b_1 = b, \quad (12)$$

$$p_1 b_1 / (p_1 - q_1) = p_0 b_0 / (p_0 - q_0), \quad (13)$$

$$p_1 a_1 / (p_1 - q_1) = p_0 a_0 / (p_0 - q_0). \quad (14)$$

This trochoid is, of course, only part of the envelope of $T_{p_0,q_0}^{a_0,b_0}$; how to ascertain the remainder is another question.

From (8), (11), (13),

$$b_1 / (p_1 - q_1) = b_0 / p,$$

and therefore, from (10) and (12),

$$p_1 - q_1 = p - q, = \pi \text{ suppose.}$$

Equations (8), (11), (14) give

$$a_0 = pa_1/r.$$

We have thus the result that if we take two trochoids $T_{p,p-r}^{a,b}$ and $T_{p_1,p_1-r}^{a,b}$ with coincident chief axes, and groups Γ_p and Γ_{p_1} on them, the normals at which all meet on the common fixed circle (b), then a trochoid $T_{p_1,p_1-p}^{pa_1/r, pb/r}$, with a chief group at Γ_{p_1} , will touch at Γ_{p_1} ; the possibility of drawing the third trochoid, subject to the conditions, being insured by a certain relation between the constants, which relation is included in that obtained by eliminating t from

$$pa = p_1 a_1 t^{p_1-p} - (p_1 - p) b t^{p_1} \quad (15)$$

and the conjugate relation.

Similarly a trochoid $T_{p,p-p_1}^{p_1 a/r, p_1 b/r}$, with a chief group at Γ_{p_1} , will touch at Γ_p ; the existence of this fourth trochoid being insured by a certain relation.

But this relation depends on the elimination of t from the equation

$$p_1 a_1 = p a t^{p-p_1} - (p - p_1) b t^p \quad (16)$$

and its conjugate; and the equations (15) and (16) are the same, either being

$$(p - p_1) b = p a t^{-p_1} - p_1 a_1 t^{-p}. \quad (17)$$

§9. If, then, we select a value of t from the equation (17), and thereby a chief group of $T_{p_1,p_1-p}^{pa_1/r, pb/r}$, and the *corresponding* chief group of $T_{p,p-p_1}^{p_1 a/r, p_1 b/r}$, we have the theorem that if the chief group of the former is a group Γ_p on the latter, the chief group of the latter is a group Γ_{p_1} on the former.

We are thus led to study especially the relation of the two trochoids

$$T_1 \equiv T_{p_1,p_1-p}^{pa_1, p\beta} \text{ and } T \equiv T_{p,p-p_1}^{p_1\alpha, p_1\beta},$$

the factor $1/r$ being now included in α, α_1, β ; and here an analytical method is convenient. All that will be established for trochoids matches what was given in case 1 of §5 for two cycloids; though the preceding article is appropriate as pointing to developments not now attempted, parallel to the rest of §5.

The two curves are produced as in the table :

	Fixed radius.	Rolling radius.	Arm.
T	$p_1\beta$	$p\beta$	$p\alpha$,
T_1	$p\beta$	$p_1\beta$	$p_1\alpha_1$.

The equations are

$$\begin{aligned} \text{for } T, & \quad x = pat^{p-p_1} - (p-p_1)\beta t^p, \\ \text{for } T_1, & \quad x_1 = p_1\alpha_1 t_1^{p_1-p} - (p_1-p)\beta t_1^{p_1}. \end{aligned} \quad (18)$$

The curve T admits a group Γ_p , whose mean point is $-(p-p_1)\beta t^p$. Let the second curve experience the turn t^{p-p_1} ,* and let it be placed concentrically with Γ_p ; its equation becomes

$$x_1 = -(p-p_1)\beta t^p + \{p_1\alpha_1 t_1^{p_1-p} - (p_1-p)\beta t_1^{p_1}\} t^{p-p_1},$$

where t is regarded as constant.

The equation is

$$x_1 = (p-p_1)\beta t^p \{(t_1/t)^{p_1} - 1\} + p_1\alpha_1 (t_1/t)^{p_1-p}.$$

Therefore, when $(t_1/t)^{p_1} \equiv \varepsilon_1^{p_1} = 1$, $x_1 = p_1\alpha_1 \varepsilon_1^{-p}$; therefore, if we suppose T_1 rigidly attached to Γ_p , T_1 passes through p_1 fixed points as Γ_p describes T .†

The p_1 points $p_1\alpha_1 \varepsilon_1^{-p}$ form a chief group of T , and a group Γ_{p_1} on T_1 ; and conversely, the p points $p\alpha \varepsilon^{-p_1}$ (where $\varepsilon^p = 1$), referred to the centre of T_1 , are a chief group of T_1 and a group Γ_p on T .

§10. Let us take as a first example the chief group of T given by $t^{p_1} = 1$. This is a group of vertices; in fact it is that group of vertices which coincide with the cusps when the fixed radii become equal, if these fixed radii have the same sign. These points of T are a group Γ_{p_1} of T_1 if

$$p_1\alpha_1 = p\alpha - (p-p_1)\beta;$$

that is, if

$$p_1(\alpha_1 - \beta) = p(\alpha - \beta), \quad (19)$$

* More generally any constant turn τ (where $|\tau| = 1$) may be included, when we wish to consider, with regard to $T_{p,\tau}$, the case of those groups of $(p-q)$ points which do not lie on the chief axes.

† Without mention of the curve T , we can say: Let a circle $(p_1\beta)$ roll on a circle $(p\beta)$, and let T_1 be any algebraic trochoid so formed. Regard T_1 as rigidly attached to $(p\beta)$; then when $(p\beta)$ rolls on $(p_1\beta)$, T_1 passes through p_1 fixed points.

and this symmetrical condition also ensures that when the group of vertices of T is placed on T_1 , the corresponding group of vertices of T_1 , given by $t_1 = 1$, shall lie on T . This is shown in Figs. 4 and 5, when $p=3$, $p_1=2$. It will be noticed in Fig. 5 that, α and β being positive and $3\alpha < \beta$, the condition (19) makes α_1 negative, and the vertex given by $t=1$ is no longer one which coincides with a cusp in the cycloidal case.

To obtain two curves adjustable in this way, by rolling each of two circles on the other, we must take in both cases a tracing point at the same distance from the nearest point of the rolling circle. See equation (19) and the table of §9.

§11. Passing to the nodes, we can distinguish among them, in any trochoid $T_{p,q}^{a,b}$, those which become cusps when $a=b$; these form a group of $p-q$ nodes which can be called *primary nodes*.

To determine the nodes which lie on a chief axis, we make x real in the equation (6); that is, we seek to solve the equation

$$(p-q)n = pat^q - qbt^p = pat^{-q} - qbt^{-p}. \quad (20)$$

These give

$$pa(t^q - t^{-q}) = qb(t^p - t^{-p}),$$

or passing over the values $t = \pm 1$ (which give vertices of the curve), we have, when p and q are positive,

$$pa(t^{q-1} + t^{q-3} + \dots + t^{-q+1}) = qb(t^{p-1} + t^{p-3} + \dots + t^{-p+1}),$$

and, whatever signs p and q have, the last equation holds if for p and q we write $|p|$ and $|q|$. When the equation can be solved, we have all the nodes on the axis considered, and the primary nodes on this axis are those values of n which $= b$ when $a=b$. The remaining primary nodes are obtained by multiplying the ones found by $\exp 2\pi i/(p-q)$.

For example, in the curve $T_{3,2}^{a,b}$, the equation for $t + t^{-1}$ is

$$3a(t + t^{-1}) = 2b(t^3 + 1 + t^{-3}),$$

and

$$\begin{aligned} n &= 3at^3 - 2bt^3 \\ &= 2b(t + t^{-1}) - 3a; \end{aligned}$$

therefore

$$2n = -3a \pm \sqrt{9a^3 + 16b^3},$$

and the upper sign gives the primary node.

It will be observed that the determination of the nodes of the two curves $T_{p,\pm q}^{a,b}$ depends on the same equation.

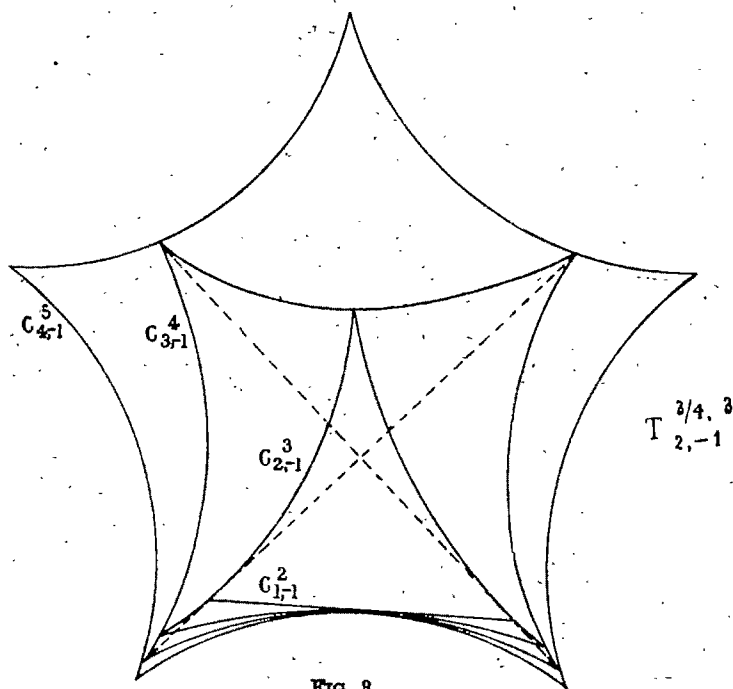


FIG. 3.

$$T_{2,-1}^{3/4, 3}$$

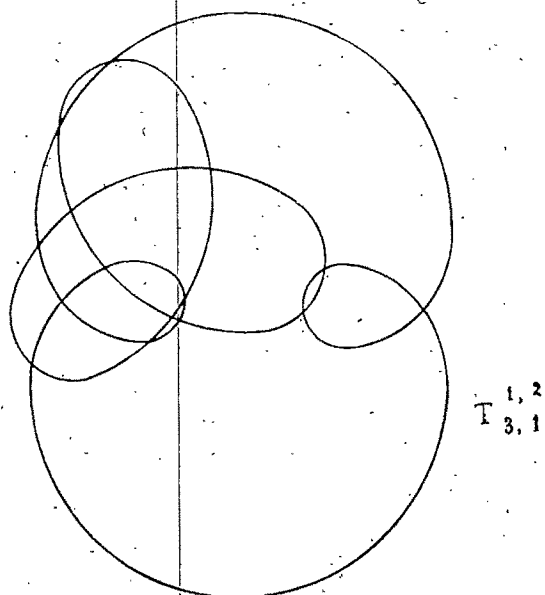


FIG. 4.

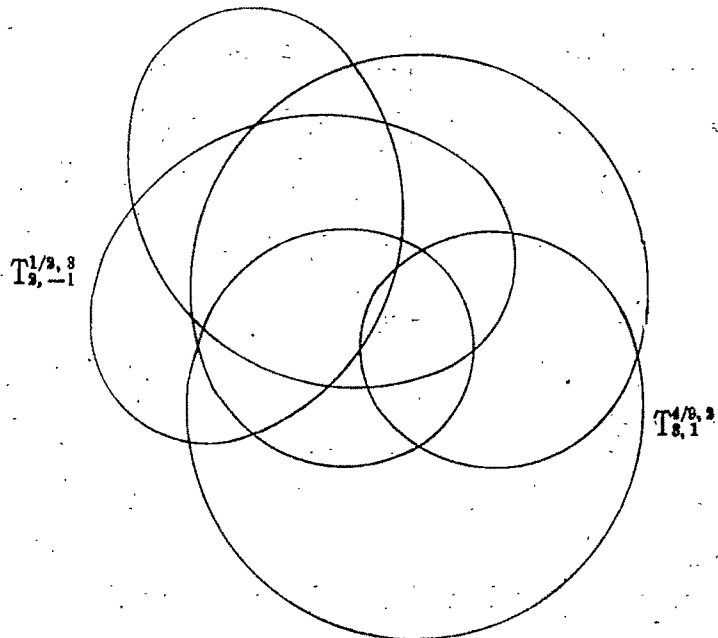


FIG. 5.

$$T_{8,1}^{4/3, 3}$$

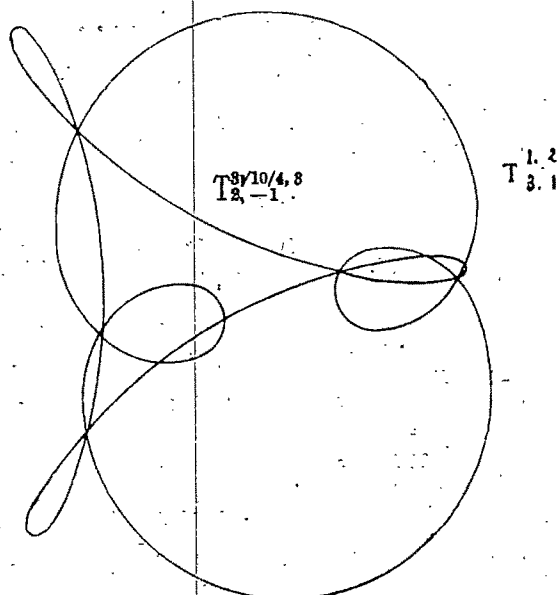


FIG. 6.

$$T_{3,1}^{1,2}$$

The actual results in some simple cases are

$$\left. \begin{aligned} n_{2,1}^{a,b} &= b, \\ 3n_{2,-1}^{a,b} &= (4a^2 - b^2)/b, \\ 2n_{3,1}^{a,b} &= \pm \sqrt{b(3a+b)}, \\ 4n_{3,-1}^{a,b} &= \pm (3a-b)\sqrt{(3a+b)/b}, \\ 2n_{3,2}^{a,b} &= -3a + \sqrt{9a^2 + 16b^3}, \\ 10n_{3,-2}^{a,b} &= \left(\frac{9a^2}{4b^3} - 1\right)(3a + \sqrt{9a^2 + 16b^3}). \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

So far, at all events, the primary nodes are crunodes when $a < b$.

Now, returning to the two trochoids T and T_1 of §9, the equation

$$p_1\alpha_1 = pat^{p-p_1} - (p-p_1)\beta t^p;$$

that is,

$$(p-p_1)\beta = pat^{-p_1} - p_1\alpha_1 t^{-p}, \quad (17^{bis})$$

and its conjugate, express that the chief group of T , which lies on T_1 , is a group on T , and equally express that the chief group of T_1 , which lies on T , is a group on T_1 . But it is not easy to analytically discriminate the group of primary nodes from the other groups of nodes on the chief axes; while without such a discrimination we are not entitled to infer that the primary nodes of T and T_1 are corresponding groups, merely from the fact that they do correspond when $\alpha = \alpha_1 = \beta$.

There is, of course, no difficulty in making a precise statement when we can explicitly obtain the nodes. Let us take, as before, $p = 3$, $p_1 = 2$. The above equation (17^{bis}) is now

$$n_{3,2}^{a,\alpha_1} = \beta,$$

or from (21),

$$(2\beta + 3a)^2 = 9a^2 + 16\alpha_1^2;$$

and this equation, written in the form

$$\pm \sqrt{2\beta(6a + 2\beta)} = 2.2\alpha_1,$$

expresses that the primary nodes of $T_{3,1}^{a,\alpha_1}$ can be a group T_2 of $T_{2,-1}^{3a,3\beta}$, while, written in the form

$$(4.9\alpha_1^2 - 9\beta^2)/3\beta = 3.3a,$$

it expresses that the primary nodes of the second curve can be a group T_3 of the first (Fig. 6).

§12. The foci of the curve (6) are given by $D_1x = 0$; that is, by

$$at^{q-1} = bt^{p-1}.$$

Disregarding those which are met together at the centre of the curve, we have $p - q$ others which can be called chief foci. Of the curves T and T_1 of §9, if the chief foci of the one lie on the other, then the chief foci of the other lie on the one.

For the chief foci of T are given by

$$a = \beta t^{p_1}$$

and are

$$f = p_1 \beta t^p.$$

These coincide with the fixed points $p_1 \alpha_1 \epsilon_1^{-p}$ of §9 if

$$\beta t^p = \alpha_1;$$

that is, if

$$(\alpha/\beta)^{p_1} = (\alpha_1/\beta)^p, \quad (22)$$

and this is a symmetrical relation.

§13. Finally, it should be observed that, in all cases, the connexions of the curves considered are consistent with relative motion; in particular, two adjustable curves are capable of relative motion without breach of the adjustment.

HAVERFORD COLLEGE.

Note on Induced Linear Substitutions.

BY F. FRANKLIN.

The theorem concerning linear substitutions contained in this note is apparently unknown, though its demonstration is extremely obvious.

Let S be a linear substitution operating on the set of variables $(x'_1, x'_2, \dots, x'_r)$, converting them into the set (x_1, x_2, \dots, x_r) . Then if a, b, \dots are the coefficients in the general quantic of the n^{th} degree, $\phi(x_1, x_2, \dots, x_r)$, while a', b', \dots are the coefficients in $\phi(x'_1, x'_2, \dots)$, the set a, b, \dots is transformed by a certain linear substitution Σ into the set a', b', \dots . The substitution Σ may be said to be *induced* on the coefficients of an n^{ic} by the substitution S operating on the variables. It is to be noted that S operates upon the *new variables*, while Σ operates upon the *old coefficients*.

Let D be the determinant of the substitution S , Δ that of the substitution Σ ; and let $D_\lambda, \Delta_\lambda$ be the determinants obtained by subtracting λ from each of the diagonal constituents in D, Δ respectively, so that $D_\lambda = 0, \Delta_\lambda = 0$, are the characteristic equations of the substitutions S, Σ .

It is evident that *the vanishing of Δ_λ for a particular value of λ is the necessary and sufficient condition that there exist an n^{ic}, ϕ , which is transformed into λ times itself* by the substitution Σ operating on the coefficients, or, what is the same thing, *by the substitution S operating on the variables*. But if $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ be the roots of $D_\lambda = 0$, there are r linear functions L_1, L_2, \dots, L_r which are transformed into $\lambda_1 L_1, \lambda_2 L_2, \dots, \lambda_r L_r$ respectively, by the substitution S ; hence the various powers and products of the L 's of the n^{th} degree are actually n^{ic} s which are transformed into themselves multiplied by the corresponding powers and products of the λ 's. Hence the powers and products of $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$, of the n^{th} degree, are roots of $\Delta_\lambda = 0$; and since the number of these roots, being precisely the number of coefficients in the general n^{ic} , is equal to the degree of Δ_λ , these are *all* the roots of $\Delta_\lambda = 0$. It has here been tacitly supposed that the roots $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ are all distinct; but evidently the result still holds if there are any number of equalities among them. For we have, when the roots are unequal,

$$\Delta_\lambda = (\lambda_1^n - \lambda)(\lambda_2^n - \lambda) \dots,$$

and the right member, being a symmetric function of the roots of D_λ , is a rational entire function of the coefficients of D_λ . The two members of the equation are therefore rational entire functions of the constituents of D which are certainly always equal unless a certain relation is satisfied by these constituents; but this cannot be unless they are identically equal. We have thus proved the theorem:

If the substitution S , viz. $S(x'_1, x'_2, \dots) = (x_1, x_2, \dots)$, induces on the coefficients of the general n^{th} the substitution Σ , viz. $\Sigma(a, b, \dots) = (a', b', \dots)$, the roots of the characteristic equation of the induced substitution are the powers and products, of the n^{th} degree, of the roots of the characteristic equation of the original substitution.

An even simpler, though in a certain sense less elementary, proof of the theorem may be obtained by supposing S transformed by a linear substitution U into the canonical form, in which only the diagonal constituents appear; the induced substitution Σ will evidently be simultaneously transformed by some substitution Υ . Thus we have

$$U^{-1}SU(x'_1, x'_2, \dots, x'_r) = (\lambda_1 x'_1, \lambda_2 x'_2, \dots, \lambda_r x'_r) = (x_1, x_2, \dots, x_r),$$

whence $ax_1^n + bx_2^n + \dots = a\lambda_1^n x_1^n + b\lambda_2^n x_2^n + \dots,$

so that $\Upsilon^{-1}\Sigma\Upsilon(a, b, \dots) = (\lambda_1^n a, \lambda_2^n b, \dots).$

Now the characteristic equation of a linear substitution is unaltered by transformation; hence the roots of the characteristic equation of S are $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ and those of Σ are $\lambda_1^n, \lambda_2^n, \dots$. Q. E. D.

The theorem may evidently be extended to the substitution Σ induced on the coefficients of a quantic in several sets of variables x_1, x_2, \dots, x_r ; y_1, y_2, \dots, y_r ; z_1, z_2, \dots, z_r ; by substitutions S, S', S'', \dots affecting these sets respectively. If the quantic is of degrees n, n', n'', \dots in the x 's, the y 's, the z 's, respectively, the roots of the characteristic equation of Σ are all those products of powers of the roots of the characteristic equations of S, S', S'', \dots , which are of the degree n in the first set of roots, n' in the second set, etc. To take a single example: Let u_1, u_2, u_3 be contragredient to x_1, x_2, x_3 if a substitution giving the roots $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ be performed upon the x 's, the roots corresponding to the substitution on the u 's are $1/\lambda_1, 1/\lambda_2, 1/\lambda_3$; then if Σ denote the substitution induced upon the coefficients of

$$a_{11}x_1u_1 + a_{12}x_1u_2 + \dots + a_{33}x_3u_3,$$

the roots of the characteristic equation of Σ are

$$1, 1, 1, \lambda_1/\lambda_2, \lambda_2/\lambda_1, \lambda_1/\lambda_3, \lambda_3/\lambda_1, \lambda_2/\lambda_3, \lambda_3/\lambda_2.$$

Finally, it should be observed that the theorem here presented evidently furnishes us with a *sufficient* as well as necessary condition that a proposed substitution be transformable into an induced substitution. *E. g.*, a substitution in 6 variables is transformable into an induced substitution if the roots of its characteristic equation are the squares and products of three quantities.

A Class of Uniform Transcendental Functions.

BY T. CRAIG.

In the Comptes Rendus for 1878, M. Picard has given two methods of forming a certain uniform transcendental function, viz. a function satisfying the conditions

$$\begin{aligned} F(u + 2\omega_1) &= F(u), \\ F(u + 2\omega_3) &= F(u) S(u), \end{aligned}$$

where $S(u)$ is a doubly periodic function having $2\omega_1$ and $2\omega_3$ as periods. So far as I am aware, this function has not been considered by any one else since M. Picard first announced it. In what follows I have given another mode of forming the function, based upon the knowledge of its zeros and poles as found by M. Picard.

Let q_1, q_2, \dots, q_π denote the zeros and p_1, p_2, \dots, p_π the poles of the uniform doubly periodic function $S(u)$. We can take

$$q_1 + q_2 + \dots + q_\pi = p_1 + p_2 + \dots + p_\pi.$$

Picard shows that the zeros of $F(u)$ are given by

$$u = 2m\omega_1 + 2(n+1)\omega_3 + q_i, \quad u = 2m\omega_1 - 2(n-1)\omega_3 + p_j,$$

and its poles by

$$u = 2m\omega_1 + 2(n+1)\omega_3 + p_i, \quad u = 2m\omega_1 - 2(n-1)\omega_3 + q_j,$$

where m takes all positive and negative integer values from $-\infty$ to $+\infty$ and $n \geq 1$, and where each zero and each pole is of order of multiplicity n . Write these zeros and poles in the form

$$\begin{array}{ll} \text{(zeros),} & u = s_q, \quad u = s'_p, \\ \text{(poles),} & u = s_p, \quad u = s'_q. \end{array}$$

It is to be noticed that s becomes s' by changing n into $-n$. Let us first form a function having s_q as zeros of orders of multiplicity equal to the corresponding value of n . To find the genus of the required function we need to know for what value of μ the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{n}{[q + 2m\omega_1 + 2(n+1)\omega_2]^\mu} \quad (1)$$

is convergent. Write $q = a + ib$, $\omega_1 = \alpha_1 + i\beta_1$, $\omega_2 = \alpha_2 + i\beta_2$; the modulus of the quantity in the denominator is

$$[(a + 2\alpha_2 + 2m\alpha_1 + 2n\alpha_2)^2 + (b + 2\beta_2 + 2m\beta_1 + 2n\beta_2)^2]^{\frac{\mu}{2}}.$$

Employing now a known theorem of Jordan's in the same way that Picard employs it in Vol. I, p. 272, of his *Traité d'Analyse*, we compare the general term of this series with the general term of the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{n}{(m^2 + n^2)^\mu}, \quad (2)$$

that is, take the ratio of the general terms in (1) and (2), this is

$$\frac{[(a + 2\alpha_2 + 2m\alpha_1 + 2n\alpha_2)^2 + (b + 2\beta_2 + 2m\beta_1 + 2n\beta_2)^2]^{\frac{\mu}{2}}}{(m^2 + n^2)^\mu}.$$

This is never infinite or zero; we can choose a finite constant k , then, so that the terms in (1) shall be less than the terms in

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{n}{k^\mu (m^2 + n^2)^\mu}.$$

If, then, (2) is convergent, (1) will also be convergent. Consider the double integral

$$\int_{y=1}^{\infty} \int_{x=-\infty}^{\infty} \frac{y \, dx \, dy}{(x^2 + y^2)^\mu}.$$

Write $x = \rho \cos \theta$, $y = 1 + \rho \sin \theta$; the limits of the integration are now from $\rho = 0$ to $\rho = \infty$, from $\theta = 0$ to $\theta = \pi$. The integral is now

$$\int_0^\pi \int_0^\infty \frac{(1 + \rho \sin \theta) \rho \, d\rho \, d\theta}{(1 + 2\rho \sin \theta + \rho^2)^\mu} < \int_0^\pi \int_0^\infty \frac{(1 + \rho) \rho \, d\rho \, d\theta}{(1 + \rho^2)^\mu}.$$

Since we are dealing with large values of ρ , we have $\rho < \rho^3$, so the integral is less than

$$\int_0^\infty \int_0^\pi \frac{\rho d\rho d\theta}{(1 + \rho^3)^{\mu-1}}.$$

Writing $\rho^3 = t$, this is

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\pi \frac{dt d\theta}{(1 + t)^{\mu-1}}.$$

That this may be finite for infinitely large values of t we must have

$$\mu - 1 > 1 \text{ or } \mu > 2;$$

the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{n}{[q + 2m\omega_1 + 2(n+1)\omega_3]^3}$$

will then be convergent, and the function having the quantities

$$q + 2m\omega_1 + 2(n+1)\omega_3$$

as zeros of order n is of genus 2. The function that we are in search of will then be of the form

$$H(u) = e^{G(u)} \prod_{t=1}^{t=\pi} \frac{\prod_{n=1}^{\infty} \prod_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{u}{s_q}\right) e^{\frac{u}{s_q} + \frac{1}{2} \left(\frac{u}{s_q}\right)^2} \right\}^n \left\{ \left(1 - \frac{u}{s_{p_t}}\right) e^{\frac{u}{s_{p_t}} + \frac{1}{2} \left(\frac{u}{s_{p_t}}\right)^2} \right\}^n}{\prod_{n=1}^{\infty} \prod_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{u}{s_{p_t}}\right) e^{\frac{u}{s_{p_t}} + \frac{1}{2} \left(\frac{u}{s_{p_t}}\right)^2} \right\}^n \left\{ \left(1 - \frac{u}{s_{q_t}}\right) e^{\frac{u}{s_{q_t}} + \frac{1}{2} \left(\frac{u}{s_{q_t}}\right)^2} \right\}^n},$$

where $G(u)$ is a holomorphic function of u . To study this it will be sufficient to take a single one of the factors in []. Say

$$F(u) = \frac{\prod_{n=1}^{\infty} \prod_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{u}{s_q}\right) e^{\frac{u}{s_q} + \frac{1}{2} \frac{u^2}{s_q^2}} \right\}^n \left\{ \left(1 - \frac{u}{s_{p_t}}\right) e^{\frac{u}{s_{p_t}} + \frac{1}{2} \frac{u^2}{s_{p_t}^2}} \right\}^n}{\prod_{n=1}^{\infty} \prod_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{u}{s_{p_t}}\right) e^{\frac{u}{s_{p_t}} + \frac{1}{2} \frac{u^2}{s_{p_t}^2}} \right\}^n \left\{ \left(1 - \frac{u}{s_{q_t}}\right) e^{\frac{u}{s_{q_t}} + \frac{1}{2} \frac{u^2}{s_{q_t}^2}} \right\}^n}.$$

Take the logarithmic derivative of this with respect to u and write $\frac{F'(u)}{F(u)} = \Omega(u)$.

We have then

$$\Omega(u) = \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} \left[\left\{ \frac{n}{u - s_q} + \frac{n}{s_q} + \frac{nu}{s_q^2} \right\} - \left\{ \frac{n}{u - s_p} + \frac{n}{s_p} + \frac{nu}{s_p^2} \right\} \right].$$

The summation with respect to n now going from $-\infty$ to $+\infty$, and clearly the value $n=0$ which was at first excluded need no longer be excluded, not even in the value given for $H(u)$.

Differentiating again we have

$$\Omega'(u) = - \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} \left[\left\{ \frac{n}{(u-s_q)^2} - \frac{n}{s_q^2} \right\} - \left\{ \frac{n}{(u-s_p)^2} - \frac{n}{s_p^2} \right\} \right],$$

$$\Omega''(u) = + 2 \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{n}{(u-s_q)^3} - \frac{n}{(u-s_p)^3} \right].$$

Writing this last out more fully, it is

$$\Omega''(u) = 2 \sum \sum \left\{ \frac{n}{[u-q-2m\omega_1-2(n+1)\omega_2]^3} - \frac{n}{[u-p-2m\omega_1-2(n+1)\omega_2]^3} \right\}.$$

We have manifestly $\Omega''(u+2\omega_1) = \Omega''(u)$. Adding $2\omega_2$ to u we get after a slight arrangement of the terms

$$\begin{aligned} \Omega''(u+2\omega_2) &= 2 \sum \sum \left\{ \frac{n-1}{[u-q-2m\omega_1-2n\omega_2]^3} - \frac{n-1}{[u-p-2m\omega_1-2n\omega_2]^3} \right\} \\ &+ 2 \sum \sum \left\{ \frac{1}{[u-q-2m\omega_1-2n\omega_2]^3} - \frac{1}{[u-p-2m\omega_1-2n\omega_2]^3} \right\}. \end{aligned}$$

This arrangement of the terms is legitimate, as each of the double series written here is absolutely convergent. This is now

$$\Omega''(u+2\omega_2) = \Omega''(u) - \wp'(u-q) + \wp'(u-p).$$

In like manner we can see that the series for $\Omega'(u)$ gives

$$\begin{aligned} \Omega'(u+2\omega_1) &= \Omega'(u), \\ \Omega'(u+2\omega_2) &= \Omega'(u) - \wp(u-q) + \wp(u-p). \end{aligned}$$

Or these relations for Ω' could be got from those for Ω'' by integration, viz. integrating

$$\Omega''(u+2\omega_1) = \Omega''(u),$$

we have

$$\Omega'(u+2\omega_1) = \Omega'(u) + c.$$

Now $\Omega'(0) = 0$, so $\Omega'(2\omega_1) = c$; but if we make $u = 2\omega_1$ in the above series, we see, remembering that the series is absolutely convergent, that the terms cancel in pairs, so that $\Omega'(2\omega_1) = 0$.

Suppose we make $u = 2\omega_3$ in $\Omega'(u)$. We have

$$\Omega'(2\omega_3) = - \sum \sum \left[\left\{ \frac{n}{[q + 2m\omega_1 + 2n\omega_3]^2} - \frac{n}{[q + 2m\omega_1 + 2(n+1)\omega_3]^2} \right\} - \{p\} \right],$$

$\{p\}$ being the same function of p that the term preceding it is of q . Grouping the terms a little differently, we see that they all cancel in pairs except the terms

$$- \sum \sum \left[\frac{1}{[q + 2m\omega_1 + 2(n+1)\omega_3]^2} - \frac{1}{[p + 2m\omega_1 + 2(n+1)\omega_3]^2} \right].$$

These are two series, of course, one in q and the other in p ; neither is convergent; but if we subtract the quantity

$$\frac{1}{[2m\omega_1 + 2(n+1)\omega_3]^2}$$

from each of the terms in $[]$, we leave the value of the terms in $[]$ unaltered, but the series in q and in p are now each convergent, and the whole sum is now equal to

$$- \wp(q) + \wp(p) = \Omega'(2\omega_3).$$

(Of course for $m=0$ and $n+1=0$ the terms of the series are simply $\frac{-1}{q^3}$ and $\frac{1}{p^3}$).

Integrate now the relation

$$\Omega''(u + 2\omega_3) = \Omega''(u) - \wp'(u - q) + \wp'(u - p);$$

we have

$$\Omega'(u + 2\omega_3) = \Omega'(u) - \wp(u - q) + \wp(u - p) + c.$$

Make $u = 0$, then since $\Omega'(0) = 0$, we have

$$\Omega'(2\omega_3) = - \wp(q) + \wp(p) + c,$$

it follows then that $c = 0$, and so that

$$\Omega'(u + 2\omega_3) = \Omega'(u) - \wp(u - q) + \wp(u - p).$$

In like manner we could find the result of changing u into $u + 2\omega_1$ and $u + 2\omega_3$ in $\Omega(u)$ and $F(u)$. We shall proceed differently, however, following a method used by Taumery and Molk in their *Fonctions elliptiques*, p. 160.

From $F(u+a)$: considering only one of the factors in this, say

$$\left(1 - \frac{u+a}{s_q}\right) e^{\frac{u+a}{s_q} + \frac{1}{2} \left(\frac{u+a}{s_q}\right)^2},$$

we notice that it can be put in the form of the product of the three quantities

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{u}{s_q - a}\right) e^{\frac{u}{s_q - a} + \frac{1}{2} \left(\frac{u}{s_q - a}\right)^2}, \\ & \left(1 - \frac{a}{s_q}\right) e^{\frac{a}{s_q} + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{s_q}\right)^2}, \\ & e^{u \left[\frac{1}{a-s_q} + \frac{1}{s_q} + \frac{a}{s_q^2} \right] - \frac{u^2}{2} \left[\frac{1}{(a-s_q)^2} - \frac{1}{s_q^2} \right]}. \end{aligned}$$

If we make a similar decomposition of all the factors and then combine the results, we find quite readily the relation

$$\begin{aligned} & \left[\frac{F(u+a)}{F(a)} \right] e^{-u\Omega(a) - \frac{u^2}{2} \Omega'(a)} \\ &= \frac{\prod_{n=1}^{\infty} \prod_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{u}{s_q - a}\right) e^{\frac{u}{s_q - a} + \frac{1}{2} \left(\frac{u}{s_q - a}\right)^2} \right\}^n \left\{ \left(1 - \frac{u}{s_p - a}\right) e^{\frac{u}{s_p - a} + \frac{1}{2} \left(\frac{u}{s_p - a}\right)^2} \right\}^n}{\prod_{n=1}^{\infty} \prod_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{u}{s'_q - a}\right) e^{\frac{u}{s'_q - a} + \frac{1}{2} \left(\frac{u}{s'_q - a}\right)^2} \right\}^n \left\{ \left(1 - \frac{u}{s'_p - a}\right) e^{\frac{u}{s'_p - a} + \frac{1}{2} \left(\frac{u}{s'_p - a}\right)^2} \right\}^n} \end{aligned}$$

Differentiating logarithmically with respect to u , we have

$$\begin{aligned} \Omega(u+a) - \Omega(a) - u\Omega'(a) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\left\{ \frac{n}{u+a-s_q} - \frac{n}{a-s_q} + \frac{nu}{(a-s_q)^2} \right\} \right. \\ &\quad \left. - \left\{ \frac{n}{u+a-s_p} - \frac{n}{a-s_p} + \frac{nu}{(a-s_p)^2} \right\} \right]. \end{aligned}$$

Differentiating again gives

$$\begin{aligned} \Omega'(u+a) - \Omega'(a) &= - \sum \sum \left[\left\{ \frac{n}{(u+a-s_q)^2} - \frac{n}{(a-s_q)^2} \right\} \right. \\ &\quad \left. - \left\{ \frac{n}{(u+a-s_p)^2} - \frac{n}{(a-s_p)^2} \right\} \right]. \end{aligned}$$

This last will give us nothing but what we have already found. In the preceding one, change a into $a + 2\omega_1$ and we get

$$\Omega(u+a+2\omega_1) - \Omega(a+2\omega_1) - u\Omega'(a+2\omega_1) = \Omega(u+a) - \Omega(a) - u\Omega'(a),$$

since the series on the right is manifestly unaltered by changing a into $a + 2\omega_1$. Write $u - a$ for u in this last; this gives

$$\Omega(u + 2\omega_1) - \Omega(u) = \Omega(a + 2\omega_1) - \Omega(a),$$

since $\Omega'(a + 2\omega_1) = \Omega'(a)$.

We have then

$$\Omega(u + 2\omega_1) - \Omega(u) = c, \text{ a constant.}$$

Making $u = 0$, and noticing that $\Omega(0) = 0$, gives

$$\Omega(2\omega_1) = c.$$

In the equation giving Ω write $u = 2\omega_1$ and we have

$$\Omega(2\omega_1) = \sum \sum \left\{ \frac{-n}{q + 2(m-1)\omega_1 + 2(n+1)\omega_3} + \frac{n}{q + 2m\omega_1 + 2(n+1)\omega_3} + \frac{2\omega_1 n}{[q + 2m\omega_1 + 2(n+1)\omega_3]^2} \right\} - \{p\}.$$

The first and second terms in each $\{ \}$ will cancel out when the whole sum is considered, and the third terms give, by adding and subtracting

$$\frac{2n\omega_1}{[2m\omega_1 + 2(n+1)\omega_3]^2},$$

the convergent series

$$\Omega(2\omega_1) = 2\omega_1 \left[\sum \sum \left\{ \frac{n}{[q + 2m\omega_1 + 2(n+1)\omega_3]^2} - \frac{n}{[2m\omega_1 + 2(n+1)\omega_3]^2} \right\} - \{p\} \right],$$

say $\Omega(2\omega_1) = \lambda_1$. Make $u = 2\omega_3$ and we have

$$\Omega(2\omega_3) = \lambda_3 = \sum \sum \left\{ \frac{-n}{q + 2m\omega_1 + 2n\omega_3} + \frac{n}{q + 2m\omega_1 + 2(n+1)\omega_3} + \frac{2\omega_3 n}{[q + 2m\omega_1 + 2(n+1)\omega_3]^2} \right\} - \{p\}.$$

Here it will be desirable to introduce all the zeros and poles q and p of the pro-

posed doubly periodic function. Let Ω_i denote the Ω corresponding to (p_i, q_i) ; then

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \Omega(2\omega_1) = \sum \Omega_i(2\omega_1) = \sum \lambda_1^{(i)} \\ &= 2\omega_1 \sum_{i=1}^{i=r} \left[\sum \sum \left\{ \frac{n}{[q_i + 2m\omega_1 + 2(n+1)\omega_3]} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{n}{[2m\omega_1 + 2(n+1)\omega_3]^2} \right\} - \{p\} \right] = 2\omega_1 R, \\ \lambda_3 &= \Omega(2\omega_3) = \sum \Omega_i(2\omega_3) = \sum \lambda_3^{(i)} \\ &= \sum_{i=1}^{i=r} \left[- \sum \sum \left\{ \frac{1}{q_i + 2m\omega_1 + 2(n+1)\omega_3} + \frac{1}{2m\omega_1 + 2(n+1)\omega_3} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{q_i}{[2m\omega_1 + 2(n+1)\omega_3]^2} \right\} - \{p\} \right] \\ &\quad + 2\omega_3 \sum_{i=1}^{i=r} \left[\sum \sum \left\{ \frac{n}{[q + 2m\omega_1 + 2(n+1)\omega_3]^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{n}{[2m\omega_1 + 2(n+1)\omega_3]^2} \right\} - \{p\} \right].\end{aligned}$$

In the first line of this we have introduced the terms

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2m\omega_1 + 2(n+1)\omega_3} + \frac{q_i}{[2m\omega_1 + 2(n+1)\omega_3]^2} \\ &- \frac{1}{2m\omega_1 + 2(n+1)\omega_3} - \frac{p_i}{[2m\omega_1 + 2(n+1)\omega_3]^2},\end{aligned}$$

but since we assume $\Sigma p_i = \Sigma q_i$, no change is produced in the value of the series.

We have now

$$\lambda_3 = \Sigma [-\zeta(q_i) + \zeta(p_i)] + 2\omega_3 R,$$

and so

$$\lambda_3\omega_1 - \lambda_1\omega_3 = \omega_1 \Sigma [\zeta(p_i) - \zeta(q_i)].$$

Let Ω denote the sum $\sum_{i=1}^{i=r} \Omega_i$, we have now

$$\Omega(u + 2\omega_1) = \Omega(u) + \lambda_1,$$

$$\Omega(u + 2\omega_3) = \Omega(u) + \Sigma \zeta(u - q_i) - \Sigma \zeta(u - p_i) + \lambda_3.$$

Finally, letting F denote the product $\prod_{i=1}^{i=\pi} F_i$, we get

$$F(u + 2\omega_1) = F(u) e^{\lambda_1 u + \kappa_1},$$

$$F(u + 2\omega_3) = F(u) \frac{\sigma(u - q_1) \dots \sigma(u - q_\pi)}{\sigma(u - p_1) \dots \sigma(u - p_\pi)} e^{\lambda_3 u + \kappa_3},$$

where

$$\kappa_1 = \log F(2\omega_1),$$

$$\kappa_3 = \log F(2\omega_3) + \Sigma \log \sigma p_i - \Sigma \log \sigma q_i.$$

Form now the quadratic function

$$g(u) = Au^2 + Bu,$$

and determine A and B so that

$$4A\omega_1 = -\lambda_1, \quad 4A\omega_1^2 + 2B\omega_1 = -\kappa_1,$$

that is

$$A = -\frac{\lambda_1}{4\omega_1}, \quad B = \frac{\lambda_1\omega_1 - \kappa_1}{2\omega_1}.$$

Writing now
and we have

$$G(u) = e^{g(u)} F(u)$$

$$G(u + 2\omega_1) = G(u),$$

$$G(u + 2\omega_3) = G(u) \frac{\sigma(u - q_1) \dots \sigma(u - q_\pi)}{\sigma(u - p_1) \dots \sigma(u - p_\pi)} e^{\alpha u + \beta},$$

where

$$\alpha = \frac{1}{\omega_1} [\lambda_3\omega_1 - \lambda_1\omega_3] = \Sigma [\zeta(p_i) - \zeta(q_i)],$$

$$\beta = \frac{\lambda_1\omega_3}{\omega_1} (\omega_1 - \omega_3) + \frac{\kappa_3\omega_1 - \kappa_1\omega_3}{\omega_1}.$$

I cannot see any error in the above considerations on the convergence of the series (1), and consequently in the determination of the genus of the function $F(u)$ or $H(u)$; but from certain analogies with the known series used in elliptic functions, it seems possible that we should have $\mu = 4$ to secure the convergence of (1), and consequently that the genus of the function is three at least; three is a certain value. In this case we would have (using for the moment a single q and a single p),

$$F(u) = \frac{\prod_{n=1}^{\infty} \prod_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{u}{s_q} \right) e^{\frac{u}{s_q} + \frac{1}{2} \frac{u^2}{s_q^2} + \frac{1}{8} \frac{u^3}{s_q^3}} \right\}_n \left\{ s'_p \right\}_n}{\prod \prod \left\{ \left(1 - \frac{u}{s_p} \right) e^{\frac{u}{s_p} + \frac{1}{2} \frac{u^2}{s_p^2} + \frac{1}{8} \frac{u^3}{s_p^3}} \right\}_n \left\{ s'_q \right\}_n},$$

and

$$\begin{aligned}\Omega(u) &= \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} \left[\left\{ \frac{n}{u-s_q} + \frac{n}{s_q} + \frac{nu}{s_q^2} + \frac{nu^2}{s_q^3} \right\} - \left\{ s_p \right\} \right], \\ \Omega'(u) &= - \sum \sum \left[\left\{ \frac{n}{(u-s_q)^2} - \frac{n}{s_q^2} - \frac{2nu}{s_q^3} \right\} - \left\{ s_p \right\} \right], \\ \Omega''(u) &= 2 \sum \sum \left[\left\{ \frac{n}{(u-s_q)^3} + \frac{n}{s_q^3} \right\} - \left\{ s_p \right\} \right], \\ \Omega'''(u) &= -6 \sum \sum \left[\frac{n}{(u-s_q)^4} - \frac{n}{(u-s_p)^4} \right].\end{aligned}$$

Again changing u into $u+a$ and decomposing the general factor as above, we obtain

$$\begin{aligned}\frac{F(u+a)}{F(a)} e^{-u\Omega(a) - \frac{u^2}{2}\Omega'(a) - \frac{u^3}{6}\Omega''(a)} \\ = \frac{\prod_{n=1}^{\infty} \prod_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{u}{s_q - a} \right) e^{\frac{u}{s_q - a} + \frac{1}{2} \frac{u^2}{(s_q - a)^2} + \frac{1}{6} \frac{u^3}{(s_q - a)^3}} \right\}^n \left\{ s_p' \right\}^n}{\prod \prod \left\{ \left(1 - \frac{u}{s_p - a} \right) e^{\frac{u}{s_p - a} + \frac{1}{2} \frac{u^2}{(s_p - a)^2} + \frac{1}{6} \frac{u^3}{(s_p - a)^3}} \right\}^n \left\{ s_q' \right\}^n}.\end{aligned}$$

Differentiating logarithmically we get

$$\begin{aligned}\Omega(u+a) - \Omega(a) - u\Omega'(a) - \frac{u^2}{2}\Omega''(a) \\ = \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} \left[\left\{ \frac{n}{u+a-s_q} - \frac{n}{a-s_q} + \frac{nu}{(a-s_q)^2} - \frac{nu^2}{(a-s_q)^3} \right\} - \left\{ s_p \right\} \right], \\ \Omega'(u+a) - \Omega'(a) - u\Omega''(a) \\ = - \sum \sum \left[\left\{ \frac{n}{(u+a-s_q)^2} - \frac{n}{(a-s_q)^2} + \frac{2nu}{(a-s_q)^3} \right\} - \left\{ s_p \right\} \right], \\ \Omega''(u+a) - \Omega''(a) = 2 \sum \sum \left[\left\{ \frac{n}{(u+a-s_q)^3} - \frac{n}{(a-s_q)^3} \right\} - \left\{ s_p \right\} \right], \\ \Omega'''(u+a) = -6 \sum \sum \left[\frac{n}{(u+a-s_q)^4} - \frac{n}{(u+a-s_p)^4} \right].\end{aligned}$$

The effect of adding $2\omega_1$ or $2\omega_3$ to the argument of Ω, Ω', \dots can be found from these by changing a into $a+2\omega_1$ and $a+2\omega_3$, or it can be found from the preceding equations giving $\Omega, \Omega', \Omega'', \Omega'''$ by integration; the question comes to the same thing in both cases, viz. the determination of the values of certain constants. We find at once that

$$\begin{aligned}\Omega'''(u+2\omega_1) &= \Omega'''(u), \\ \Omega'''(u+2\omega_1) &= \Omega'''(u) - \wp''(u-q) + \wp''(u-p).\end{aligned}$$

Integrating these gives first

$$\Omega''(u + 2\omega_1) = \Omega''(u) + c;$$

and since, as is readily seen, $\Omega''(2\omega_1) = 0$, we have $c = 0$. Again, in $\Omega''(u)$ write $u = 2\omega_3$; this gives

$$\Omega''(2\omega_3) = +2 \sum \sum \left[\frac{-n}{[q + 2m\omega_1 + 2n\omega_3]^3} + \frac{n}{[q + 2m\omega_1 + 2(n+1)\omega_3]^3} \right] - \{p\}.$$

After some obvious reductions this gives

$$\Omega''(2\omega_3) = \wp'(q) - \wp'(p).$$

Integrating the equation giving $\Omega'''(u + 2\omega_1)$, making $u = 0$ and using this last result, we find

$$\Omega''(u + 2\omega_3) = \Omega''(u) - \wp'(u - q) + \wp'(u - p).$$

Again compute $\Omega'(2\omega_1)$ and $\Omega'(2\omega_3)$. We have first

$$\Omega'(2\omega_1) = - \sum \sum \left[\left\{ \frac{n}{[q + 2(m-1)\omega_1 + 2(n+1)\omega_3]^3} - \frac{n}{[q + 2m\omega_1 + 2(n+1)\omega_3]^3} - \frac{4\omega_1 n}{[q + 2m\omega_1 + 2(n+1)\omega_3]^3} \right\} - \{p\} \right].$$

The first and second terms in the whole sum will cancel; we can imagine terms

$$+ \frac{4\omega_1 n}{[2m\omega_1 + 2(n+1)\omega_1]^3} - \frac{4\omega_1 n}{[2m\omega_1 + 2(n+1)\omega_3]^3}$$

introduced so as to make the series of third terms in q and in p separately convergent; then

$$\Omega'(2\omega_1) = 4\omega_1 \sum \sum \left[\left\{ \frac{n}{[q + 2m\omega_1 + 2(n+1)\omega_3]^3} + \frac{n}{[2m\omega_1 + 2(n+1)\omega_3]^3} \right\} - \{p\} \right],$$

say

$$\lambda_1 = \Omega'(2\omega_1) = 4\omega_1 R.$$

Next form $\Omega'(2\omega_3)$ this is

$$\lambda_3 = \Omega'(2\omega_3) = - \sum \sum \left[\left\{ \frac{n}{[q + 2m\omega_1 + 2n\omega_3]^3} - \frac{n}{[q + 2m\omega_1 + 2(n+1)\omega_3]^3} - \frac{4\omega_3 n}{[q + 2m\omega_1 + 2(n+1)\omega_3]^3} \right\} - \{p\} \right].$$

Here again it is necessary to introduce the remaining q 's and p 's. Let as before

$$\begin{aligned}\Omega &= \sum_{i=1}^{i=\pi} \Omega_i, \text{ and so for the other symbols. We find then readily} \\ \lambda_1 &= 4\omega_1 \sum_{i=1}^{i=\pi} \left[\sum \sum \left\{ \frac{n}{[q_i + 2m\omega_1 + 2(n+1)\omega_3]^3} + \frac{n}{[2m\omega_1 + 2(n+1)\omega_3]^3} \right\} - \{p\} \right] \\ &= 4\omega_1 R, \\ \lambda_3 &= - \sum_{i=1}^{i=\pi} \left[\sum \sum \left\{ \frac{1}{[q_i + 2m\omega_1 + 2(n+1)\omega_3]^2} - \frac{1}{[2m\omega_1 + 2(n+1)\omega_3]^2} \right\} - \{p\} \right] \\ &\quad + 4\omega_3 \sum_{i=1}^{i=\pi} \left[\sum \sum \left\{ \frac{n}{[q_i + 2m\omega_1 + 2(n+1)\omega_3]^3} - \frac{n}{[2m\omega_1 + 2(n+1)\omega_3]^3} \right\} - \{p\} \right], \\ &\quad \sum [-\varphi(q_i) + \varphi(p_i)] + 4\omega_3 R.\end{aligned}$$

The terms which have been introduced cancel each other. Now we see that

$$\lambda_1\omega_3 - \lambda_3\omega_1 = \omega_1 \sum_{i=1}^{i=\pi} [\varphi(q_i) - \varphi(p_i)].$$

Again write $\delta_1 = \Omega(2\omega_1) = \sum \Omega_i(2\omega_1)$, $\delta_3 = \Omega(2\omega_3) = \sum \Omega_i(2\omega_3)$. We have first

$$\begin{aligned}\delta_1 &= \sum_{i=1}^{i=\pi} \left[\sum \sum \frac{-n}{q_i + 2(m-1)\omega_1 + 2(n+1)\omega_3} + \frac{n}{q_i + 2m\omega_1 + 2(n+1)\omega_3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2n\omega_1}{[q_i + 2m\omega_1 + 2(n+1)\omega_3]^3} + \frac{4\omega_1^2 n}{[q_i + 2m\omega_1 + 2(n+1)\omega_3]^3} \right] - \{p\} \\ &= \sum_{i=1}^{i=\pi} \left[2\omega_1 \sum \sum \left\{ \frac{n}{[q_i + 2m\omega_1 + 2(n+1)\omega_3]} - \frac{n}{[2m\omega_1 + 2(n+1)\omega_3]^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{2nq_i}{[2m\omega_1 + 2(n+1)\omega_3]^3} \right\} - \{p\} \right] \\ &\quad + 4\omega_1^2 \sum \sum \left\{ \frac{n}{[q_i + 2m\omega_1 + 2(n+1)\omega_3]^3} + \frac{n}{[2m\omega_1 + 2(n+1)\omega_3]^3} \right\} - \{p\}.\end{aligned}$$

The terms introduced destroy each other either identically or because $\sum p_i = \sum q_i$. Write this in the form

$$\delta_1 = 2\omega_1 S + 4\omega_1^2 T.$$

The T here is the R above, so

$$\delta_1 = 2\omega_1 S + 4\omega_1^2 R.$$

Again,

$$\delta_3 = \sum_i \left[\sum \frac{-n}{q_i + 2m\omega_1 + 2n\omega_3} + \frac{n}{q_i + 2m\omega_1 + 2(n+1)\omega_3} + \frac{2m\omega_3}{[q + 2m\omega_1 + 2(n+1)\omega_3]^3} + \frac{4\omega_3^2 n}{[q + 2m\omega_1 + 2(n+1)\omega_3]^3} \right] - \{p\}.$$

After some easy reductions we get

$$\delta_3 = \sum_{i=1}^{\pi} [\zeta(p_i) - \zeta(q_i)] + 2\omega_3 S + 4\omega_3^2 R,$$

and so

$$\delta_3 \omega_1 - \delta_1 \omega_3 = \omega_1 \sum [\zeta(p_i) - \zeta(q_i)] + 4\omega_1 \omega_3 R (\omega_3 - \omega_1).$$

We have now

$$\Omega'(u + 2\omega_1) = \Omega'(u) + \lambda_1,$$

$$\Omega'(u + 2\omega_3) = \Omega'(u) - \sum p(u - q_i) + \sum p(u - p_i),$$

and

$$\Omega(u + 2\omega_1) = \Omega(u) + \lambda_1 u + \delta_1,$$

$$\Omega(u + 2\omega_3) = \Omega(u) + \lambda_3 u + \delta_3$$

$$+ \sum [\zeta(u - q_i) - \zeta(u - p_i)].$$

Finally,

$$F(u + 2\omega_1) = F(u) e^{\lambda_1 \frac{u^2}{2} + \delta_1 u + \kappa_1},$$

$$F(u + 2\omega_3) = F(u) \frac{\zeta(u - q_1) \zeta(u - q_2) \dots \zeta(u - q_\pi)}{\zeta(u - p_1) \zeta(u - p_2) \dots \zeta(u - p_\pi)} e^{\lambda_3 \frac{u^2}{2} + \delta_3 u + \kappa_3}.$$

Choose now the cubic

$$g(u) = Au^3 + Bu^2 + Cu,$$

so that

$$6A\omega_1 u^2 + (12A\omega_1^2 + 4B\omega_1)u + 8A\omega_1^3 + 4B\omega_1^2 + 2C\omega_1 = -\lambda_1 \frac{u^2}{2} - \delta_1 u - \kappa_1;$$

this requires

$$A = -\frac{\lambda_1}{12\omega_1}, \quad B = \frac{\lambda_1 \omega_1 - \delta_1}{4\omega_1}, \quad C = -\frac{1}{6\omega_1} [\lambda_1 \omega_1^3 - 3\delta_1 \omega_1 + \kappa_1].$$

Writing again

$$e^{g(u)} F(u) = G(u),$$

and it is seen that $G(u)$ satisfies the equations

$$G(u + 2\omega_1) = G(u),$$

$$G(u + 2\omega_3) = G(u) \frac{\zeta(u - q_1) \zeta(u - q_2) \dots \zeta(u - q_\pi)}{\zeta(u - p_1) \zeta(u - p_2) \dots \zeta(u - p_\pi)} e^{\alpha u^2 + \beta u + \gamma},$$

where

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{2\omega_1} (\lambda_3\omega_1 - \lambda_1\omega_3) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=\pi} [\wp(q_i) - \wp(p_i)], \\ \beta &= \frac{\lambda_1\omega_3}{\omega_1} (\omega_1 - \omega_3) + \frac{\delta_3\omega_1 - \delta_1\omega_3}{\omega_1} \\ &= \frac{\lambda_1\omega_3}{\omega_1} (\omega_1 - \omega_3) + \Sigma [\zeta(p_i) - \zeta(q_i)] + 4\omega_3(\omega_3 - \omega_1)R,\end{aligned}$$

but, as seen above, $\lambda_1 = 4\omega_1 R$, so we get finally

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=\pi} [\wp(q_i) - \wp(p_i)], \\ \beta &= \sum_{i=1}^{i=\pi} [\zeta(q_i) - \zeta(p_i)], \\ \gamma &= -\frac{\lambda_1\omega_3}{3\omega_1} [2\omega_3^2 + \omega_1^2 - 3\omega_1\omega_3] + \frac{\delta_1\omega_3}{\omega_1} (\omega_1 - \omega_3) + \frac{\kappa_3\omega_1 - \kappa_1\omega_3}{\omega_1}.\end{aligned}$$

The function $G(u)$ in this case is associated with a doubly periodic function of the third kind; in the preceding case, where the genus of the function was taken as two, the corresponding doubly periodic function is of the second kind.

Sur les surfaces de Kummer elliptiques.

PAR M. GEORGES HUMBERT.

1. On sait depuis longtemps que les coordonnées d'un point de la surface de l'onde peuvent s'exprimer par des fonctions doublement périodiques séparément par rapport à deux paramètres u et v ;* la même propriété appartient naturellement à la transformée homographique de cette surface, transformée que M. Cayley a nommée "*tétraédroïde*."

Le tétraédroïde étant un cas particulier de la surface de Kummer à seize points doubles, la question se pose de rechercher si d'autres surfaces de Kummer possèdent la même propriété et de les déterminer toutes.

La recherche et l'étude de ces *Surfaces de Kummer elliptiques* forment l'objet du présent mémoire ; il existe une liaison intime entre cette théorie et celle des courbes de genre deux dont une intégrale abélienne se réduit à une intégrale elliptique.

I.—*Détermination des surfaces de Kummer elliptiques.*

2. Les coordonnées d'un point d'une surface de Kummer générale peuvent s'exprimer, en fonction abélienne de deux paramètres, u et v , de la manière suivante. Soient $2\pi i, 0; 0, 2\pi i; a, b; b, c$ quatre paires de périodes : on suppose que la quantité $b^2 - ac$, lorsqu'on y remplace a, b, c par leurs parties réelles, est négative ; admettons de plus, pour fixer les idées, que la partie réelle de a est également négative. Les coordonnées homogènes, x_h , d'un point d'une surface de Kummer seront (à un même facteur de proportionnalité près) des fonctions uniformes et entières de u et v satisfaisant aux relations :

$$\left. \begin{aligned} x_h(u + 2\pi i, v) &= x_h(u, v + 2\pi i) = x_h(u, v), \\ x_h(u + a, v + b) &= x_h(u, v) e^{-2u - a}, \\ x_h(u + b, v + c) &= x_h(u, v) e^{-2v - c}. \end{aligned} \right\} \quad (h = 1, 2, 3, 4) \quad (1)$$

* Weber, Journal de Crelle, tome 94, p. 358.

Réciproquement, quatre fonctions uniformes et entières de u, v , linéairement distinctes, satisfaisant aux relations (1), sont les coordonnées homogènes d'un point de l'espace qui décrit une surface de Kummer lorsque u et v varient.*

Pour que les quotients des fonctions $x_h(u, v)$ deux à deux soient réductibles à des fonctions doublement périodiques séparément par rapport à deux variables, il faut et il suffit que, par une transformation du premier ordre, on puisse ramener le tableau des périodes primitives au tableau suivant :

$$\begin{array}{cccc} 2\pi i & 0 & \omega & \frac{2\pi i}{n} \\ 0 & 2\pi i & \frac{2\pi i}{n} & \omega' \end{array}$$

n désignant un nombre entier positif : cette proposition a été démontrée sous une autre forme par M. Picard, dans son mémoire sur la réduction des intégrales abéliennes aux intégrales elliptiques pour les courbes de genre deux;† elle résulte également du théorème plus général de M. Poincaré sur la réduction des intégrales abéliennes à des intégrales de genre moindre.‡

Sans insister sur ce point, nous voyons que, pour une *surface de Kummer elliptique*, les coordonnées homogènes d'un point seront des fonctions de u, v satisfaisant aux équations (1), dans lesquelles on suppose $b = \frac{2\pi i}{n}$, c. à d. :

$$\left. \begin{aligned} x_h(u + 2\pi i, v) &= x_h(u, v + 2\pi i) = x_h(u, v), \\ x_h\left(u + a, v + \frac{2\pi i}{n}\right) &= x_h(u, v) e^{-2u - a}, \\ x_h\left(u + \frac{2\pi i}{n}, v + c\right) &= x_h(u, v) e^{-2v - c} \end{aligned} \right\} \quad (h = 1, 2, 3, 4) \quad (2)$$

et réciproquement.

Nous avons d'ailleurs fait voir, dans notre mémoire sur les surfaces hyperelliptiques, que les fonctions uniformes entières qui satisfont à des relations de la forme (1) [ou (2)] sont fonctions linéaires et homogènes de *quatre* d'entre elles, et qu'elles sont toutes *paires*, c. à d. ne changent pas si l'on y change simultanément u et v en $-u, -v$.§ En d'autres termes, puisqu'il y a quatre coordon-

* Voir à ce sujet : Weber, Journal de Crelle, tome 84 ; G. Humbert, Journal de Mathém., 4^e série, tome IX, p. 47.

† Picard, Bulletin de la Société Mathém., tome XI, p. 48.

‡ Poincaré, American Journal, tome VIII, p. 289 et suiv.

§ Journal de Math., tome IX (4^e série), p. 86.

nées homogènes, $x_h(u, v)$, les surfaces de Kummer elliptiques qui correspondent à des valeurs données de l'entier n et des périodes a, c , sont les transformées homographiques les unes des autres, et il suffit d'en étudier une pour avoir les propriétés projectives des autres.

Nous verrons, dans ces recherches, que le nombre n joue un rôle prépondérant, et nous lui donnerons le nom d'*indice* de la surface.

3. Cela posé, cherchons à exprimer, à l'aide des fonctions thêta elliptiques, les fonctions $x_h(u, v)$ qui vérifient les relations (2); il suffira, pour cela, de former a priori quatre de ces fonctions, linéairement distinctes.

Or considérons la fonction $\Theta_1(u)$, de Jacobi, formée avec les périodes $2\pi i$ et $\frac{a}{2}$; désignons-la, pour la symétrie des notations ultérieures, par $\mathcal{D}_0(u)$, on aura par définition :

$$\mathcal{D}_0(u) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} e^{m^2 \frac{a}{4} + mu}.$$

Posons

$$\mathcal{D}_h(u) = \mathcal{D}_0\left(u + \frac{h\pi i}{n}\right); \quad (h = 0, 1, \dots, 2n-1)$$

les $2n$ fonctions $\mathcal{D}_h(u)$ vérifient les relations

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{D}_h(u + 2\pi i) &= \mathcal{D}_h(u), \\ \mathcal{D}_h\left(u + \frac{2\pi i}{n}\right) &= \mathcal{D}_{h+2}(u), \\ \mathcal{D}_h(u + a) &= \mathcal{D}_h(u) e^{-2u-a} e^{-2h \frac{\pi i}{n}}, \\ \mathcal{D}_h^*(u + na) &= \mathcal{D}_h(u) e^{-2nu - n^2 a}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Soit posé de même

$$\theta_0(v) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{m^2 \frac{c}{4} + mv},$$

$$\theta_h(v) = \theta_0\left(v + \frac{h\pi i}{n}\right); \quad (h = 0, 1, \dots, 2n-1)$$

les $2n$ fonctions $\theta_h(v)$ satisfont à des relations semblables aux relations (3), où a est remplacé par c .*

* Les séries $\mathcal{D}_0(u)$ et $\theta_0(v)$ convergent, car on a admis que la partie réelle de a est négative et il en est de même de la partie réelle de c , d'après l'hypothèse faite sur $b^2 - ac$.

Désignons maintenant par ε et η deux nombres donnés, égaux à 0 ou à 1, et considérons la fonction $F_{\varepsilon, \eta}(u, v)$ définie par l'équation

$$F_{\varepsilon, \eta}(u, v) = \sum \mathcal{S}_{2r+\varepsilon}(u) \theta_{2\rho+\eta}(v) e^{-(2r+\varepsilon)(2\rho+\eta) \frac{\pi i}{n}}. \quad (4)$$

Dans le second membre, la sommation est double et porte sur toutes les valeurs entières et positives de r et ρ , pour lesquelles $2r + \varepsilon$ et $2\rho + \eta$ restent tous deux inférieurs à $2n$, c. à d. sur toutes les valeurs de r et ρ comprises entre 0 et $n - 1$ inclus.

En donnant à ε et η toutes les valeurs dont ces quantités sont susceptibles on obtient ainsi quatre fonctions $F_{\varepsilon, \eta}$, à savoir F_{00} , F_{01} , F_{10} , F_{11} , et nous allons établir qu'elles vérifient les relations (2).

Ecrivons en effet en supprimant les indices ε et η :

$$F(u, v) = \sum \sum \mathcal{S}_p(u) \theta_q(v) e^{-pq \frac{\pi i}{n}},$$

p et q étant des entiers, respectivement de parité donnée et variant entre 0 et $2n - 1$, les deux limites pouvant être atteintes. On a évidemment

$$F(u + 2\pi i, v) = F(u, v + 2\pi i) = F(u, v).$$

Changeons maintenant u en $u + \frac{2\pi i}{n}$ et v en $v + c$; on aura, d'après (3) :

$$\mathcal{S}_p\left(u + \frac{2\pi i}{n}\right) \theta_q(v + c) e^{-pq \frac{\pi i}{n}} = \mathcal{S}_{p+2}(u) \theta_q(v) e^{-2p - c} e^{-(p+2)q \frac{\pi i}{n}}$$

et par suite, puisque $p + 2$ est de même parité que p :

$$F\left(u + \frac{2\pi i}{n}, v + c\right) = F(u, v) e^{-2p - c}.$$

De même

$$F\left(u + a, v + \frac{2\pi i}{n}\right) = F(u, v) e^{-2u - a},$$

$F(u, v)$ vérifie donc bien les relations (2).

Or il est bien connu (et d'ailleurs évident) que les fonctions $\mathcal{S}_h(u)$, et de même les fonctions $\theta_h(v)$, sont linéairement distinctes; il en résulte immédiatement que les quatre fonctions $F(u, v)$ ne sont liées par aucune relation linéaire et homogène, et dès lors la fonction entière la plus générale qui vérifie les relations (2) est une combinaison linéaire de nos fonctions $F_{\varepsilon, \eta}(u, v)$.

4. En résumé, la surface de Kummer elliptique la plus générale, d'indice n , sera une transformée homographique de la surface définie, en coordonnées homogènes, par les équations

$$\left. \begin{aligned} x_1 = F_{0,0}(u, v) &= \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{n-1} \mathfrak{S}_{2r}(u) \theta_{2p}(v) e^{-4rp} \frac{\pi i}{n}, \\ x_2 = F_{0,1}(u, v) &= \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{n-1} \mathfrak{S}_{2r}(u) \theta_{2p+1}(v) e^{-2r(2p+1)} \frac{\pi i}{n}, \\ x_3 = F_{1,0}(u, v) &= \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{n-1} \mathfrak{S}_{2r+1}(u) \theta_{2p}(v) e^{-2p(2r+1)} \frac{\pi i}{n}, \\ x_4 = F_{1,1}(u, v) &= \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{n-1} \mathfrak{S}_{2r+1}(u) \theta_{2p+1}(v) e^{-(2r+1)(2p+1)} \frac{\pi i}{n}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

les fonctions $\mathfrak{S}_h(u)$, $\theta_h(v)$ étant celles définies plus haut. Les quotients des x_h deux à deux ne changent pas quand on augmente u et v de périodes simultanées.

5. *Remarque*: On peut vérifier que les fonctions $F_{s,n}(u, v)$ sont paires; la fonction $\mathfrak{S}_0(u)$ étant en effet une fonction paire de u , on aura

$$\mathfrak{S}_h(-u) = \mathfrak{S}_0\left(u + \frac{h\pi i}{n}\right) = \mathfrak{S}_0\left(u - \frac{h\pi i}{n}\right) = \mathfrak{S}_{2n-h}(u)$$

et de même

$$\theta_h(-v) = \theta_{2n-h}(v).$$

Changer u et v en $-u$, $-v$ dans la fonction $F(u, v)$ écrite au n° 3, revient donc à changer p et q en $2n-p$, $2n-q$, ce qui n'altère pas la parité respective de ces deux nombres; de plus on a évidemment

$$e^{-pq \frac{\pi i}{n}} = e^{-(2n-p)(2n-q) \frac{\pi i}{n}}$$

et par suite $F(u, v)$ ne change pas.

On déduit de là que la surface définie par (5) est bien une surface d'ordre quatre. En effet, d'après un important théorème de M. Poincaré,* deux fonctions entières satisfaisant aux relations (1) ont huit zéros communs, et ces zéros, d'après ce qui précède, sont deux à deux égaux et de signes contraires, de la

* Bulletin de la Société Mathém., tome XI, p. 129.

forme (u, v) et $(-u, -v)$. En d'autres termes la surface (5) est coupée par une droite quelconque de l'espace en $\frac{1}{2} \cdot 8$, c. à d. quatre points.

Si l'indice n était égal à l'unité, cette conclusion serait en défaut: dans ce cas en effet, il est facile de voir que les fonctions $F_{1,n}(u, v)$ sont paires *séparément* par rapport à u et par rapport à v ; à un point de la surface (5) correspondent alors les quatre couples d'arguments (u, v) ; $(-u, v)$; $(u, -v)$; $(-u, -v)$; cette surface est donc d'ordre $\frac{1}{2} \cdot 8$, c. à d. d'ordre deux, comme on le vérifierait d'ailleurs en formant les fonctions F .

II.—*Etudes des surfaces de Kummer elliptiques; généralités.*

6. Les propriétés géométriques des surfaces de Kummer elliptiques sont liées à celles de deux séries de courbes remarquables qu'on peut tracer sur elles; cette étude nous permettra d'obtenir, sous forme géométrique, la relation qui doit exister entre les points doubles d'une surface de Kummer, pour que la surface soit elliptique.

7. Si, dans les équations (5) qui définissent la surface, on donne à v une valeur constante, v_0 , la courbe que décrit sur la surface le point (x_1, \dots, x_4) est une courbe *algébrique, de genre un*, puisque les coordonnées homogènes du point mobile sont des fonctions d'une variable u , dont les quotients deux à deux sont doublement périodiques, aux périodes $2\pi i$ et na , en vertu des relations (3).

Cette courbe est d'ordre $2n$, car les coordonnées $x_h(u)$ satisfaisant aux relations

$$\left. \begin{aligned} x_h(u + 2\pi i) &= x_h(u), \\ x_h(u + na) &= x_h(u) e^{-2nu - n^2a} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

sont ce qu'on appelle des fonctions *thêta* d'ordre $2n$, et ont $2n$ zéros dans le parallélogramme des périodes $(2\pi i, na)$: en d'autres termes la courbe est coupée par un plan en $2n$ points et son degré est $2n$.

Il est à observer que la courbe $v = v_0$ est la même que la courbe $v = -v_0$, puisqu'à un point de la surface de Kummer correspondent les couples d'arguments u, v et $(-u, -v)$; de même la courbe $v = v_0$ coïncide avec la courbe

$$v = \pm v_0 + 2h\pi i + 2k \frac{\pi i}{n} + lc, \quad (7)$$

h, k, l étant entiers, puisque les valeurs de v qui correspondent à un même point de la surface sont évidemment de la forme (7).

On obtient un second système de courbes d'ordre $2n$ et de genre un en donnant à u , dans les équations (5), une valeur constante. Il est clair que deux courbes d'un même système, $u = u_0$ et $u = u_1$, n'ont aucun point commun, et qu'il ne passe qu'une courbe du système par un point de la surface de Kummer.

Ces deux systèmes de courbes sont évidemment spéciaux aux surfaces de Kummer elliptiques; il est clair de plus, en vertu de la représentation paramétrique (5), que toutes les courbes $u = u_0$ ont le même module, et il en est de même des courbes $v = v_0$, entre elles.

8. Une courbe $u = u_0$ et une courbe $v = v_0$, de l'autre système, sont sur une même surface d'ordre n , dont elles constituent l'intersection complète avec la surface de Kummer.

Pour le démontrer analytiquement considérons la fonction entière $\phi(u)$ qui satisfait aux relations

$$\left. \begin{aligned} \phi\left(u + \frac{2\pi i}{n}\right) &= \phi(u), \\ \phi(u + a) &= \phi(u) e^{-2nu - na} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

on trouve aisément, par la méthode des coefficients indéterminés, en reproduisant un calcul connu, qu'elle est de la forme

$$\phi(u) = \lambda_0 \phi_0(u) + \lambda_1 \phi_1(u)$$

les λ étant des constantes arbitraires, et étant posé

$$\begin{aligned} \phi_0(u) &= \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} e^{2n\mu u + n\mu^2 a}, \\ \phi_1(u) &= \sum e^{2n\left(\mu + \frac{1}{2}\right)u + n\left(\mu + \frac{1}{2}\right)^2 a}. \end{aligned}$$

D'ailleurs ϕ_0 et ϕ_1 , et par suite ϕ , sont évidemment des fonctions paires de u . De plus $\phi(u)$, d'après (8), étant une fonction thêta d'ordre deux, a deux zéros, de la forme u_0 et $-u_0$, dans le parallélogramme des périodes $\left(\frac{2\pi i}{n}, a\right)$.

Soit de même $\psi(v)$ la fonction entière la plus générale de v satisfaisant aux relations

$$\left. \begin{aligned} \psi\left(v + \frac{2\pi i}{n}\right) &= \psi(v), \\ \psi(v + c) &= \psi(v) e^{-2nv - nc} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

La fonction paire de u, v , $\phi(u)\psi(v)$, que nous désignerons par $F(u, v)$ vérifie les équations:

$$\left. \begin{aligned} F(u + 2\pi i, v) &= F(u, v + 2\pi i) = F(u, v), \\ F\left(u + a, v + \frac{2\pi i}{n}\right) &= F(u, v) e^{-2\pi u - na}, \\ F\left(u + \frac{2\pi i}{n}, v + c\right) &= F(u, v) e^{-2\pi v - nc}, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Or nous avons fait voir d'une manière générale* que sur une surface de Kummer dont les coordonnées d'un point sont des fonctions entières $x_h(u, v)$, vérifiant les équations (1), on obtient l'équation de la courbe complète commune à la surface et à une surface algébrique d'ordre n , en égalant à zéro une fonction entière, paire, de u, v , vérifiant les relations:

$$\left. \begin{aligned} \Theta(u + 2\pi i, v) &= \Theta(u, v + 2\pi i) = \Theta(u, v), \\ \Theta(u + a, v + b) &= \Theta(u, v) e^{-2\pi u - na}, \\ \Theta(u + b, v + c) &= \Theta(u, v) e^{-2\pi v - nc}, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

et réciproquement, la courbe qu'on définit en égalant à zéro une telle fonction est l'intersection complète de la surface de Kummer et d'une surface d'ordre n .

D'après cela, la courbe, représentée sur la surface de Kummer elliptique que nous étudions, par l'équation $F(u, v) = 0$ est l'intersection complète de cette surface et d'une surface d'ordre n .

Or la courbe $F(u, v) = 0$ se décompose en deux courbes, $\phi(u) = 0$ et $\psi(v) = 0$. La fonction $\phi(u)$ ayant, comme nous l'avons vu, deux zéros, de la forme u_0 et $-u_0$, la courbe $\phi(u) = 0$ sera une quelconque des courbes d'ordre $2n$, $u = u_0$; de même la courbe $\psi(v) = 0$ sera une quelconque des courbes $v = v_0$, et ces deux courbes sont, comme on vient de l'établir, sur une même surface d'ordre n .

9. On peut donner de ce théorème une autre démonstration, plus géométrique, et qui ne sera pas inutile pour la suite.

Cherchons d'abord en combien de points se coupent les deux courbes $u = u_0$ et $v = v_0$. Les équations de ces deux courbes pouvant s'écrire (n° 7):

$$\left. \begin{aligned} u &= \pm u_0 + 2h\pi i + 2k \frac{\pi i}{n} + la, \\ v &= \pm v_0 + 2h'\pi i + 2k' \frac{\pi i}{n} + l'c, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

* Journal de Math., tome IX, p. 53 (4^e série).

les arguments des points communs seront évidemment donnés par les deux équations précédentes, où h, k, \dots, l' sont des entiers quelconques. On peut d'abord faire $h = h' = 0$ sans changer le point (u, v) ; de plus a et $\frac{2\pi i}{n}$ formant une période simultanée de u, v , on peut, sans changer le point (12), augmenter à la fois u de $-k'a$ et v de $-2k' \frac{\pi i}{n}$; de même on peut augmenter u et v respectivement de $-2l' \frac{\pi i}{n}$ et de $-l'c$, et on a ainsi pour le point (12)

$$\begin{aligned} u &= \pm u_0 + 2p \frac{\pi i}{n} + qa, \\ v &= \pm v_0, \end{aligned}$$

p et q étant deux entiers. Enfin le point ne changeant pas si on remplace u, v par $-u, -v$, on voit que tous les points cherchés sont compris dans les deux formules

$$\left\{ \begin{array}{l} u = u_0 + 2p \frac{\pi i}{n} + qa, \\ v = v_0, \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} u = -u_0 + 2p \frac{\pi i}{n} + qa, \\ v = v_0. \end{array} \right.$$

Dans ces formules, p ne peut prendre que les valeurs $0, 1, \dots, (n-1)$, car si on augmente p de n unités, on augmente u de $2\pi i$, ce qui redonne le même point. De même on peut augmenter u et v simultanément de na et de $2\pi i$, puisque $(a, \frac{2\pi i}{n})$ est une période simultanée; donc si on ajoute n unités à q , on retombe sur le même point, et par suite q peut prendre seulement les valeurs $0, 1, \dots, n-1$.

Donc enfin les points communs aux deux courbes $u = u_0$ et $v = v_0$ sont au nombre de n^2 , donnés par la première formule, et de n^2 , donnés par la seconde, soit un total de $2n^2$.

Cela posé, par $2n^2$ points arbitraires de la courbe de genre un et d'ordre $2n$, $u = u_0$, faisons passer une surface d'ordre n , S_n : cette surface contiendra la courbe tout entière, d'après les propriétés des courbes de genre un. Si on fait de plus passer S_n par un point de la courbe d'ordre $2n$, $v = v_0$, comme elle coupe déjà celle-ci en $2n^2$ points, situés sur la courbe $u = u_0$, elle aura en tout $2n^2 + 1$ points communs avec elle et la contiendra dès lors tout entière. Ainsi la condition, pour une surface d'ordre n , de passer par les deux courbes $u = u_0$ et $v = v_0$, équivaut à $2n^2 + 1$ conditions linéaires, et pour

démontrer que les deux courbes sont sur une surface d'ordre n , il suffira d'établir qu'on peut faire passer une telle surface par $2n^2 + 1$ points de notre surface de Kummer.

Or le nombre des points, d'une surface d'ordre 4, par lesquels on peut faire passer une surface d'ordre n ne comprenant pas la surface primitive, est évidemment égal à

$$\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3) - \frac{1}{6}(n-3)(n-2)(n-1) - 1,$$

c. à d.

$$2n^2 + 1.$$

Le théorème est donc démontré. Réciproquement, il est aisé de voir que toute surface d'ordre n menée par une courbe $u = u_0$ coupe en outre la surface de Kummer suivant une courbe du système $v = v_0$.

10. Parmi les courbes $u = u_0$, il en est de particulièrement intéressantes; ce sont celles qui correspondent aux valeurs de u_0 égales à des demi-périodes de u .

Ces courbes ont pour équation:

$$u = h\pi i + k \frac{\pi i}{n} + l \frac{a}{2}; \quad (h, k, l = 0, 1) \quad (13)$$

et paraissent être en nombre égal à 8, puisque h, k, l peuvent prendre chacun deux valeurs, mais nous verrons plus loin qu'elles se réduisent à quatre courbes distinctes.

Soit, pour abréger, $u = \frac{P}{2}$ l'équation de l'une d'elles, P étant une période de u ; désignons par P' la période correspondante de v .

Soit X le quotient de deux coordonnées $x_\lambda(u, v)$ d'un point de la surface de Kummer (5); on a (n° 5)

$$X(u, v) = X(-u, -v).$$

Pour $u = \frac{P}{2}$,

$$X\left(\frac{P}{2}, v\right) = X\left(-\frac{P}{2}, -v\right) = X\left(\frac{P}{2}, -v + P'\right), \quad (14)$$

puisqu'on peut ajouter à u et v la période P, P' , sans changer X . En d'autres termes, on voit qu'à un point de la courbe $u = \frac{P}{2}$, correspondent pour v deux

arguments, v et $P' - v$; par suite le degré de cette courbe sera la moitié du degré du cas général, c. à d. $\frac{1}{2} 2n$ ou n . Il en résulte également que la courbe $u = \frac{P}{2}$, comptée deux fois, jouira des propriétés générales des courbes $u = u_0$; par exemple, qu'il existera une surface d'ordre n circonscrite à la surface de Kummer le long de cette courbe, et passant par une courbe arbitraire $v = v_0$.

De plus la courbe $u = \frac{P}{2}$ est *unicursale*. En effet, les coordonnées non homogènes d'un de ses points sont des fonctions doublement périodiques de v qui ne changent pas quand on remplace v par $P' - v$, d'après (14); ce sont donc des fonctions doublement périodiques *paires* de la variable $V = v - \frac{P'}{2}$, et elles s'expriment en fonction rationnelle de $\wp V$, ce qui établit la proposition.

11. Démontrons maintenant que les courbes

$$u = h\pi i + k \frac{\pi i}{n} + l \frac{a}{2}$$

se réduisent à quatre.

On peut, sans changer la courbe, ajouter au second membre la quantité $2\mu \frac{\pi i}{n}$, μ étant entier (n° 7); on a ainsi

$$u = h\pi i + k \frac{\pi i}{n} + 2\mu \frac{\pi i}{n} + l \frac{a}{2}.$$

Si n est impair, on pourra toujours trouver un entier μ tel que $k + 2\mu$ soit un multiple, ρn , de n ; et il vient, pour cette valeur de μ :

$$u = (h + \rho) \pi i + l \frac{a}{2}.$$

On a donc seulement quatre courbes:

$$u = 0; \quad u = \pi i; \quad u = \frac{a}{2}; \quad u = \pi i + \frac{a}{2}.$$

Si n est pair, on prendra $\mu = -\frac{n}{2} h$, et il viendra pour u :

$$u = k \frac{\pi i}{n} + l \frac{a}{2},$$

d'où quatre courbes seulement:

$$u = 0; \quad u = \frac{\pi i}{n}; \quad u = \frac{a}{2}; \quad u = \frac{\pi i}{n} + \frac{a}{2}.$$

12. De même, parmi les courbes $v = v_0$, figurent quatre courbes unicursales d'ordre n , dont les équations se déduisent des précédentes en changeant u en v et a en c .

III.—*Surfaces de Kummer elliptiques d'indice impair.*

13. Pour les recherches qui suivent, il est nécessaire de distinguer deux cas suivant que l'indice n est impair ou pair; considérons d'abord le cas d'un indice impair,

$$n = 2d + 1.$$

Les seize points doubles de la surface de Kummer ont pour arguments, comme on sait, les seize demi-périodes simultanées; il en résulte que la courbe $u = u_0$ (ou $v = v_0$) qui passe par un point double est nécessairement une des quatre courbes unicursales du système correspondant. Il est intéressant d'étudier la répartition des points doubles sur ces courbes.

Soit par exemple la courbe $u = 0$; un point double de la surface de Kummer ayant pour arguments

$$\begin{cases} u = h\pi i + k \frac{\pi i}{n} + l \frac{a}{2}, \\ v = h'\pi i + k' \frac{c}{2} + l' \frac{\pi i}{n}, \end{cases} \quad (h, h', k, l = 0, 1)$$

sera sur cette courbe si l'on a:

$$h\pi i + k \frac{\pi i}{n} + l \frac{a}{2} = 2k' \frac{\pi i}{n},$$

car la courbe $u = 0$ est la même que la courbe $u = 2k' \frac{\pi i}{n}$. On en conclut

$$l = 0, \text{ et } nh + k = 2k',$$

ou, en remplaçant n par sa valeur, $2d + 1$:

$$2(dh - k') + h + k = 0,$$

équation qui donnera pour k' une valeur entière si $h + k$ est pair.

Ainsi les points doubles situés sur la courbe $u = 0$ seront les quatre points :

$$\begin{cases} u=0 \\ v= \end{cases} \quad \begin{cases} u=0 \\ v=\pi i \end{cases} \quad \begin{cases} \pi i + \frac{\pi i}{n} \\ \frac{c}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} \pi i + \frac{\pi i}{n} \\ \pi i + \frac{c}{2} \end{cases}$$

On trouverait de même les arguments des quatre points doubles situés sur chacune des autres courbes d'ordre n , et on établit ainsi le tableau suivant.

Courbes.	Arguments u, v des points doubles situés sur les courbes.			
$u = 0$	$0, 0$	$0, \pi i$	$\pi i + \frac{\pi i}{n}, \frac{c}{2}$	$\pi i + \frac{\pi i}{n}, \frac{c}{2} + \pi i$
$u = \pi i$	$\pi i, 0$	$\pi i, \pi i$	$\frac{\pi i}{n}, \frac{c}{2}$	$\frac{\pi i}{n}, \frac{c}{2} + \pi i$
$u = \frac{a}{2}$	$\frac{a}{2}, \pi i + \frac{\pi i}{n}$	$\frac{a}{2}, \frac{\pi i}{n}$	$\frac{a}{2} + \pi i + \frac{\pi i}{n}, \frac{c}{2} + \pi i + \frac{\pi i}{n}$	$\frac{a}{2} + \pi i + \frac{\pi i}{n}, \frac{c}{2} + \frac{\pi i}{n}$
$u = \frac{a}{2} + \pi i$	$\frac{a}{2} + \pi i, \pi i + \frac{\pi i}{n}$	$\frac{a}{2} + \pi i, \frac{\pi i}{n}$	$\frac{a}{2} + \frac{\pi i}{n}, \frac{c}{2} + \pi i + \pi i$	$\frac{a}{2} + \frac{\pi i}{n}, \frac{c}{2} + \frac{\pi i}{n}$

Un tableau analogue donne les points doubles par lesquels passent les quatre courbes unicursales d'ordre n , du système $v = v_0$.

Courbes.	Arguments u, v des points doubles situés sur les courbes.			
$v = 0$	$0, 0$	$\pi i, 0$	$\frac{a}{2}, \pi i + \frac{\pi i}{n}$	$\frac{a}{2} + \pi i, \pi i + \frac{\pi i}{n}$
$v = \pi i$	$0, \pi i$	$\pi i, \pi i$	$\frac{a}{2}, \frac{\pi i}{n}$	$\frac{a}{2} + \pi i, \frac{\pi i}{n}$
$v = \frac{c}{2}$	$\pi i + \frac{\pi i}{n}, \frac{c}{2}$	$\frac{\pi i}{2}, \frac{c}{2}$	$\frac{a}{2} + \pi i + \frac{\pi i}{n}, \frac{c}{2} + \pi i + \frac{\pi i}{n}$	$\frac{a}{2} + \frac{\pi i}{n}, \frac{c}{2} + \pi i + \frac{\pi i}{n}$
$v = \frac{c}{2} + \pi i$	$\pi i + \frac{\pi i}{n}, \frac{c}{2} + \pi i$	$\frac{\pi i}{n}, \frac{c}{2} + \pi i$	$\frac{a}{2} + \pi i + \frac{\pi i}{n}, \frac{c}{2} + \frac{\pi i}{n}$	$\frac{a}{2} + \frac{\pi i}{n}, \frac{c}{2} + \frac{\pi i}{n}$

Ce nouveau tableau est le même que le premier, où l'on aurait remplacé les lignes par les colonnes.

14. De l'examen de ces deux tableaux résultant des conséquences simples.

Rappelons d'abord que les seize points doubles de la surface de Kummer sont situés six à six sur chacune des seize coniques de la surface, et qu'il est facile de faire le tableau de ces seize groupes de points exprimés à l'aide de leurs arguments.

Cela posé, voici les propositions qu'on peut énoncer, en se reportant d'ailleurs aux propriétés générales des surfaces de Kummer.

I.—Les quatre points doubles d'une surface de Kummer d'indice impair, n , situés sur une même courbe unicursale d'ordre n du système $u = u_0$ sont les sommets d'un tétraèdre de Rosenhain, c. à d. d'un tétraèdre dont les faces sont quatre plans singuliers.

Par *plan singulier*, on entend le plan d'une des seize coniques de la surface de Kummer.

II.—Les seize points doubles se répartissent ainsi, par rapport aux quatre courbes unicursales du système $u = u_0$, en quatre tétraèdres de Rosenhain, qui n'ont deux à deux aucun sommet et aucune face communs.

II.—Des propositions pareilles s'appliquent aux quatre courbes unicursales du système $v = v_0$.

IV.—Un quelconque des quatre tétraèdres de Rosenhain du premier système et un quelconque des quatre tétraèdres du second ont un et un seul sommet commun la face opposée à ce sommet est la même dans les deux tétraèdres;

ou encore: Chaque courbe unicursale du système $u = u_0$ coupe chaque courbe unicursale du système $v = v_0$ en un point double de la surface de Kummer; les trois autres points doubles situés sur la première courbe et les trois autres points doubles situés sur la seconde sont sur une même conique de la surface de Kummer.

V.—D'après cela, on peut faire correspondre à un point double de la surface de Kummer le plan singulier qui est la face commune des deux tétraèdres de Rosenhain dont ce point est le sommet dans les deux systèmes: chaque point double et le plan singulier correspondant sont polaires réciproques l'un de l'autre par rapport à une des dix quadriques fondamentales; c. à d. à une des quadriques par rapport auxquelles la surface de Kummer est sa propre réciproque.

16. Les formules du n° 9 permettent de déterminer les points de la surface de Kummer où se rencontrent deux courbes unicursales d'ordre n de système différent. Considérons par exemple les courbes $u = 0$ et $v = 0$; d'après le n° 9, leurs points communs sont donnés par la formule *unique*,

$$\begin{cases} u = 2p \frac{\pi i}{n} + qa, \\ v = 0, \end{cases}$$

où p et q prennent les valeurs $0, 1, \dots, n-1$.

Il semble qu'on obtienne ainsi n^2 points, mais les deux points :

$$\begin{aligned} u &= 2p \frac{\pi i}{n} + qa, & \text{et} & & u' &= 2(n-p) \frac{\pi i}{n} + (n-q)a, \\ v &= 0, & & & v' &= 0, \end{aligned}$$

coïncident, car les sommes $(u + u')$ et $(v + v')$, c. à d. $2\pi i + na$ et 0 forment une période simultanée de u et v . D'ailleurs les nombres p et $n-p$, q et $n-q$ ne peuvent être simultanément égaux, puisque n est impair; par suite—à l'exception du point $u = 0, v = 0$ —les points donnés par la formule précédente coïncident deux à deux, et leur nombre total est

$$1 + \frac{n^2 - 1}{2}.$$

Ainsi : deux courbes unicursales d'ordre n , de système différent, se coupent en un point singulier de la surface de Kummer et ont en outre $\frac{n^2 - 1}{2}$ points communs.

17. Il en résulte sans difficulté, par un raisonnement semblable à celui du n° 9, que *l'on peut faire passer par les deux courbes unicursales une surface d'ordre $\frac{n+1}{2}$* , qui ne comprend pas la surface de Kummer, et qui par suite coupe encore cette dernière suivant une courbe d'ordre $2(n+1) - 2n$, c. à d. suivant une *conique*. Cette conique est celle qui contient les points doubles situés sur les deux courbes considérées, en dehors de celui qui leur est commun (n° 14) : pour le vérifier, observons en effet que la conique précédente est rencontrée par chacune des deux courbes d'ordre n en 3 points singuliers et en $\frac{n-3}{2}$ autres

points, car toute ligne tracée sur la surface de Kummer *touche* nécessairement un plan singulier en tous les points non singuliers où elle le rencontre. On voit ainsi que la conique considérée a, sur la surface d'ordre $\frac{n+1}{2}$, un nombre de points au moins égal à $2 \left[3 + \frac{n-3}{2} \right]$, c. à d. $n+3$, et par suite elle est tout entière sur la surface.

On aurait pu démontrer ce théorème analytiquement, en suivant une marche analogue à celle du n° 8.

18. Les résultats qui précèdent suffisent pour établir géométriquement les conditions nécessaires et suffisantes que doit remplir une surface de Kummer pour être une surface elliptique d'indice impair.

Ces conditions, en effet, lorsque l'indice est donné, se réduisent évidemment à une seule, qui, au point de vue analytique, constitue une relation entre les périodes a, b, c des fonctions hyperelliptiques liées à la surface. Or ces fonctions sont celles qu'on obtient en appliquant le problème de l'inversion de Jacobi aux intégrales abéliennes de première espèce et de genre deux qui appartiennent à une quelconque des sections de la surface par un plan tangent; par suite, au point de vue géométrique, la condition cherchée se traduira par une relation entre les trois *modules* d'une de ces sections. Si l'on observe maintenant que les modules d'une courbe du quatrième ordre à un point double sont les rapports anharmoniques des six tangentes (prises quatre à quatre), qu'on peut mener à la courbe par le point double, et que ces rapports sont égaux à ceux de six points singuliers de la surface de Kummer situés sur une même conique,* on voit que la question est ramenée au problème suivant :

Trouver, sur une surface de Kummer elliptique, d'indice donné, la relation projective qui lie les positions des six points doubles de cette surface situés sur une même conique.

En même temps nous aurons trouvé la condition qui doit lier les modules d'une courbe du quatrième ordre à un point double pour que cette courbe ait une (et par suite aussi une seconde) intégrale abélienne de première espèce réductible aux intégrales elliptiques.

* Voir par exemple Journal de Mathém., tome IX, p. 114 (4^e série).

19. Pour rendre plus claire la méthode que nous allons employer, nous l'appliquerons tout d'abord au cas particulier de $n = 3$.

D'après la théorie générale, les courbes $u = u_0$ sont des courbes d'ordre six, c. à d. des *sextiques*, de genre un, parmi lesquelles figurent *quatre cubiques gauches*.

Soit O une quelconque des seize coniques de la surface de Kummer, par exemple celle qui passe par les six points doubles ayant pour arguments u, v :

$$0, \pi i; \pi i + \frac{\pi i}{3}, \frac{c}{2}; \pi i + \frac{\pi i}{3}, \frac{c}{2} + \pi i; \pi i, 0; \frac{a}{2}, \pi i + \frac{\pi i}{3}; \frac{a}{2} + \pi i, \pi i + \frac{\pi i}{3},$$

que nous désignerons respectivement, suivant l'ordre ci-dessus, par

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_6.$$

Le plan de la conique O touche en trois points chacune des sextiques $u = u_0$, puisque ces sextiques sont tracées sur la surface de Kummer et que le plan considéré est tangent à la surface tout le long de la conique; les sextiques $u = u_0$ rencontrent donc chacune en *trois* points la conique O . Ces groupes de trois points, en nombre simplement infini, déterminent sur O une *involution*, puisque par un point de la surface de Kummer ne passe qu'une seule sextique. Un des groupes de l'involution est formé par les trois points $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, qui sont sur la cubique $u = 0$; la cubique $u = \pi i$ passe par le point α_4 et rencontre la conique O en un autre point, m_4 ; le groupe de l'involution auquel appartient α_4 est formé de ce point et du point m_4 compté *deux fois*, puisque l'on obtient une sextique de la famille $u = u_0$ en comptant *deux fois* la cubique $u = \pi i$ (n° 10). De même les groupes de l'involution auxquels appartiennent les points α_5 et α_6 comprennent respectivement un point de la conique compté deux fois.

En résumé, il existe sur la conique O une involution de groupes de 3 points, en nombre simplement infini—involution qui dépend par suite de *quatre* paramètres—et qui jouit des propriétés suivantes:

1°. Les trois points singuliers $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ forment un groupe de l'involution.

2°. Les deux points qui forment un groupe avec chacun des points singuliers $\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$ sont confondus.

Ces conditions établissent, entre les *quatre* paramètres dont l'involution dépend, $2 + 3$ c. à d. *cinq* relations; elles impliquent donc *une* relation entre les positions des points $\alpha_1, \dots, \alpha_6$ sur la conique O , et donnent ainsi la solution du problème que nous nous étions proposé.

20. On peut, dans le cas particulier actuel, donner à cette solution une forme élégante.

Sur la conique C les droites qui joignent deux points appartenant à un même groupe de l'involution enveloppent une conique C' , puisque par un point de C ne passent que deux de ces droites. La conique C' touche, d'après les propriétés qui précèdent, les trois côtés du triangle $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$; de plus les deux tangentes menées à C' par chacun des points $\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$ coïncident, ce qui prouve que C' passe par ces trois points. Ainsi, il existe une conique inscrite au triangle $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ et passant par les points $\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$. Inversement, s'il existe une telle conique, C' , nous savons, par les théorèmes de Poncelet, qu'il y aura une infinité simple de triangles inscrits à C et circonscrits à C' , et les sommets de ces triangles détermineront sur C une involution qui jouira évidemment des propriétés indiquées au n° 19.

Donc enfin :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface de Kummer soit elliptique et d'indice trois s'exprime ainsi, sous forme géométrique : les six points doubles situés sur une des coniques de la surface doivent se répartir en deux groupes de trois points chacun, de telle sorte qu'il existe une conique inscrite au triangle formé par les trois premiers points et circonscrite au triangle formé par les trois derniers.

21. *Remarque* : Au lieu des courbes $u = u_0$, on aurait pu considérer les courbes $v = v_0$. La cubique $v = 0$ passant par les points $\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$, on aurait établi de même qu'il existe une conique inscrite au triangle $\alpha_4 \alpha_5 \alpha_6$ et circonscrite au triangle $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$, d'où l'on déduit ce théorème de géométrie élémentaire :

Etant donnés sur une conique deux groupes de trois points formant deux triangles, s'il existe une conique inscrite au premier triangle et circonscrite au second, il existera une autre conique inscrite au second triangle et circonscrite au premier.

Sous une autre forme :

Chaque point d'intersection du cercle circonscrit à un triangle avec un des cercles inscrit ou exinscrits est le foyer d'une parabole circonscrite au triangle.

22. Il est aisé de donner une forme analytique à la condition trouvée au n° 20.

Supposons en effet que les coordonnées homogènes d'un point de la conique C soient exprimées en fonction quadratique et entière d'un paramètre, t ; on peut toujours admettre que les valeurs du paramètre qui correspondent aux trois points $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sont respectivement $0, 1, \infty$, et nous désignerons par λ^2, μ^2, ν^2 celles qui correspondent aux points $\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$. Nous aurons à exprimer, en désignant par λ', μ', ν' trois constantes, que les racines des trois polynômes du troisième ordre

$$\begin{aligned}(t - \lambda^2)(t - \lambda')^2, \\ (t - \mu^2)(t - \mu')^2, \\ (t - \nu^2)(t - \nu')^2,\end{aligned}$$

sont trois groupes d'une involution simplement infinie, d'ordre trois, dont un des groupes est formée par les valeurs $0, 1, \infty$. En d'autres termes il suffira d'écrire que les différences des trois polynômes précédents, pris deux à deux, sont divisibles par $t(t - 1)$, ce qui donne les relations :

$$\begin{aligned}\lambda^2 \lambda'^2 &= \mu^2 \mu'^2 = \nu^2 \nu'^2, \\ (1 - \lambda^2)(1 - \lambda')^2 &= (1 - \mu^2)(1 - \mu')^2 = (1 - \nu^2)(1 - \nu')^2,\end{aligned}$$

d'où :

$$\lambda \lambda' = \mu \mu' = \nu \nu' = \rho$$

et

$$\sqrt{1 - \lambda^2} \left(1 - \frac{\rho}{\lambda}\right) = \sqrt{1 - \mu^2} \left(1 - \frac{\rho}{\mu}\right) = \sqrt{1 - \nu^2} \left(1 - \frac{\rho}{\nu}\right). \quad (15)$$

L'élimination de ρ entre les équations (15) donne la condition cherchée, qui peut s'écrire :

$$(\lambda + \mu)^2 (\lambda + \nu)^2 (\mu + \nu)^2 = 4\lambda\mu\nu (1 + \lambda\mu + \lambda\nu + \mu\nu)(\lambda + \mu + \nu + \lambda\mu\nu). \quad (16)$$

On peut donner une autre forme à cette conclusion.

Le rapport anharmonique de quatre points situés sur une conique est égal au rapport anharmonique des quatre valeurs correspondantes du paramètre t ; donc λ^2, μ^2 et ν^2 sont les rapports anharmoniques des trois groupes de points $\alpha_4, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; $\alpha_5, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; $\alpha_6, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Ces rapports anharmoniques sont aussi, d'après une propriété rappelée au n° 18, les modules de la courbe du quatrième ordre, de genre deux, qui est liée à la surface de Kummer considérée; on peut donc dire que cette courbe est représentable point par point sur la courbe de genre deux

$$y^2 = x(x - 1)(x - \lambda^2)(x - \mu^2)(x - \nu^2) \quad (17)$$

qui a les mêmes modules.

Donc enfin la courbe (17) aura une intégrale abélienne de première espèce (et par suite une seconde) réductible aux intégrales elliptiques, avec l'indice 3, si la condition (16) est satisfaite.

23. Si, du cas où l'indice est égal à 3, nous passons à celui d'un indice impair quelconque, nous établissons, par les raisonnements du n° 19, les propositions suivantes.

Soient toujours $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_6$ les six points doubles de la surface de Kummer situés sur une même conique;* les courbes d'ordre $2n$, $u = \text{const.}$, déterminent sur cette conique une involution, formée par des groupes de n points en nombre simplement infini, et telle :

1° que les points $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ appartiennent à un même groupe et que les $n - 3$ autres points de ce groupe soient deux à deux confondus ;

2° que les groupes auxquels appartiennent respectivement les points $\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$ comprennent en outre $n - 1$ points deux à deux confondus.

Ces propriétés établissent une relation entre les positions des six points α . En effet, une involution simplement infinie, d'ordre n , dépend de $2n - 2$ paramètres ; les conditions précédentes établissent entre ces paramètres

$$2 + \frac{n-3}{2} + 3 \frac{n-1}{2},$$

c. à d. $2n - 1$ relations, et par suite il est nécessaire, pour que l'involution existe, que les points α soient liés par une relation, qui est précisément la condition cherchée.

Voici la marche qu'on pourrait suivre pour former analytiquement cette condition. Admettons, comme au n° précédent, que les points $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6$ aient respectivement pour argument, sur leur conique, les quantités $0, 1, \infty, \lambda^2, \mu^2, \nu^2$, il faudra exprimer, en désignant par $\lambda_i, \mu_i, \nu_i, \rho_i$ des constantes, que les quatre polynômes

$$\begin{aligned} f_1(t) &= (t - \lambda^2)(t - \lambda_1^2) \dots (t - \lambda_{\frac{n-1}{2}}^2), \\ f_2(t) &= (t - \mu^2)(t - \mu_1^2) \dots (t - \mu_{\frac{n-1}{2}}^2), \\ f_3(t) &= (t - \nu^2)(t - \nu_1^2) \dots (t - \nu_{\frac{n-1}{2}}^2), \\ f_4(t) &= t(t-1)(t - \rho_1^2) \dots (t - \rho_{\frac{n-3}{2}}^2), \end{aligned}$$

* Ces points sont, par exemple, dans l'ordre indiqué, ceux qui ont pour arguments :

$$0, \pi i; \pi i + \frac{\pi i}{n}, \frac{c}{2}; \pi i + \frac{\pi i}{n}, \frac{c}{2} + \pi i; \pi i, 0; \frac{a}{2}, \pi i + \frac{\pi i}{n}; + \frac{a}{2} + \pi i, \pi i + \frac{\pi i}{n}.$$

sont en involution, c. à d. que deux d'entre eux sont fonctions linéaires et homogènes des deux autres.

Il est aisé de voir que ces conditions reviennent aux suivantes.

1°. On aura

$$\left. \begin{aligned} f_1(0) &= f_2(0) = f_3(0), \\ f_1(1) &= f_2(1) = f_3(1). \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

2°. On exprimera qu'on a, quelque soit t :

$$\begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) & f_3(t) \\ \lambda^2 + 2\Sigma\lambda_i & \mu^2 + 2\Sigma\mu_i & \nu^2 + 2\Sigma\nu_i \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

3°. La différence $f_1(t) - f_2(t)$, débarrassée du facteur $t(t-1)$, sera un carré parfait.

On obtient ainsi, comme on le voit sans difficulté, entre les $3 \frac{n-1}{2}$ coefficients λ_i, μ_i, ν_i , un nombre de relations égal à

$$4 + (n-3) + \frac{n-3}{2},$$

c. à d. $3 \frac{n-1}{2} + 1$, et l'élimination des λ_i, μ_i, ν_i entre ces relations donnera l'équation algébrique cherchée entre λ^2, μ^2, ν^2 .

24. On peut donner quelques propriétés de cette équation, que nous désignerons par $F(\lambda^2, \mu^2, \nu^2) = 0$. Les quantités λ^2, μ^2, ν^2 sont en effet les rapports anharmoniques des points $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$, de telle sorte qu'on ait, en désignant par α_i le paramètre unicursal qui correspond au point α_i :

$$\lambda^2 = \frac{\alpha_4 - \alpha_1}{\alpha_4 - \alpha_3} : \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_3},$$

avec des expressions semblables pour μ^2 et ν^2 en remplaçant α_4 par α_5 et α_6 . Or la condition géométrique qu'exprime l'équation $F(\lambda^2, \mu^2, \nu^2) = 0$ dépend uniquement d'une répartition des points α_i en deux groupes de trois et nullement de l'ordre des points dans chaque groupe. Cette équation ne change donc pas si l'on permute entre eux $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ou $\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$. Permuter α_4 et α_5 revient à permuter λ^2 et μ^2 ; donc l'équation $F(\lambda^2, \mu^2, \nu^2)$ est symétrique par rapport à λ^2, μ^2, ν^2 .

ce fait n'était nullement évident; nous verrons qu'il ne se reproduit pas dans le cas d'un indice pair.

Permuter $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ revient à remplacer le rapport anharmonique λ^2 par une des cinq autres valeurs bien connues de ce rapport, c. à d. par

$$\frac{1}{\lambda^2}, 1 - \lambda^2, \frac{1}{1 - \lambda^2}, \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2}, \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - 1}.$$

Donc l'équation $F(\lambda^2, \mu^2, \nu^2) = 0$ ne change pas si l'on y remplace simultanément λ^2, μ^2, ν^2 par $\frac{1}{\lambda^2}, \frac{1}{\mu^2}, \frac{1}{\nu^2}$, ou par $1 - \lambda^2, 1 - \mu^2, 1 - \nu^2$, et par toutes les valeurs qui dérivent de ces deux transformations appliquées successivement dans un ordre quelconque.

L'équation $F(\lambda^2, \mu^2, \nu^2) = 0$ se décompose en quatre équations distinctes en λ, μ, ν : reprenons en effet les premières relations (18):

$$f_1(0) = f_2(0) = f_3(0);$$

elles s'écrivent:

$$\lambda^2 \lambda_1^2 \lambda_2^2 \dots = \mu^2 \mu_1^2 \mu_2^2 \dots = \nu^2 \nu_1^2 \nu_2^2 \dots,$$

d'où:

$$\lambda \lambda_1 \lambda_2 \dots = \pm \mu \mu_1 \mu_2 \dots = \pm \nu \nu_1 \nu_2 \dots$$

Chaque groupement des signes + et - conduit à une équation finale en λ, μ, ν : on passe de l'une de ces équations aux trois autres en changeant séparément ou simultanément les signes de μ et de ν .

Enfin chacune des quatre équations ainsi obtenues se décompose en quatre autres si l'on prend pour variables, à la place de λ, μ, ν , les quantités:

$$L = \sqrt{\frac{1 - \lambda}{1 + \lambda}}; \quad M = \sqrt{\frac{1 - \mu}{1 + \mu}}; \quad N = \sqrt{\frac{1 - \nu}{1 + \nu}}.$$

Les secondes relations (18): $f_1(1) = f_2(1) = f_3(1)$ s'écrivent en effet:

$$(1 - \lambda^2)[(1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2) \dots]^2 = (1 - \mu^2)[(1 - \mu_1)(1 - \mu_2) \dots]^2 \\ = (1 - \nu^2)[(1 - \nu_1)(1 - \nu_2) \dots]^2$$

d'où:

$$\frac{2L}{1 + L^2} (1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2) \dots = \pm \frac{2M}{1 + M^2} (1 - \mu_1)(1 - \mu_2) \dots \\ = \pm \frac{2N}{1 + N^2} (1 - \nu_1)(1 - \nu_2) \dots$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

25. *Remarque:* Si, plus généralement, on considère la courbe de genre deux

$$y^2 = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_6),$$

la condition nécessaire et suffisante pour qu'elle ait une intégrale de première espèce réductible aux intégrales elliptiques, avec un indice impair, se décomposera, à cause du rôle géométrique particulier que jouent trois des points α_i , en autant d'équations distinctes qu'il y a de combinaisons trois à trois des six quantités α_i ; toutefois, en vertu de la Remarque du n° 21 généralisée, à deux combinaisons telles que $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ et $\alpha_4\alpha_5\alpha_6$ correspondra une seule et même équation. Ainsi la condition nécessaire et suffisante cherchée se décompose en dix équations différentes, rationnelles par rapport aux quantités α_i , et chacune de ces équations se décompose en seize autres si l'on fait les changements de variables indiqués au n° précédent.

26. Le calcul permet aisément de vérifier et de compléter les résultats auxquels nous a conduit la géométrie. Soit en effet la courbe :

$$y^2 = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_6);$$

nous supposons qu'une involution d'ordre n , définie par l'équation

$$f(x) - \theta\phi(x) = 0, \quad (19)$$

où $f(x)$ et $\phi(x)$ sont des polynômes d'ordre (impair) n et où θ est un paramètre variable, possède les quatre groupes remarquables indiqués au n° 23; soient $\theta_0, \theta_4, \theta_5, \theta_6$ les valeurs du paramètre qui correspondent à ces groupes, on a identiquement, par hypothèse :

$$\left. \begin{aligned} f(x) - \theta_0\phi(x) &= (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)\psi_0^2(x), \\ f(x) - \theta_4\phi(x) &= (x - \alpha_4)\psi_4^2(x), \\ f(x) - \theta_5\phi(x) &= (x - \alpha_5)\psi_5^2(x), \\ f(x) - \theta_6\phi(x) &= (x - \alpha_6)\psi_6^2(x), \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

ψ_0, \dots, ψ_6 étant des polynômes entiers en x , dont le premier est d'ordre $\frac{n-3}{2}$ et les trois autres d'ordre $\frac{n-1}{2}$.

Les points doubles de l'involution (19) sont donnés par les racines de l'équation, d'ordre $2n - 2$:

$$f'(x)\phi(x) - f(x)\phi'(x) = 0. \quad (21)$$

Les racines des équations $\psi_0 = 0$, $\psi_4 = 0$, $\psi_5 = 0$, $\psi_6 = 0$ sont évidemment des points doubles de l'involution; leur nombre total étant $\frac{n-3}{2} + 3 \frac{n-1}{2}$, c. à d. $2n-3$; l'équation (21), en dehors de ces racines, n'aura qu'une seule racine nouvelle, ω , et il viendra identiquement:

$$f'(x) \phi(x) - f(x) \phi'(x) = h \psi_0 \psi_4 \psi_5 \psi_6 (x - \omega), \quad (22)$$

h étant une constante.

Cela posé, si dans la différentielle elliptique

$$\frac{d\theta}{\sqrt{(\theta - \theta_0)(\theta - \theta_4)(\theta - \theta_5)(\theta - \theta_6)}},$$

on remplace la variable θ par la variable x , liée à θ par la relation (19), caractéristique de l'involution:

$$f(x) - \theta \phi(x) = 0,$$

il vient:

$$\frac{d\theta}{\sqrt{(\theta - \theta_0)(\theta - \theta_4)(\theta - \theta_5)(\theta - \theta_6)}} = \frac{dx (f'(x) \phi(x) - f(x) \phi'(x))}{\sqrt{[f(x) - \theta_0 \phi(x)][f(x) - \theta_4 \phi(x)] \dots [f(x) - \theta_6 \phi(x)]}}$$

et, en vertu des identités (20) et (22), le second membre devient:

$$\frac{h(x - \omega) dx}{\sqrt{(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)(x - \alpha_4)(x - \alpha_5)(x - \alpha_6)}}. \quad (23)$$

On voit donc bien que la différentielle hyperelliptique (23) est réductible à une différentielle elliptique par la substitution (19), lorsqu'on admet l'existence de l'involution définie géométriquement au n° 23.* On aurait pu d'ailleurs établir directement *par le calcul* que l'existence d'une telle involution est nécessaire pour qu'il existe une intégrale réductible.

IV.—*Surfaces de Kummer elliptiques d'indice pair.*

27. On étudie sans difficulté, comme au n° 13, la répartition des points doubles d'une surface de Kummer elliptique d'indice pair, n , sur les quatre courbes unicursales d'ordre n comprises dans la série $u = \text{const.}$, et l'on arrive au tableau suivant:

* Le degré de la substitution par rapport à x est égal à l'indice, n , comme l'a fait voir M. Picard.

18.	Arguments u, v des points doubles situés sur les courbes.			
	$0, 0$	$0, \pi i$	$\pi i, 0$	$\pi i, \pi i$
	$\frac{a}{2}, \frac{\pi i}{n}$	$\frac{a}{2} + \pi i, \frac{\pi i}{n}$	$\frac{a}{2}, \pi i + \frac{\pi i}{n}$	$\frac{a}{2} + \pi i, \pi i + \frac{\pi i}{n}$
	$\frac{\pi i}{n}, \frac{c}{2}$	$\pi i + \frac{\pi i}{n}, \frac{c}{2}$	$\frac{\pi i}{n}, \frac{c}{2} + \pi i$	$\pi i + \frac{\pi i}{n}, \frac{c}{2} + \pi i$
$+\frac{a}{2}$	$\frac{a}{2} + \frac{\pi i}{n}, \frac{c}{2} + \frac{\pi i}{n}$	$\frac{a}{2} + \pi i + \frac{\pi i}{n}, \frac{c}{2} + \frac{\pi i}{n}$	$\frac{a}{2} + \frac{\pi i}{n}, \frac{c}{2} + \pi i + \frac{\pi i}{n}$	$\frac{a}{2} + \pi i + \frac{\pi i}{n}, \frac{c}{2} + \pi i + \frac{\pi i}{n}$

Pour les courbes unicursales du système $v = v_0$, on a un tableau analogue qu'il est inutile d'écrire, car les courbes $v = 0, v = \frac{c}{2}, v = \frac{\pi i}{n}, v = \frac{\pi i}{n} + \frac{c}{2}$ passent respectivement par les quatre mêmes points doubles que les courbes $u = 0, u = \frac{\pi i}{n}, u = \frac{a}{2}, u = \frac{\pi i}{n} + \frac{a}{2}$.

De ces remarques résultent les conséquences suivantes.

I.—Sur une surface de Kummer elliptique d'indice pair, n , chacune des quatre courbes unicursales d'ordre n du système $u = u_0$ passe par quatre points doubles, qui sont également situés sur une des quatre courbes unicursales d'ordre n du système $v = v_0$. Ces quatre points doubles sont les sommets d'un tétraèdre de Göpel, c. à d. d'un tétraèdre dont aucune des faces n'est un plan singulier de la surface.

Une courbe unicursale du système $u = u_0$ et la courbe unicursale du système $v = v_0$ qui passe par les quatre mêmes points doubles seront dites associées.

II.—Les seize points doubles de la surface de Kummer se répartissent ainsi, par rapport aux quatre courbes unicursales d'un système, en quatre tétraèdres de Göpel qui n'ont deux à deux aucun sommet commun.

III.—Les six points doubles de la surface situés dans un quelconque des seize plans singuliers se partagent en trois couples, les deux points de chaque couple étant sur une même courbe unicursale du système $u = u_0$, et la quatrième courbe unicursale du système ne passe par aucun des six points doubles considérés.

28. On établit également, comme aux n° 16 et 17 que :

Chaque courbe unicursale d'ordre n d'un système coupe la courbe associée de l'autre système en quatre points doubles et en $\frac{n^2-4}{2}$ points simples de la surface ; elle coupe les trois autres courbes unicursales du second système en $\frac{n^2}{2}$ points simples.

Deux courbes unicursales d'ordre n associées sont sur une surface d'ordre $\frac{n}{2}$, dont elles constituent toute l'intersection avec la surface de Kummer.

29. Soit, comme au n° 23, C une des coniques de la surface de Kummer et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6$ les six points doubles situés sur cette courbe. Les courbes $u = u_0$ déterminent sur la conique une involution formée par des groupes de n points en nombre simplement infini, et aux quatre courbes unicursales d'ordre n comprises dans le système $u = u_0$ correspondent quatre groupes remarquables :

1° un groupe comprenant deux des six points singuliers, α_1 et α_2 par exemple, et outre $\frac{n-2}{2}$ points comptés chacun deux fois.

2° et 3° deux groupes analogues comprenant chacun deux points singuliers, par exemple α_3 et α_4 , α_5 et α_6 .

4° un groupe composé de $\frac{n}{2}$ points comptés chacun deux fois.

L'existence, sur la conique C , d'une involution jouissant de ces propriétés établit une relation entre les positions des six points α_i . En effet, une involution, simplement infinie, d'ordre n dépend de $2n-2$ paramètres et les quatre propriétés précédentes établissent entre ces paramètres $3 \left[1 + \frac{n-2}{2} \right] + \frac{n}{2}$, c. à d. $2n-1$ équations : il est donc nécessaire que les points α soient liés par une relation.

On est ainsi conduit à une méthode de calcul exprimant la condition nécessaire et suffisante pour que la courbe

$$y^2 = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_6),$$

ait une intégrale de première espèce réductible aux intégrales elliptiques avec un indice pair.

Cette condition se décomposera en autant d'équations distinctes qu'il y a de manières de partager les six quantités $\alpha_1 \dots \alpha_6$ en trois groupes de deux, c. à d. en quinze équations.

Pour former l'équation qui correspond à un groupement donné, par exemple α_1 et α_2 , α_3 et α_4 , α_5 et α_6 , on écrira, en désignant par P , Q , R des polynômes en x , d'ordre $\frac{n}{2} - 1$, où le coefficient de la plus haute puissance de x est l'unité :

1° qu'il existe une relation linéaire et homogène entre les trois polynômes d'ordre n :

$$\begin{aligned} (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) P^2, \\ (x - \alpha_3)(x - \alpha_4) Q^2, \\ (x - \alpha_5)(x - \alpha_6) R^2, \end{aligned}$$

ce qui donne, entre les coefficients de P , Q , R et les α , $n - 1$ relations ;

2° qu'une combinaison linéaire des deux premiers polynômes d'ordre n est un carré parfait, ce qui donne $\frac{n}{2} - 1$ relations.

On a en tout $\frac{3n}{2} - 2$ relations, entre lesquelles on éliminera les $3\left(\frac{n}{2} - 1\right)$ coefficients de P , Q , R pour avoir l'équation cherchée entre les α .

La méthode de calcul du n° 26 permettrait de vérifier ces résultats et donnerait l'intégrale réductible ; le degré de la substitution qui permet de réduire cette intégrale serait encore égal à n . Nous n'insistons pas sur tous ces points pour éviter des répétitions.*

30. Le cas particulier où n est égal à 2 correspond au *tétraédroïde* de M. Cayley. En ce cas en effet, d'après les résultats du n° 27, il y a, sur la surface huit coniques, situées deux à deux dans quatre plans : dans chacun de ces plans les points communs à deux coniques sont des points doubles de la surface. Ces propriétés caractérisent le tétraédroïde.

Pour qu'une surface de Kummer soit un tétraédroïde, il faut, en vertu des raisonnements du n° 29, que les six points singuliers α_i , situés sur une des coniques ordinaires de la surface, soient liés à une involution formée de groupes de deux points de la conique de telle façon : 1° que trois groupes de l'involution

* On verrait comme au n° 26 que la substitution qui permet de réduire l'intégrale est identique à la relation qui définit l'involution sur la conique \mathcal{C} .

soient formés respectivement par deux des points α_i ; 2° qu'un des groupes de l'involution soit formé par un point compté deux fois. Cette dernière condition est remplie d'elle-même, puisqu'une involution de groupes de deux points a toujours deux points doubles. Donc enfin la condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface de Kummer soit un tétraédroïde est que les six points doubles de la surface, situées sur une des seize coniques, forment trois couples en involution, ou encore soient les sommets d'un hexagone de Brianchon. C'est la condition trouvée par M. Klein (*Math. Annalen*, tome II).

31. Les conditions générales du n° 29 appliquées au cas particulier de $n = 4$ conduisent aisément à la proposition suivante.

Soit C une conique; dans son plan on considère un système quelconque de coniques bitangentes entre elles en deux mêmes points; parmi ces coniques quatre touchent la conique C en des points q_1, q_2, q_3, q_4 et la coupent en outre chacune en deux autres points, p_1 et p'_1, \dots, p_4 et p'_4 . Si on choisit arbitrairement trois des quatre couples p_i et p'_i on obtient, sur la conique C , six points qui forment la configuration la plus générale des six points doubles d'une surface de Kummer elliptique d'indice quatre, situés sur une même conique de cette surface.

Analytiquement, si l'on désigne par p_i et q_i les arguments rationnels des points p_i et q_i sur la conique C , on peut dire que l'intégrale

$$\int \frac{(x - q_1) dx}{\sqrt{(x - p_2)(x - p'_2)(x - p_3)(x - p'_3)(x - p_4)(x - p'_4)}}$$

est réductible aux intégrales elliptiques, par une transformation d'ordre quatre, ainsi que les intégrales qu'on obtient en permutant dans l'intégrale précédente les indices 1, 2, 3 et 4.

V.—*Propriétés de la surface de Kummer elliptique d'indice trois.*

32. Nous réunirons ici, relativement à la surface de Kummer d'indice trois, quelques propositions qui sont des répétitions ou des conséquences des théorèmes démontrés plus haut.

Une surface de Kummer est une surface elliptique d'indice trois lorsque les six points doubles situés sur une de ses seize coniques peuvent se répartir en deux groupes de trois points, de telle sorte qu'il existe une conique inscrite au

sont $2\pi i$ et na pour u ; $2\pi i$ et nc pour v , et les fonctions f et g satisfont à des relations de la forme :

$$\begin{aligned} f_i(u + 2\pi i) &= f_i(u), & g_i(v + 2\pi i) &= g_i(v), \\ f_i(u + na) &= f_i(u) e^{-\lambda u + \gamma}, & g_i(v + nc) &= g_i(v) e^{-\mu v + \gamma'}, \end{aligned}$$

h et k désignent des entiers positifs, γ et δ des constantes quelconques.

La courbe $\phi(u, v) = 0$ est, comme on l'a dit, une courbe algébrique de la surface de Kummer (5); sur cette surface, le point u, v est d'ailleurs le même que le point $u + a, v + \frac{2\pi i}{n}$, ou que le point $u + \frac{2\pi i}{n}, v + c$, en vertu des équations (5): il en résulte que la courbe $\phi\left(u + a, v + \frac{2\pi i}{n}\right) = 0$ est la même que la courbe $\phi(u, v) = 0$, et que la courbe $\phi\left(u + \frac{2\pi i}{n}, v + c\right) = 0$. En d'autres termes, si la condition $\phi(u, v) = 0$ n'entraîne pas les conditions $\phi\left(u + a, v + \frac{2\pi i}{n}\right) = 0$, $\phi\left(u + \frac{2\pi i}{n}, v + c\right) = 0$, l'équation de la courbe correspondante sur la surface de Kummer sera en réalité :

$$\begin{aligned} &\phi(u, v) \phi\left(u + a, v + \frac{2\pi i}{n}\right) \phi\left(u + 2a, v + 2\frac{2\pi i}{n}\right) \dots \phi\left(u + (n-1)a, v + (n-1)\frac{2\pi i}{n}\right) \\ &\quad \times \phi\left(u + \frac{2\pi i}{n}, v + c\right) \phi\left(u + 2\frac{2\pi i}{n}, v + 2c\right) \dots \phi\left(u + (n-1)\frac{2\pi i}{n}, v + (n-1)c\right) = 0. \end{aligned}$$

Si la condition $\phi(u, v) = 0$ entraînait $\phi\left(u + \rho a, v + \rho \cdot \frac{2\pi i}{n}\right) = 0$, on ne garderait dans la première ligne que les facteurs ϕ jusqu'à

$$\phi\left(u + (\rho - 1)a, v + (\rho - 1)\frac{2\pi i}{n}\right),$$

et une circonstance analogue peut se présenter pour la seconde ligne.

Ainsi, l'équation d'une courbe algébrique tracée sur la surface de Kummer considérée s'obtiendra en annulant une fonction $\Phi(u, v)$, de la même forme que $\phi(u, v)$, c. à d. une fonction θ elliptique, aux périodes $2\pi i$ et na de la variable u et aux périodes $2\pi i$ et nc de la variable v , et se reproduisant à un facteur près lorsqu'on change u, v en $u + a, v + \frac{2\pi i}{n}$ ou en $u + \frac{2\pi i}{n}, v + c$. Les facteurs qui interviennent dans ces relations sont nécessairement, comme on

le voit sans difficulté, des exponentielles de la form $e^{\lambda u + \mu v + \nu}$, λ et μ étant des constantes.

On a donc :

$$\begin{aligned} \Phi(u + 2\pi i, v) &= \Phi(u, v + 2\pi i) = \Phi(u, v), \\ (a) \quad \Phi\left(u + a, v + \frac{2\pi i}{n}\right) &= \Phi(u, v) e^{\lambda u + \mu v + \nu}, \\ (c) \quad \Phi\left(u + \frac{2\pi i}{n}, v + c\right) &= \Phi(u, v) e^{\lambda' u + \mu' v + \nu'}, \\ \Phi(u + na, v) &= \Phi(u, v) e^{-h u + \gamma}, \\ \Phi(u, v + nc) &= \Phi(u, v) e^{-h' v + \gamma'}. \end{aligned}$$

De la comparaison de ces équations on déduit immédiatement :

$$\mu = 0; \lambda' = 0; n\lambda = -h; n\mu' = -h';$$

de plus $2\pi i$ étant une période de u , il est clair que λ et μ' sont entiers, et les relations précédentes montrent que ces entiers sont négatifs. Enfin si l'on opère successivement les transformations (a) et (c), on obtient l'équation de condition :

$$2\pi i(\lambda - \mu') = 2n\rho\pi i, \text{ ou } \lambda - \mu' = n\rho,$$

ρ étant un entier.

35. On a donc définitivement, en remplaçant λ par $-p$:

$$\begin{aligned} \Phi(u + 2\pi i, v) &= \Phi(u, v + 2\pi i) = \Phi(u, v), \\ \Phi\left(u + a, v + \frac{2\pi i}{n}\right) &= \Phi(u, v) e^{-pu + \nu}, \\ \Phi\left(u + \frac{2\pi i}{n}, v + c\right) &= \Phi(u, v) e^{-(p + n\rho)v + \nu'}, \end{aligned}$$

p étant un entier positif, et ρ un entier, positif ou négatif, tel cependant que $p + n\rho$ soit positif.

Supposons d'abord ρ positif; considérons une fonction thêta elliptique de la variable u , $f(u)$, aux périodes $\frac{2\pi i}{n}$ et a , vérifiant les relations :

$$\begin{aligned} f\left(u + \frac{2\pi i}{n}\right) &= f(u), \\ f(u + a) &= f(u) e^{-n\rho v + \delta}, \end{aligned}$$

où δ est une constante arbitraire: une telle fonction existe toujours. Il résulte de ces relations et des précédentes que la fonction $\Phi(u, v)f(u)$ est une fonction thêta hyperelliptique des deux variables u, v , et d'ordre $p + n\rho$ (n° 33).

Si ρ était négatif, on formerait de même une fonction θ elliptique de v , $g(v)$, telle que le produit $\Phi(u, v) g(v)$ fût une fonction θ hyperelliptique de u, v et d'ordre p .

Or sur la surface de Kummer, la courbe $f(u) = 0$ se décompose en un certain nombre de courbes $u = \text{const.}$; de même la courbe $g(v) = 0$ se décompose en courbes de la série $v = \text{const.}$; donc:

Toute courbe spéciale tracée sur une surface de Kummer elliptique devient une courbe ordinaire si on lui adjoint un certain nombre de courbes d'une des séries $u = \text{const.}$ ou $v = \text{const.}$

Nous avons établi dans notre Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques que la surface d'ordre minimum qui passe par une courbe tracée sur une surface de Kummer générale coupe en outre celle-ci suivant 0, 1, 2, 3 ou 4 coniques; il en résulte aisément que:

La surface d'ordre minimum qui passe par une courbe spéciale tracée sur une surface de Kummer elliptique coupe en outre celle-ci suivant 0, 1, 2, 3 ou 4 coniques et suivant une ou plusieurs courbes appartenant toutes soit à la série $u = \text{const.}$, soit à la série $v = \text{const.}$

Ce théorème est tout à fait analogue à cette proposition d'Halphen sur les quadriques:

La surface d'ordre minimum qui passe par une courbe tracée sur une quadrique ne coupe en outre cette surface que suivant des génératrices d'un même système.

On the Deformation of Thin Elastic Plates and Shells.

BY A. B. BASSET, M. A., F. R. S.

TABLE OF CONTENTS.

INTRODUCTION,	Section 1
The ten sectional stresses,	“ 2
Method employed by the older writers,	“ 3
Periods of the extensional vibrations of plane plates and cylindrical shells,	“ 4
The fundamental hypothesis,	“ 5
The method of expansion,	“ 6
Theory of plane plates. The equations of motion,	“ 7
Calculation of the flexural and torsional couples,	“ 8
Flexural vibrations of a plane plate,	“ 9
Kirchhoff's boundary conditions at a free edge,	“ 10
Extensional vibrations of a plane plate,	“ 11
Advantages of the foregoing theory,	“ 12
Energy of a plane plate,	“ 13
Cylindrical shells,	“ 14
Calculation of the flexural and torsional couples,	Sections 15 and 16
Inextensible deformations. Values of the four couples in this case,	Section 17
Vibrations of a shell which is bent about a generating line,	Sections 18 and 19
Impossibility of satisfying the conditions at a free edge, when the extension is neglected,	Section 20
Explanation of this difficulty. The extension is confined to points in the neighborhood of a free edge,	Sections 21 and 22
Expression for the potential energy due to bending. The vibrations consist of two distinct types,	Section 23
Kirchhoff's boundary conditions,	“ 24
Extensional vibrations,	“ 25
Reply to a criticism by Mr. Love,	“ 26
Spherical shells. The expressions for the four couples,	“ 27
Potential energy when the middle surface undergoes no extension,	“ 28

Flexural vibrations,	Section 29
Extensional vibrations,	" 30
Collapse of a boiler flue,	" 31
Finite bending of thin shells,	" 32
Values of the two flexural couples. The method is of limited application,	" 33
An example of the method,	" 34

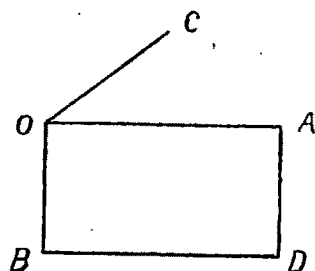
1. The mathematical theory of the deformation of a thin elastic plate or shell involves difficulties of a formidable nature. This is partly owing to the fact that an approximate solution, which is correct as far as terms involving the cube of the thickness of the plate or shell, cannot be obtained without having recourse to an extremely lengthy and troublesome process which requires the Calculus of Variations, and partly because the older writers upon this subject based their investigations upon hypotheses which were in most cases inadequate and erroneous. When a mathematician of standing and reputation gravely propounds a hypothesis which turns out to be incorrect, or condemns as unsound some method which is perfectly legitimate, and in addition obtains by means of his erroneous hypothesis many results which are substantially correct, the mischief done to science can hardly be exaggerated; for subsequent investigators not only are led astray from the path which must be followed in order to obtain a satisfactory theory, but are hampered by the difficulty of convincing mankind of the errors of their predecessors.

The development of the theory of thin elastic plates and shells has been retarded by two errors for which Clebsch and Saint-Venant are mainly responsible. The first error is that the three stresses R , S , T are accurately zero throughout the substance of the plate or shell; the second error is that it is not permissible to expand the various quantities involved, in a series of ascending powers of the distance of a point from the middle surface. In England the first error may, I think, now be regarded as exploded; but the second one has not yet been completely driven from the field, for a perusal of Mr. Love's recent *Treatise on Elasticity* shows that he entertains some bias against the method of expansion, though on what grounds I am at a loss to conceive.

Owing to the unsatisfactory manner in which Mr. Love has dealt with the theories of thin plates, shells and wires in his book, I propose in the present paper to give as concise an account of the first two theories as the nature

of the case will admit. I shall commence by expounding the fundamental principles of these theories; I shall then proceed to develop them in a form suitable for mathematical calculation; I shall endeavor to avoid all unnecessary mathematical complications; and I shall omit or pass over very lightly those parts which are not of much physical interest, or which require lengthy and difficult analysis for their elucidation.

2. We shall first consider the resultant stresses which act upon any element of a thin shell.



Let $OADB$ be a small curvilinear rectangle described on the middle surface of a thin shell, the sides of which are lines of curvature; and let us consider a small element of the shell bounded by the external surfaces, and the four planes passing through the sides of this rectangle which are perpendicular to the middle surface.

The resultant stresses per unit of length which act upon the element, and which are due to the action of contiguous portions of the shell, are completely specified by the following ten quantities, viz. across the section AD :

T_1 = a tension across AD parallel to OA ,

M_2 = a tangential shearing stress along AD ,

N_2 = a normal shearing stress parallel to OC ,

G_2 = a flexural couple from C to A whose axis is parallel to AD ,

H_1 = a torsional couple from B to C whose axis is parallel to OA .

Similarly the resultant stresses per unit of length which act across the section BD are:

T_2 = a tension across BD parallel to OB ,

M_1 = a tangential shearing stress along BD ,

N_1 = a normal shearing stress parallel to OC ,

G_1 = a flexural couple from B to C whose axis is parallel to BD ,

H_2 = a torsional couple from C to A whose axis is parallel to OB .

By resolving all the forces and stresses which act upon the element parallel to OA , OB and OC , and by taking moments about these lines, we obtain the six equations of motion of the element; but these equations will not enable us to solve any statical or dynamical problems, since they furnish only six equations connecting ten unknown quantities. In order to complete the solution we require the values of the stresses and the equations of motion in terms of the displacements of a point on the middle surface and their space variations in terms of the coordinates of that point.

The internal stresses at any point of the substance of the shell are completely specified by the six quantities P , Q , R , S , T , U ; and at this stage of the investigation it will be well to state that the notation of Thomson and Tait's *Natural Philosophy* will be employed for internal stresses and elastic constants, but that the three extensional strains parallel to OA , OB , OC will be denoted by σ_1 , σ_2 , σ_3 , and the three shearing strains about these lines by $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$, $\bar{\omega}_3$.

3. In most cases of practical importance (although there are a few exceptions), the surfaces of the shell are free from stress, and when this is the case, the three stresses R , S and T must vanish at both surfaces. Now Clebsch and several of the older writers fell into the mistake of supposing that these stresses are *zero throughout the substance of the shell*, and by the aid of this erroneous hypothesis theories were constructed which nevertheless furnished numerous results which were substantially correct. The reason of this was as follows: The theory of thin plates and shells is an approximate one, in which the thickness is supposed to be a small quantity in comparison with the least radius of curvature of the middle surface, and it is sufficient to carry the approximation no farther than powers involving the cube of the thickness. If $2h$ is the thickness and h' the distance of any point of the shell from the middle surface, it will appear as we proceed that if the lowest terms in R , S , T were quadratic functions of h and h' , the retention of these stresses would give rise to terms of a higher order than h^3 , and consequently an approximate solution could be obtained to that order by *treating* R , S , T as zero. The first question therefore is, have we any evidence which would justify us in concluding that this supposition is true?

4. The periods of the vibrations of a plane plate of infinite extent have been worked out by Lord Rayleigh* by means of the general equations of an

* Proc. Lond. Math. Soc., Vol. XX, p. 225.

elastic solid. The vibrations consist of two distinct types, viz. flexural vibrations unaccompanied by extension of the middle surface in which the displacement is perpendicular to that surface, and extensional vibrations in which the displacements are parallel to the middle surface. If Lord Rayleigh's expressions for these two kinds of vibrations be expanded in powers of the thickness, it will be found that if $2\pi/p_1$, $2\pi/p_2$ be the periods,

$$p_1^2 = \frac{4mnk^3f^4}{3\rho(m+n)} + \dots \text{higher powers of } h^2, \quad (1)$$

where n is the rigidity, $m = k + \frac{1}{2}n$, where k is the resistance to compression, ρ the density and $2\pi/f$ the wave-length of the disturbance. The value of p_2 is

$$p_2^2 = \frac{4mnf^2}{\rho(m+n)} \left\{ 1 - \frac{(m-n)^2f^2h^2}{3(m+n)^2} + \dots \right\} \quad (2)$$

Now if we attempt to obtain the same results by assuming that the three stresses R , S , T are quadratic functions of h and h' , it will be found that these quantities give rise to terms in the expression for the energy which are of a higher order than h^3 and may therefore be neglected, and we shall finally obtain the same expressions for p_1 and p_2 as are given above.*

It can also be proved by means of Lord Rayleigh's paper, that in these two particular cases R , S and T are quadratic functions of h and h' .

In order to test the truth of the hypothesis in the case of a curved shell, I worked† out the period of the radial vibrations of a complete cylindrical shell to a second approximation, so as to obtain the term in h^3 , by means of the general equations of elasticity and also by means of the theory of thin plates, and I found that the results obtained by these two methods agreed. The value of p in this case is

$$p^2 = \frac{4mn}{\rho a^3(m+n)} \left\{ 1 + \frac{h^2}{3a^2} \left[1 + \frac{4(m-n)}{m+n} \right] \right\} \quad (3)$$

where a is the radius of the middle surface.

We notice in passing that in the case of a cylindrical shell the pitch of the purely extensional vibrations rises as the thickness increases, whereas the contrary is the case when the surface is an infinite plane plate. Also the frequency of the flexural vibrations of a plane plate is proportional to the thickness, whereas the frequency of the extensional vibrations contains a term independent

* See Proc. Lond. Math. Soc., Vol. XXI, p. 51.

† *Ibid.* p. 58.

of the thickness; the notes yielded by extensional vibrations are therefore of much higher pitch than those yielded by non-extensional ones.

5. In consequence of the direct evidence furnished by the above-mentioned results, I felt justified, in 1889, in laying down the following fundamental hypothesis as the basis of the true theory of thin plates and shells, viz.:

When the surfaces of a thin plate or shell are not subjected to any surface forces, such as external pressures or tangential stresses, the three stresses R , S , T , so far as they depend upon h and h' , are of the form

$$u_2 + u_3 + \dots u_n + \dots,$$

where u_n is a homogeneous n^{th} function of h and h' .

On applying this hypothesis to obtain a theory of plane plates and cylindrical and spherical shells,* I found that expressions for the kinetic and potential energies could be obtained which are correct as far as h^3 , and that in deducing these expressions a knowledge of R , S and T was not required, but that they might be treated as zero, inasmuch as they would, if retained, give rise to terms involving powers of h higher than h^3 . I was also able to test the correctness of the fundamental hypothesis and also of the work in the following manner:—

As soon as the correct expressions for the potential and kinetic energies have been obtained in terms of the displacements, the equations of motion and the values of the ten sectional stresses can be deduced in terms of these quantities by means of the Principle of Virtual Work.

Now we have already pointed out that the six equations of motion can be written down in terms of the ten sectional stresses, and if we substitute in these equations the values of these stresses in terms of the displacements which we have obtained by means of the Principle of Virtual Work, three of them ought to be identically satisfied, whilst the remaining three ought to be identical with the three equations of motion which we have obtained by means of that principle. This is the first test, and it is satisfied. The second test is that all the sectional stresses except T_1 and T_2 can be calculated by a direct method, and the values so obtained ought to agree with those furnished by the Principle of Virtual Work. This test is also satisfied.

6. Let P' be any point of the shell, P its projection on the middle surface; then all the quantities with which we are concerned are functions of the position

* Phil. Trans., 1890, p. 433.

of P' , and are therefore functions of (r, z, ϕ) or (r, θ, ϕ) according as the shell is cylindrical or spherical. If, therefore, \mathbb{Q}' be the value of any such quantity at P' , and \mathbb{Q} its value at P , it follows that

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}' &= F(r) = F(a + h') \\ &= \mathbb{Q} + h' \left(\frac{d\mathbb{Q}}{dr} \right) + \frac{1}{2} h'^2 \left(\frac{d^2\mathbb{Q}}{dr^2} \right) + \dots\end{aligned}$$

by Taylor's theorem, where the brackets are employed, as will be done throughout this paper, to denote the values of the differential coefficients at the middle surface.

I have already alluded to the fact that objections have been raised by Saint-Venant, and endorsed by Mr. Love,* against the method of expansion. These objections appear to me to be so utterly without foundation that it would be scarcely worth while to labor the point were it not that Mr. Love, throughout his recent treatise, has shown a persistent disinclination to employ this method, although he does not venture to repeat his former arguments. In consequence of this he has been compelled to resort to lengthy and unnecessarily complicated methods which I fear will greatly retard the further development of the subject. It has been known for many years past that when a function and its differential coefficients are finite and continuous between given limits of the variable, the function can always be expanded between these limits by Taylor's theorem, and that we can stop at any term of the series that we please and express the remainder in a finite form. Now although it is quite true that functions may be imagined which, by reason of their becoming infinite or discontinuous between the limits, would render the application of Taylor's theorem inadmissible, yet the occurrence of such functions is precluded by physical considerations, because they would involve a rupture of the material. We all know that bells sometimes crack and wires break; but such catastrophes are not contemplated, and would require a special theory to account for them. The sooner these objections are consigned to oblivion the better it will be for the theory of Elasticity.

We are now in a position to consider the mathematical part of the theory.

Theory of Plane Plates.

7. We shall commence by obtaining the equations of motion in terms of the sectional stresses.

* Phil. Trans., 1888, p. 491.

Let u', v', w' be the displacements parallel to OA, OB, OC of any point P' of the plate; X, Y, Z the components of the bodily forces per unit of mass. Then taking moments about OC , it follows at once that $M_1 = M_2$; also resolving parallel to OA, OB, OC and taking moments about OA, OB , we obtain the following five equations, viz.:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dT_1}{dx} + \frac{dM}{dy} &= \rho \int_{-h}^h \ddot{u}' dh' - 2\rho h X, \\ \frac{dT_2}{dy} + \frac{dM}{dx} &= \rho \int_{-h}^h \ddot{v}' dh' - 2\rho h Y, \\ \frac{dN_2}{dx} + \frac{dN_1}{dy} &= \rho \int_{-h}^h \ddot{w}' dh' - 2\rho h Z, \\ \frac{dG_1}{dy} + \frac{dH_1}{dx} + N_1 &= -\rho \int_{-h}^h \ddot{v}' h' dh', \\ \frac{dG_2}{dx} + \frac{dH_2}{dy} - N_2 &= \rho \int_{-h}^h \ddot{u}' h' dh'. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

8. We shall now proceed to calculate the four couples in terms of the displacements of a point on the middle surface.

Let P be the projection of P' on the middle surface, and let the values of the different quantities at P' and P be distinguished by accented and unaccented letters. The equations determining the six strains in terms of the displacements are

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_1 &= \frac{du'}{dx}, & \sigma'_2 &= \frac{dv'}{dy}, & \sigma'_3 &= \frac{dw'}{dz}, \\ \bar{\omega}'_1 &= \frac{dv'}{dz} + \frac{dw'}{dy}, & \bar{\omega}'_2 &= \frac{dw'}{dx} + \frac{du'}{dz}, & \bar{\omega}'_3 &= \frac{du'}{dy} + \frac{dv'}{dx}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

The value of R' , when expanded in powers of h' , may be written

$$R' = A_0 + A_1 h' + \frac{1}{2} A_2 h'^2 + \dots, \quad (3)$$

where, according to the fundamental hypothesis, A_0 and A_1 do not contain any lower powers of h than h^2 and h respectively. But

$$\begin{aligned} R' &= (m+n)\sigma'_3 + (m-n)(\sigma'_1 + \sigma'_2) \\ &= (m+n)\sigma_3 + (m-n)(\sigma_1 + \sigma_2) \\ &\quad + \left\{ (m+n) \left(\frac{d\sigma_3}{dz} \right) + (m-n)(\lambda + \mu) \right\} h' + \dots, \end{aligned} \quad (4)$$

where λ and μ denote the values of $d\sigma_1/dz$ and $d\sigma_2/dz$ when $z = 0$. Accordingly, by (3) and (4),

$$\left. \begin{aligned} (m+n)\sigma_3 + (m-n)(\sigma_1 + \sigma_2) &= A_0, \\ (m+n)\left(\frac{d\sigma_3}{dz}\right) + (m-n)(\lambda + \mu) &= A_1, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

The value of G_1 is

$$G_1 = - \int_{-h}^h Q' h' dh' = - \frac{2}{3} h^3 \left(\frac{dQ}{dz} \right),$$

also

$$\left(\frac{dQ}{dz} \right) = (m+n)\mu + (m-n) \left\{ \lambda + \left(\frac{d\sigma_3}{dz} \right) \right\},$$

whence putting

$$E = \frac{m-n}{m+n}, \quad (6)$$

we obtain

$$G_1 = - \frac{2}{3} n h^3 \{ \mu + E(\lambda + \mu) + E A_1 / 2m \}. \quad (7)$$

Similarly,

$$G_2 = - \frac{2}{3} n h^3 \{ \lambda + E(\lambda + \mu) + E A_1 / 2n \}. \quad (8)$$

The value of A_1 is unknown, but according to the fundamental hypothesis A_1 does not contain any lower power of h than the first, whence the terms in A must be neglected, since the approximation is not carried farther than h^3 .

Now by (2)

$$\lambda = \frac{d\sigma_1}{dz} = \frac{d^2 u}{dz dx} = \frac{d\bar{\omega}_2}{dx} - \frac{d^2 w}{dx^2},$$

also

$$\mu = \frac{d\sigma_2}{dz} = \frac{d^2 v}{dz dy} = \frac{d\bar{\omega}_1}{dy} - \frac{d^2 w}{dy^2}.$$

Since $S' = n\bar{\omega}_1'$ and $T' = n\bar{\omega}_2'$, it follows from the fundamental hypothesis that $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$, which are the values of $\bar{\omega}_1'$, $\bar{\omega}_2'$ at the middle surface, do not contain any lower power of h than h^2 ; accordingly the terms involving these quantities may be neglected when multiplied by h^3 , whence the values of G_1 , G_2 finally become

$$\left. \begin{aligned} G_1 &= - \frac{2}{3} n h^3 \left(\frac{d^2 w}{dy^2} + E \nabla^2 w \right), \\ G_2 &= - \frac{2}{3} n h^3 \left(\frac{d^2 w}{dx^2} + E \nabla^2 w \right), \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

where ∇^2 has its usual meaning.

Again,

$$H_1 = - H_2 = - \frac{2}{3} n h^3 \left(\frac{d\bar{\omega}_3}{dz} \right)$$

and

$$\frac{d\bar{\omega}_3}{dz} = \frac{d^2u}{dydz} + \frac{d^2v}{dx dz} = \frac{d\bar{\omega}_2}{dy} + \frac{d\bar{\omega}_1}{dx} - 2 \frac{d^2w}{dxdy},$$

so that to the above order of approximation

$$H_1 = -H_2 = \frac{1}{2}nh^3 \frac{d^2w}{dxdy}. \quad (10)$$

Equations (9) and (10) completely determine the four couples.

9. If we expand u' , v' , w' in powers of h' and eliminate their differential coefficients with respect to z , the right-hand sides of the last three of (1) can be calculated by a similar process, and we shall obtain

$$\left. \begin{aligned} \frac{dN_2}{dx} + \frac{dN_1}{dy} &= 2\rho h (\ddot{w} - Z) + \frac{1}{2}\rho h^3 E \nabla^2 \ddot{w}, \\ \frac{dG_1}{dy} + \frac{dH_1}{dx} + N_1 &= \frac{1}{2}\rho h^3 \frac{d\ddot{w}}{dy}, \\ \frac{dG_2}{dx} + \frac{dH_2}{dy} - N_2 &= -\frac{1}{2}\rho h^3 \frac{d\ddot{w}}{dx}. \end{aligned} \right\} \quad (10, A)$$

Substituting the values of the couples from (9) and (10) in the last two, and the resulting values N_1 and N_2 in the first, we obtain the following equation of motion, viz.:

$$\frac{1}{2}nh^3(1+E)\nabla^4 w + 2\rho(\ddot{w} - Z) + \frac{1}{2}\rho h^2(E-2)\nabla^2 \ddot{w} = 0. \quad (11)$$

If $Z=0$ the last term must be omitted, since it gives rise to a term h^4 in the period, and (11) becomes

$$\frac{4mnh^3}{3(m+n)}\nabla^4 w + \rho\ddot{w} = 0. \quad (12)$$

The motion represented by this equation consists of a displacement which is perpendicular to the middle surface; moreover, the motion does not involve any extension or contraction of this surface, for the extensional strains are given by the first, second and sixth of (2), and when u and v are zero these strains are also zero. Vibrations of this kind are sometimes called *lateral vibrations* on the ground that the displacement is perpendicular to the middle surface, and sometimes *flexural vibrations*, because they involve flexion or bending of this surface unaccompanied by extension. The periods of these vibrations are much longer than those which depend upon extension alone, and they constitute the most

important class of vibrations which a plane plate is capable of executing. They are fully discussed in Vol. I, Chap. X, of Lord Rayleigh's *Theory of Sound*.

10. We must now consider the boundary conditions which hold good at a free edge.

It is obvious that the flexural couple about a free edge must vanish; hence if the free edge is parallel to the axis of y , $G_2 = 0$, and therefore by the second of (9),

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + E \nabla^2 w = 0.$$

It might also be thought that the torsional couple H and the normal shearing stress N must also vanish, in which case we should have three boundary conditions. This was Poisson's view, but Kirchhoff showed that only one additional equation was necessary, and it is now well known that Poisson's boundary conditions are erroneous.

The reduction of Poisson's boundary conditions depends upon the curious theorem that it is possible to apply a system of stresses to the edge of the plate without doing any work. By Stokes' theorem

$$\int \left(\frac{dH'}{dx} \delta w + H' \frac{d\delta w}{dx} \right) dx + \int \left(\frac{dH'}{dy} \delta w + H' \frac{d\delta w}{dy} \right) dy = 0,$$

the integration extending round the rectangle $OADB$.

If we apply to the side AD the stresses

$$N_2 = \frac{dH'}{dy}, \quad H_1 = H',$$

to the side DB the stresses

$$N_1 = \frac{dH'}{dx}, \quad H_2 = -H',$$

and to the sides BO , OA corresponding and opposite stresses, the preceding integral becomes

$$\int \left(N_1' \delta w - H_2' \frac{d\delta w}{dx} \right) dx + \int \left(N_2' \delta w + H_1' \frac{d\delta w}{dy} \right) dy = 0,$$

which shows that the work done by this system of stresses is zero. Such a system of stresses may therefore be applied or removed without interfering with the equilibrium or motion of the plate.

If, therefore, we suppose that the rectangle $OADB$, instead of being under the action of the remainder of the plate, is isolated, and that constraining stresses are applied to its edges, then it follows that if instead of the torsional couples $H_1, -H_1$ (since $H_2 = -H_1$) due to the action of contiguous portions of the plate, we apply torsional couples $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2$, where

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{H}_1 &= H_1 + H', \\ \mathfrak{H}_2 &= -H_1 - H', \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

the energy and state of strain will be unaltered, provided we apply in addition the stresses

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{N}_2 &= N_2 + \frac{dH'}{dy}, \\ \mathfrak{N}_1 &= N_1 + \frac{dH'}{dx}, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

whence eliminating H' between the first and the second of (13) and (14) respectively, we obtain

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{N}_2 - \frac{d\mathfrak{H}_1}{dy} &= N_2 - \frac{dH_1}{dy}, \\ \mathfrak{N}_1 + \frac{d\mathfrak{H}_2}{dx} &= N_1 + \frac{dH_2}{dx}, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

In these equations the Roman letters denote the values of the stresses due to contiguous portions of the plate, whilst the Old English letters denote the actual stresses applied to the boundary; whence the conditions to be satisfied along a free edge parallel to the axis of y are

$$N_2 - \frac{dH_1}{dy} = 0, \quad (16)$$

and along one parallel to the axis of x ,

$$N_1 - \frac{dH_1}{dx} = 0. \quad (17)$$

Since the frequency of the flexural vibrations depends upon the thickness, the terms on the right-hand sides of the last two of (10, A) may be omitted in the values of N_1, N_2 furnished by these equations, and (16) becomes

$$\frac{d}{dx} \left\{ \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{3m-n}{2m} \frac{d^2 w}{dy^2} \right\} = 0.$$

When the plate is bounded by any plane curve, the two boundary conditions may be obtained in a similar manner. The work is given on pp. 42 and 43 of my paper on plane plates (Proc. Lond. Math. Soc., Vol. XXI), and will be found to furnish the same results as those given by Lord Rayleigh (Theory of Sound, Vol. I, p. 297).

The preceding analysis gives the complete theory of the flexural vibrations of a plane plate.

Extensional Vibrations.

11. We must now consider the extensional vibrations of the plate. The value of T_1 is

$$T_1 = \int_{-h}^h \left\{ P + h' \left(\frac{dP}{dz} \right) + \frac{1}{2} h'^2 \left(\frac{d^2 P}{dz^2} \right) \right\} dh' = 2hP + \frac{1}{3} h^3 \left(\frac{d^3 P}{dz^3} \right). \quad (20)$$

Now
$$P = (m + n) \sigma_1 + (m - n)(\sigma_2 + \sigma_3).$$

Substituting the value of σ_3 from the first of (5) we obtain

$$P = 2n\{\sigma_1 + E(\sigma_1 + \sigma_2)\} + EA_0. \quad (21)$$

We therefore see that T_1 contains the term $2EA_0 h$, and since by the fundamental hypothesis A_0 is (or may be) proportional to h^3 , the value of T_1 cannot be obtained by *direct integration* unless the value of A_0 is known.

The value of T_1 can, however, be obtained by an indirect method. I have shown in my paper on Plane Plates* that the various constituents of the equation which expresses the Principle of Virtual Work can be completely calculated as far as the terms proportional to h^3 without knowing the values of the quantities A_0 , A_1 , A_2 or the values of $\bar{\omega}_1$ and $\bar{\omega}_2$; and by working out this equation by the ordinary methods of the Calculus of Variations the correct values of T_1 , T_2 and also M can be obtained as far as the term involving h^3 . The problem is therefore capable of being completely solved to the order of approximation adopted, but for the details of the analysis the reader is referred to my paper. In the present article I shall only consider those portions of the extensional terms which are proportional to the *first* power of the thickness.

$$\text{Let} \quad \mathfrak{A} = \sigma_1 + E(\sigma_1 + \sigma_2), \quad \mathfrak{B} = \sigma_2 + E(\sigma_1 + \sigma_2), \quad (22)$$

where σ_1 , σ_2 denote the values of the extensions of a point *on* the middle surface;

* Proc. Lond. Math. Soc., Vol. XXI, p. 83.

also let $\bar{\omega}$ denote the value of $\bar{\omega}'_z$ at the middle surface. Then from (20), (21) and (22) it follows that the value of the term in T_1 which is proportional to h is $4nh\mathfrak{A}$; and by a similar process we can find the values of T_2 and M to a first approximation. We thus obtain

$$T_1 = 4nh\mathfrak{A}, \quad T_2 = 4nh\mathfrak{B}, \quad M = 2nh\bar{\omega},$$

where \mathfrak{A} and \mathfrak{B} are given by (22) and

$$\sigma_1 = \frac{du}{dx}, \quad \sigma_2 = \frac{dv}{dy}, \quad \bar{\omega} = \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy}. \quad (23)$$

Accordingly the first two of (1) become

$$\left. \begin{aligned} \rho(\ddot{u} - X) &= 2n \left(\frac{d\mathfrak{A}}{dx} + \frac{1}{2} \frac{d\bar{\omega}}{dy} \right), \\ \rho(\ddot{v} - Y) &= 2n \left(\frac{d\mathfrak{B}}{dy} + \frac{1}{2} \frac{d\bar{\omega}}{dx} \right). \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

The boundary conditions at a free edge are that T_1 , T_2 and M should vanish there.

The motion which is represented by these equations consists of a displacement parallel to the middle surface, but there is no displacement perpendicular to this surface. It also follows from (23) that the motion involves extension of the middle surface, but it does not involve flexion, for the terms upon which flexion depends are zero, when w , the normal displacement, is zero.

From the preceding analysis it follows that the vibrations which a plane plate is capable of executing consist of two independent types, viz. flexural vibrations unaccompanied by extension, and extensional ones unaccompanied by flexion.

12. The reader who compares §§7 to 11 with Chapters XIX and XX of Mr. Love's treatise cannot, I think, fail to be struck with the simplicity and elegance of the above method; moreover, the complete theory of the extensional vibrations as far as the terms involving h^3 can also be obtained by employing the Calculus of Variations, which Mr. Love's method cannot apparently effect. At any rate he has not attempted any such theory in his book.

Energy of the Plate.

13. I have shown on page 46 of my paper on Plane Plates that the potential energy consists of three distinct sets of terms. The first term is a quadratic

function of the extensional strains $\sigma_1, \sigma_2, \bar{\omega}$ multiplied by the thickness. The second term is a similar function of the terms on which flexion depends, multiplied by the cube of the thickness. The third term is a quadratic function of the extensional strains and their differential coefficients, which is also multiplied by the cube of the thickness. To obtain the complete expression for the potential energy involves nearly three octavo pages of work which I do not propose to reproduce, as the reader who is curious upon the point can consult my paper, but the first two terms can be easily obtained by the preceding methods.

If W be the potential energy of the element $2hdS$, we have by the ordinary formula

$$W = \frac{1}{2} \int_{-h}^h \{ (m+n)(\sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3)^2 + n[\bar{\omega}'_1 + \bar{\omega}'_2 + \bar{\omega}'_3 - 4(\sigma'_1\sigma'_2 + \sigma'_2\sigma'_3 + \sigma'_3\sigma'_1)] \} dh'.$$

By the fundamental hypothesis the terms involving $\bar{\omega}'_1, \bar{\omega}'_2$ are proportional to h^5 and are therefore to be neglected. The term involving h , upon which the purely extensional vibrations depend, can be easily shown to be

$$2nh \{ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + E(\sigma_1 + \sigma_2)^2 + \frac{1}{2}\bar{\omega}^2 \},$$

where $\sigma_1, \sigma_2, \bar{\omega}$ are given by (23), whilst the term in h^3 which depends upon w is

$$\frac{2}{3}nh^3 \left\{ \left(\frac{d^2w}{dx^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2w}{dy^2} \right)^2 + E \left(\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d^2w}{dy^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{d^2w}{dxdy} \right)^2 \right\}.$$

Although the term in the potential energy which depends upon bending is multiplied by h^3 , whilst that which depends upon extension is multiplied by h , the former term is the most important. One reason of this is, that the gravest notes yielded by a plate depend upon flexural vibrations, whilst those depending on extension are of high pitch. Also, it is far easier to bend a thin plate than to stretch it; consequently, if any system of forces were applied to the edges of the plate, the work done by the forces would be almost entirely concentrated in a deformation involving flexion. The extensional part of the deformation would be hardly appreciable in the case of a glass or metal plate; it would only become important in the case of highly extensible substances, such as india-rubber.

*Cylindrical Shells.**

14. The deformation of a naturally curved plate, which will be called a shell, is a problem of greater difficulty, because the vibrations are not in general separable into two distinct types one of which depends upon the normal dis-

* See Phil. Trans., 1890, p. 488.

Also by a similar process it can be shown that

$$H_1 = -\frac{1}{2}nh^3\left(p + \frac{\bar{\omega}_3}{a}\right), \quad (7)$$

$$H_2 = \frac{1}{2}nh^3p. \quad (8)$$

16. The quantities σ_1 , σ_2 , $\bar{\omega}_3$ are determined by the equations

$$\sigma_1 = \frac{du}{dz}, \quad \sigma_2 = \frac{1}{a} \left(\frac{dv}{d\phi} + w \right), \quad \bar{\omega}_3 = \frac{1}{a} \frac{du}{d\phi} + \frac{dv}{dz}, \quad (10)$$

and we must now calculate the values of λ , μ , p .

From the first and fifth of (1) we obtain

$$\lambda = \left(\frac{d\sigma_1}{dr} \right) = \frac{d\bar{\omega}_3}{dz} - \frac{d^2w}{dz^2}.$$

Now by the fundamental hypothesis $\bar{\omega}_3$ is proportional to h^3 , accordingly the term $d\bar{\omega}_3/dz$ when multiplied by h^3 is proportional to h^5 and may therefore be neglected. We thus obtain

$$\lambda = -\frac{d^2w}{dz^2}. \quad (11)$$

Similarly from the second and fourth of (1) we obtain

$$\mu = -\frac{1}{a^2} \left(\frac{d^2w}{d\phi^2} + w \right) - \frac{E}{a} (\sigma_1 + \sigma_2). \quad (12)$$

Lastly,

$$p = \left(\frac{d\bar{\omega}_3}{dr} \right) = \frac{1}{a} \left(\frac{d^2u}{drd\phi} \right) + \left(\frac{d^2v}{drdz} \right) - \frac{1}{a^2} \frac{du}{d\phi}.$$

Substituting the values of (dv/dr) , (du/dr) from the fourth and fifth of (1), and recollecting that the terms in $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$ are to be neglected when multiplied by h^3 , we obtain

$$p = -\frac{2}{a} \frac{d^2w}{dzd\phi} + \frac{1}{a} \frac{dv}{dz} - \frac{1}{a^2} \frac{du}{d\phi}. \quad (13)$$

Equations (11), (12) and (13) combined with (5), (6), (7) and (8) completely determine the couples to the above order of approximation.

It is very important to notice that the complete values of the couples contain certain terms depending on the extension of the middle surface, as well as terms depending on the bending.

Inextensible Deformations.

17. In a large and important number of problems, the extension of the middle surface may be neglected. In this case $\sigma_1, \sigma_2, \bar{\omega}_3$ are zero, and the displacements are connected together by the three equations which are obtained by equating the right-hand sides of (10) to zero; accordingly, since $du/dz = 0$, we have

$$G_1 = \frac{4nh^3}{3a^3} (1 + E) \left(\frac{d^3 w}{d\phi^3} + w \right), \quad (14)$$

$$G_2 = -\frac{4nh^3}{3a^3} E \left(\frac{d^3 w}{d\phi^3} + w \right), \quad (15)$$

$$H_1 = -H_2 = \frac{4nh^3}{3a} \left(\frac{d^2 w}{dz d\phi} - \frac{dw}{dz} \right). \quad (16)$$

18. We have now obtained the materials which we require for solving the problem of the flexural vibrations of an infinitely long cylindrical shell which is bent about a generator.

The equations of motion of the cylinder are

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{a} \frac{dT}{d\phi} + \frac{N}{a} &= \nu \ddot{v}, \\ \frac{1}{a} \frac{dN}{d\phi} - \frac{T}{a} &= \nu \ddot{v}, \\ \frac{1}{a} \frac{dG}{d\phi} + N &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

where $\nu = 2h\sigma$, σ being the density. Also the condition of inextensibility is

$$\frac{dv}{d\phi} + w = 0. \quad (18)$$

Substituting the value of G from (14) in the last of (17), we obtain the value of N ; and if we substitute this value of N in the first two of (17) and then eliminate T , we shall obtain the equation

$$\frac{4mnh^3}{3pa^4(m+n)} \left(\frac{d^3}{d\phi^3} + \frac{d}{d\phi} \right)^2 v + \frac{d^2 \ddot{v}}{d\phi^2} - \ddot{v} = 0, \quad (19)$$

whence putting

$$v = A e^{pt + u\phi},$$

we obtain

$$p^3 = \frac{4mnh^3s^2(s^2-1)^2}{3\rho a^4(m+n)(s^2+1)}, \quad (20)$$

which determines the period of the vibrations.

19. Equation (20) is discussed in Lord Rayleigh's *Theory of Sound*, Vol. I, Chap. X, and also by Prof. H. Lamb (*Proc. Lond. Math. Soc.*, Vol. XIX, p. 365). When the cylinder is complete, s is any integer, unity excluded; but if the cross-section of the cylinder consists of a circular arc of length $2a\alpha$, s will not be an integer. In the latter case the values of s must be determined as follows: Along the two generators which form the free edges, T , N and G must vanish; in other words, if the middle point of the arc be taken as the origin of ϕ , these stresses must vanish when $\phi = \pm \alpha$. The complete solution of (19) involves six arbitrary constants, and the boundary conditions give six equations which will enable the six constants to be eliminated; and the resulting equation combined with (20) will enable s to be eliminated and an equation to be obtained which will determine p in terms of known quantities.

20. The preceding solution raises a curious point which excited a good deal of controversy in England about five years ago. Although the displacement parallel to the generators is expressly assumed to be zero, yet in this case there is a flexural couple G_z about each circular section whose value by virtue of (15) is

$$G_z = -\frac{4nh^3}{3a^2} E \left(\frac{d^3w}{d\phi^3} + w \right), \quad (21)$$

the extensibility being neglected.

Let us now suppose that the cylinder is of finite length $2z$; we have in this case to satisfy the boundary conditions at the two circular edges, and one of these conditions is that $G_z = 0$, because the flexural couple about a circular section must vanish at a free edge. This requires that

$$\frac{d^3w}{d\phi^3} + w = 0,$$

whence at the edge

$$w = A \cos \phi + B \sin \phi$$

for all values of ϕ .

Now it is impossible to satisfy this condition for the most general type of non-extensional vibrations, and hence the solution fails; in other words, when

the cylinder is of finite length, purely flexural vibrations unaccompanied by extension of the middle surface are impossible.

This was the controversy raised by Mr. Love in 1888; but on examining the question it appeared to me that it might be possible for some extension to take place which was confined to points in the immediate neighborhood of the free edge, and which was inappreciable at points whose distance from the free edge was large in comparison with the thickness. But in order to satisfactorily deal with the question I found it necessary to obtain the correct values of all the quantities involved as far as terms proportional to the cube of the thickness, *on the supposition that the middle surface underwent extension*. This required a long and difficult investigation by means of the Calculus of Variations, which is given at length in my paper (Phil. Trans., 1890, p. 433); but I was finally enabled to establish the correctness of my supposition by solving the following problem.

21. Let a very long, heavy cylindrical shell, whose cross-section is a semi-circle, be suspended by vertical bands attached to its straight edges, so that its axis is horizontal. It is required to investigate the state of strain produced by its own weight.

I found that if R denote the change of curvature along a circular section, so that

$$R = -\frac{1}{a^2} \left(\frac{d^2 w}{d\phi^2} + w \right),$$

w being the displacement along the radius, and σ_2 is the extension of the middle surface along the circular section, so that

$$\sigma_2 = \frac{1}{a} \left(\frac{dw}{d\phi} + w \right),$$

then

$$\frac{R}{\sigma_2} = \frac{E}{a} + \frac{3a \left(\frac{1}{2}\pi - \phi \sin \phi - \cos \phi \right)}{h^2 \left\{ \frac{1}{2}\pi - \cos \phi + \frac{3}{2}E \left(\frac{1}{2}\pi - \phi \sin \phi - \cos \phi \right) \right\}},$$

where ϕ is measured from the lowest point.

Since the numerator of this fraction is an even function of ϕ , it does not change sign with ϕ ; also the numerator is always positive between the limits $\frac{1}{2}\pi$ and $-\frac{1}{2}\pi$, and its maximum value occurs when $\phi = 0$, and is equal to

The periods of the latter class of vibrations are given by the equation

$$p^2 = \frac{4mnh^3 s^2 (s^2 - 1)^2}{3\rho a^4 (m + n)(s^2 + 1)} \cdot \frac{1 + 3a^2(m + n)/ms^2 l^2}{1 + 3a^2/s^2 (s^2 + 1) l^2},$$

where $s = 2, 3, \dots$

For the further discussion of these vibrations we must refer to Lord Rayleigh's paper; we notice that if the cylinder be at all long in proportion to its diameter, the difference between the periods of the two types of vibrations becomes small.

24. Before leaving this branch of the subject, it may be well to point out that Kirchhoff's four boundary conditions apply to the case of a cylindrical shell as well as to a plane plate.* The principles upon which the theory rests are identical in both cases, although the mathematical details are different.

Along a free edge which is a circular section, the conditions are

$$\begin{aligned} T_1 &= 0, & G_2 &= 0, \\ M_2 &= H_1/a, & N_2 &= \frac{1}{a} \frac{dH_1}{d\phi}, \end{aligned}$$

whilst along a generator the conditions are

$$\begin{aligned} T_2 &= 0, & M_1 &= 0, \\ G_1 &= 0, & N_1 + \frac{dH_2}{dz} &= 0. \end{aligned}$$

The proof depends upon the fact that the integral

$$\int \left(\frac{dH'}{d\phi} \delta w + H' \frac{d\delta w}{d\phi} \right) d\phi + \int \left(\frac{dH'}{dz} \delta w + H' \frac{d\delta w}{dz} \right) dz = 0,$$

when taken round a rectangle bounded by four lines of curvature, vanishes by Stokes' theorem.

Extensional Vibrations.

25. The potential energy contains a term proportional to the thickness multiplied by a quadratic function of the extensions. The value of this term is

$$W = 2mh \{ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + E (\sigma_1 + \sigma_2)^2 + \frac{1}{2} \bar{\omega}_3^2 \},$$

which can easily be established by the methods of the present paper.

* See p. 453 of my paper, Phil. Trans., 1880.

The values of T_1 , T_2 , M_1 and M_2 , so far as they depend on h alone and not on h^2 , are

$$T_1 = 4nh\mathfrak{A}, \quad M_1 = 2nh\bar{\omega}_8,$$

$$T_2 = 4nh\mathfrak{B}, \quad M_2 = 2nh\bar{\omega}_8,$$

where $\mathfrak{A} = \sigma_1 + E(\sigma_1 + \sigma_2)$, $\mathfrak{B} = \sigma_2 + E(\sigma_1 + \sigma_2)$.

The equations of motion are

$$\rho\ddot{u} = 2n\left(\frac{d\mathfrak{A}}{dz} + \frac{1}{2a}\frac{d\bar{\omega}_8}{d\phi}\right) + \rho X,$$

$$\rho\ddot{v} = 2n\left(\frac{1}{a}\frac{d\mathfrak{B}}{d\phi} + \frac{1}{2}\frac{d\bar{\omega}_8}{dz}\right) + \rho Y,$$

$$\rho\ddot{w} = -2n\mathfrak{B}/a + \rho Z,$$

whilst the boundary conditions at a free edge are that T_1 , T_2 , M_1 , M_2 should vanish there.

The solution of these equations when no bodily forces act has been discussed by Mr. Love,* and also by Lord Rayleigh,† to whose papers the reader is referred. The vibrations are of high pitch, and are of mathematical rather than physical interest.

26. Before passing on, it may be as well to take this opportunity of replying to a criticism which Mr. Love has made in the notes to pp. 238 and 262 of Volume II of his *Treatise on Elasticity*. He observes that the value of T_2 given by the second of my equations (44) (*Phil. Trans.*, 1890, p. 450) does not furnish the same value of T_2 as the equations given at the bottom of p. 456, and not being able to understand this, he imagines that he has detected some error in my work. The explanation is simple. In the investigation by which equations (44) were obtained, the middle surface is expressly supposed to undergo extension, whereas in the problem discussed on p. 456 no extension is supposed to take place. The two cases require totally different treatment, and are therefore not parallel; consequently Mr. Love's so-called test is nugatory. If there were any error in the value of T_2 , the equations obtained by substituting the values of the stresses given by (43) and (44) in the first three of (11) would not reproduce equations (45), (46) and (47), as they actually do.

The point where Mr. Love has gone astray is the following:

Let F be any function of u , v and their differential coefficients with respect to x and y . The condition that the integral

$$\iint \delta F dx dy$$

* *Phil. Trans.*, 1888, pp. 588, etc.

† *Proc. Roy. Soc.*, Vol. XLV, p. 448.

should vanish is obtained by integrating it by parts until it is reduced to the form

$$\iint (M\delta u + N\delta v) dx dy + \text{a line integral.}$$

Now if δu , δv are independent quantities, the surface integral gives rise to the equations

$$M = 0, \quad N = 0,$$

which must hold good at every point of the surface, and the line integral gives rise to similar equations which must hold good at the boundary. If, however, δu , δv are not independent but are connected together by some relation, as is the case when the surface undergoes no extension, the equations $M = 0$, $N = 0$, as well as those furnished by the line integral, are no longer true. When the relation is of the form

$$v = f(u, du/dx, \dots),$$

so that v is given explicitly in terms of u , we can substitute for δv in terms of δu and integrate the term $\iint N\delta v dx dy$ until it is reduced to the form

$$\iint N'\delta u dx dy + \text{a line integral,}$$

and since δu is independent, the surface integral furnishes the single equation

$$M + N' = 0,$$

and the equations furnished by the line integral terms will also be different.

Instead of adopting the above-mentioned procedure, we may, if we please, introduce an indeterminate multiplier, in which case we shall obtain the two equations

$$M + p = 0, \quad N + q = 0,$$

where M and N have their former meanings and p and q are additional terms which depend upon the indeterminate multiplier. The elimination of this quantity must necessarily lead to an equation equivalent to $M + N' = 0$.

The failure to recognize the distinction between the two cases constitutes the error of Mr. Love's criticism.

*Spherical Shells.**

27. The theory of spherical shells can be worked out in exactly the same manner. In the figure to §2, let OA be a meridian and OB a parallel of lati-

* Phil. Trans. 1890, p. 468.

tude. The six strains are given by the equations

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_1 &= \frac{1}{r} \left(\frac{du'}{d\theta} + w' \right), \\ \sigma'_2 &= \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{dv'}{d\phi} + u' \cot \theta + w' \right), \\ \sigma'_3 &= \frac{dw'}{dr}, \\ \bar{\omega}'_1 &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{dw'}{d\phi} + \frac{dv'}{dr} - \frac{v'}{r}, \\ \bar{\omega}'_2 &= \frac{dw'}{dr} - \frac{u'}{r} + \frac{1}{r} \frac{dw'}{d\theta}, \\ \bar{\omega}'_3 &= \frac{1}{r} \left(\frac{dv'}{d\theta} - v' \cot \theta + \frac{1}{\sin \theta} \frac{du'}{d\phi} \right). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

By direct integration we find

$$\begin{aligned} G_1 &= - \int_a^h Q' \left(1 + \frac{h'}{a} \right) h' dh', \\ &= - \frac{2}{3} h^3 \left\{ \left(\frac{dQ}{dr} \right) + \frac{Q}{a} \right\}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$G_2 = \frac{2}{3} h^3 \left\{ \left(\frac{dP}{dr} \right) + \frac{P}{a} \right\}, \quad (3)$$

$$H_1 = -H_2 = -\frac{2}{3} nh^3 \left\{ \left(\frac{d\bar{\omega}_3}{dr} \right) + \frac{\bar{\omega}_3}{a} \right\}. \quad (4)$$

Putting as before

$$\mathfrak{A} = \sigma_1 + E(\sigma_1 + \sigma_2), \quad \mathfrak{B} = \sigma_2 + E(\sigma_1 + \sigma_2), \quad (5)$$

$$\mathfrak{C} = \lambda + E(\lambda + \mu), \quad \mathfrak{E} = \mu + E(\lambda + \mu), \quad (6)$$

equations (2), (3) and (4) become

$$\left. \begin{aligned} G_1 &= -\frac{2}{3} nh^3 \left(\mathfrak{E} + \frac{\mathfrak{B}}{a} \right), \quad G_2 = \frac{2}{3} nh^3 \left(\mathfrak{C} + \frac{\mathfrak{A}}{a} \right), \\ H_1 &= -H_2 = -\frac{2}{3} nh^3 \left(p + \frac{\bar{\omega}_3}{a} \right), \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

where λ, μ, p denote the values of $d\sigma_1/dr, d\sigma_2/dr$ and $d\bar{\omega}_3/dr$ when $r = a$.

Recollecting that $R', \bar{\omega}'_1$ and $\bar{\omega}'_2$ are to be treated as zero by virtue of the fundamental hypothesis, we readily obtain to the required order of approximation,

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= -\frac{1}{a^2} \left(\frac{d^2 w}{d\theta^2} + w \right) - \frac{E}{a} (\sigma_1 + \sigma_2), \\ \mu &= -\frac{1}{a^2} \left(\frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{d^2 w}{d\phi^2} + \cot \theta \frac{dw}{d\theta} + w \right) - \frac{E}{a} (\sigma_1 + \sigma_2), \\ p &= \frac{2}{a^2 \sin \theta} \left(\cot \theta \frac{dw}{d\phi} - \frac{d^2 w}{d\theta d\phi} \right). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

The proof of the above formulæ may be left to the reader, and he will find no difficulty in establishing them by means of the methods explained in the earlier part of this paper.

28. We shall now calculate the potential energy in the particular case in which the middle surface undergoes no extension.

The expression for W is

$$W = \frac{1}{2} \iint \int_{-h}^h [(m+n) \Delta'^2 + n \{\bar{\omega}'^2 - 4(\sigma'_1 \sigma'_2 + \sigma'_2 \sigma'_3 + \sigma'_3 \sigma'_1)\}] (1 + h'/a)^2 dh' dS, \quad (9)$$

where Δ' is the dilatation at the point $a + h'$, θ , ϕ ; $\bar{\omega}'$ is written for $\bar{\omega}'_3$, and $\bar{\omega}'_1, \bar{\omega}'_2$ are omitted because they would give rise to terms proportional to h^5 .

Since there is no extension, $\Delta = A_0/(m+n)$, and since A_0 is proportional to h^3 , the only term in Δ' which it is necessary to retain is $h'(d\Delta/dr)$; we accordingly obtain

$$\frac{1}{2} (m+n) \int_{-h}^h \Delta'^2 (1 + h'/a)^2 dh' = \frac{4n^3 h^3}{3(m+n)} (\lambda + \mu)^2;$$

also since $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, we have

$$\begin{aligned} \sigma'_1 &= h'\lambda, \quad \sigma'_2 = h'\mu, \\ \text{so that} \quad 2n \int_{-h}^h \sigma'_1 \sigma'_2 (1 + h'/a)^2 dh' &= \frac{1}{3} nh^3 \lambda \mu. \end{aligned}$$

In the same manner

$$2n \int_{-h}^h (\sigma'_1 + \sigma'_2) \sigma'_3 (1 + h'/a)^2 dh' = -\frac{1}{3} nh^3 (\lambda + \mu)^2$$

and

$$\frac{1}{2} n \int_{-h}^h \bar{\omega}'^2 (1 + h/a)^2 dh' = \frac{1}{3} nh^3 p^2.$$

Hence if W now denote the potential energy per unit of area,

$$W = \frac{1}{3} nh^3 \{\lambda^2 + \mu^2 + E(\lambda + \mu)^2 + \frac{1}{2} p^2\}. \quad (10)$$

The values of λ , μ , p are given by (8), but the extensional terms must be put equal to zero.

The complete expression for the potential energy as far as h^3 , when the middle surface is supposed to undergo extension, is given by equation (16), p. 467 of my paper in the *Phil. Trans.*, 1890. It will be observed that this expression (as in the case of a cylindrical shell) consists of four distinct sets of terms: (i) a term proportional to h multiplied by a quadratic function of the extensions, whose value is

$$2nh \{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + E(\sigma_1 + \sigma_2)^2 + \frac{1}{2} \bar{\omega}^2\}; \quad (11)$$

(ii) a term proportional to h^3 , which is multiplied by a quadratic function of quantities upon which pure bending depends; (iii) a term proportional of h_3 multiplied by the products of extensional and flexural terms; (iv) a term proportional to h^3 multiplied by a quadratic function of extensional terms. It will not, however, be necessary to consider the last two terms.

Flexural Vibrations.

29. Let ρ_1, ρ_2 be the radii of curvature of the deformed surface along and perpendicular to a meridian; then

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{a} &= -\frac{1}{a^2} \left(\frac{d^2 w}{d\theta^2} + w \right), \\ \frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{a} &= -\frac{1}{a^2} \left(\frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{d^2 w}{d\theta^2} + \cot \theta \frac{dw}{d\theta} + w \right). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

These formulæ are probably well known in America, but if a proof is desired one will be found on p. 477 of my paper. We notice from (8) that when extension does not take place, λ and μ are proportional to the changes of curvature along and perpendicular to a meridian.

The flexural vibrations of a spherical bowl have been investigated by Lord Rayleigh.* The conditions of inextensibility are given by the first, second and sixth of (1) and are

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{d\theta} + w &= 0, \\ \frac{dv}{d\phi} + u \cos \theta + w \sin \theta &= 0, \\ \frac{du}{d\phi} - v \cos \theta + \sin \theta \frac{dv}{d\theta} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Let $\chi = \log \tan \frac{1}{2} \theta$, then since

$$\sin \theta \frac{d}{d\theta} = \frac{d}{d\chi},$$

we find upon eliminating w that

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\phi} \left(\frac{u}{\sin \theta} \right) + \frac{d}{d\chi} \left(\frac{v}{\sin \theta} \right) &= 0, \\ \frac{d}{d\phi} \left(\frac{v}{\sin \theta} \right) - \frac{d}{d\chi} \left(\frac{u}{\sin \theta} \right) &= 0, \end{aligned}$$

consequently $u \operatorname{cosec} \theta$ and $v \operatorname{cosec} \theta$ both satisfy an equation of the form

$$\frac{d^2 V}{d\phi^2} + \frac{d^2 V}{d\chi^2} = 0.$$

* Proc. Lond. Math. Soc., Vol. XIII, p. 4.

In the case of a spherical bowl, all the quantities are necessarily periodic functions of ϕ , and we may therefore suppose that ϕ enters in the form of the factor $\varepsilon^{s\phi}$ where s is an integer; whence

$$\frac{d^2 V}{d\chi^2} - s^2 V = 0,$$

giving $V = A \tan^s \frac{1}{2} \theta + B \cot^s \frac{1}{2} \theta$.

If θ is measured from the pole, we must have $B = 0$, otherwise V would become infinite when $\theta = 0$; we may therefore take

$$\left. \begin{aligned} u &= -\Sigma A_s \varepsilon^{s\phi} \sin \theta \tan^s \frac{1}{2} \theta, \\ v &= i \Sigma A_s \varepsilon^{s\phi} \sin \theta \tan^s \frac{1}{2} \theta, \\ w &= \Sigma A_s \varepsilon^{s\phi} (s + \cos \theta) \tan^s \frac{1}{2} \theta, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

where $s = 2, 3, 4, \dots$, and A_s is a complex function of the time. From these equations it can be shown by (12) that

$$\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{a} = -\Sigma \frac{A_s (s^2 - s) \varepsilon^{s\phi} \tan^s \frac{1}{2} \theta}{a \sin^3 \theta} = -\left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{a} \right), \quad (15)$$

also by the last of (8),

$$p = -2i \Sigma \frac{A_s (s^2 - s) \varepsilon^{s\phi} \tan^s \frac{1}{2} \theta}{a \sin^3 \theta}. \quad (16)$$

The value of A_s may be supposed to be real without loss of generality; accordingly, rejecting the imaginary part, we obtain from (10), (12), (15) and (16),

$$W = \frac{8\pi n h^3}{3a^3} \int_0^\alpha \operatorname{cosec}^3 \theta \Sigma A_s^2 s^2 (s-1)^2 \tan^{2s} \frac{1}{2} \theta d\theta,$$

where α is the angle of the bowl.

Lord Rayleigh has applied the above expression for W to determine the notes produced by a hemispherical bell, but he has not attempted to take into account the conditions which must be satisfied at a free edge. Now one of these conditions is that the flexural couple G_2 should vanish there, where

$$\begin{aligned} G_2 &= \frac{1}{3} n h^3 \{ \lambda + E(\lambda + \mu) \} \\ &= \frac{1}{3} n h^3 \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{a} \right). \end{aligned}$$

From (15) we see that G_2 cannot vanish at a free edge, and consequently a spherical bell whose edge is free cannot vibrate in this manner if the middle surface is supposed to remain *absolutely* inextensible during the motion; but since the complete value of G_2 contains terms depending on the extensibility, it

would be possible to satisfy the boundary conditions if extension were supposed to take place. From the corresponding results in the case of a cylindrical shell, we should expect that some local extension must necessarily take place in the immediate neighborhood of a free edge; but at points whose distance from this edge is at all large compared with the thickness the extension becomes negligible, so that the solution given by Lord Rayleigh is for all practical purposes a sufficiently accurate one.

Extensional Vibrations.

30. We have already pointed out that the potential energy contains a term proportional to the thickness which depends upon the extension alone. This term leads to the following equations, viz.

$$T_1 = 4nh\mathfrak{A}, \quad T_2 = 4nh\mathfrak{B}, \quad M_1 = M_2 = 2nh\bar{\omega}, \quad (17)$$

and the equations of motion are

$$\left. \begin{aligned} \rho \ddot{u} &= \frac{2n}{a \sin \theta} \left\{ \frac{d}{d\theta} (\mathfrak{A} \sin \theta) - \mathfrak{B} \cos \theta + \frac{1}{2} \frac{d\bar{\omega}}{d\phi} \right\} + \rho X, \\ \rho \ddot{v} &= \frac{2n}{a \sin \theta} \left\{ \frac{d\mathfrak{B}}{d\phi} + \frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} (\bar{\omega} \sin \theta) + \frac{1}{2} \bar{\omega} \cos \theta \right\} + \rho Y, \\ \rho \ddot{w} &= -\frac{2n}{a} (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) + \rho Z. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Equations (17), which are approximate, may be deduced by direct integration, whilst (18) may be obtained by writing down the equations giving the motion of *translation* of an element. The terms involving the normal shearing stresses N_1 , N_2 must be omitted because these quantities are proportional to the cube of the thickness. Having done this, we substitute the values of T_1 , T_2 and M from (17).

The integration of these equations has been discussed by Mr. Love.

Collapse of a Boiler Flue.

31. A problem of great practical importance in engineering is that of the collapse of a boiler flue. The pressure of the smoke and the hot air from the furnace which passes through the flue is approximately equal to the atmospheric pressure, whilst the pressure of the steam within the boiler is considerably greater. Under these circumstances the flue shows a tendency to collapse when the difference between the pressures is sufficiently great.

The complete mathematical theory has not yet been made out, and the difficulty arises from the fact, that since the flue is subjected to an external pressure π_1 , where π_1 is the pressure of the steam in the boiler, and an internal pressure π_2 , where π_2 is the pressure of the hot air from the furnace, it is not permissible to suppose that R' may be treated as zero throughout the substance of the flue; for as we pass from the outer to the inner surface R' must vary from $-\pi_1$ to $-\pi_2$. The value of R' is

$$R' = A_0 + A_1 h' + \frac{1}{2} A_2 h'^2 + \dots,$$

where h' is a small quantity, but the A 's are not; we must therefore retain them in the expression for the flexural couple, and consequently the value of this quantity cannot be found unless the A 's are known.

In a paper published in the *Phil. Mag.* for Sept. 1892 I fully discussed the difficulties of constructing a satisfactory theory. It seems allowable to assume that S and T may be treated as zero, in which case the value of the flexural couple G about a generating line can be shown to be

$$G = -\frac{1}{2} E A_1 h^3 - \frac{8 m n h^3}{3 a (m + n)} \left(\frac{A_0}{m + n} - \frac{w}{a} - \frac{1}{a} \frac{d^2 w}{d\phi^2} \right),$$

the extension being neglected.

As we do not know anything about the A 's, I assumed provisionally that

$$G = \frac{8 h^3}{3 a^2} \left(\frac{m n}{m + n} + \alpha \right) \left(\frac{d^2 w}{d\phi^2} + w \right), \quad (1)$$

where α is some unknown function of the pressures π_1 and π_2 , which vanishes when these quantities are zero.

The equations determining the small oscillations are

$$\begin{aligned} \frac{dT}{ds} + \frac{N}{\rho} &= 2h\sigma v, \\ \frac{dN}{ds} - \frac{T}{\rho} + \pi_2 \left(1 - \frac{h}{\rho} \right) - \pi_1 \left(1 + \frac{h}{\rho} \right) &= 2h\sigma \ddot{w}, \\ \frac{dG}{ds} + N &= 0, \end{aligned}$$

where ρ is the radius of curvature of the *deformed* middle surface and σ the density. The condition of inextensibility is

$$\frac{dw}{d\phi} + w = 0; \quad (2)$$

also

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a^3} \left(\frac{d^3 w}{d\phi^3} + w \right)$$

and $ds = a d\phi$. The equations of motion may now be written

$$\begin{aligned} \frac{dT}{d\phi} + N &= 2ha\sigma\ddot{v}, \\ \frac{dN}{d\phi} - T + (\pi_2 - \pi_1)a - (\pi_2 + \pi_1)h + (\pi_2 - \pi_1)\left(\frac{d^3 w}{d\phi^3} + w\right) &= 2ha\sigma\dot{w}, \\ \frac{dG}{d\phi} + Na &= 0. \end{aligned}$$

Substituting the value of G from (1), eliminating T and N and taking account of (2), we finally obtain

$$\{Ia^{-1}(D^2 + 1) + \pi_1 - \pi_2\}(D^2 + 1)D^2v + 2ha\sigma(D^2 - 1)\ddot{v} = 0, \quad (3)$$

where

$$I = \frac{8h^3}{3a^3} \left(\frac{mn}{m+n} + \alpha \right), \quad D = d/d\phi.$$

To solve (3) assume that

$$v \propto e^{ip^2 + us},$$

where $s = 2, 3, 4, \dots$, then

$$\{Ia^{-1}(s^2 - 1) - (\pi_1 - \pi_2)\}(s^2 - 1)s^2 = 2ha\sigma(s^2 + 1)p^2,$$

and therefore p will be real provided

$$\pi_1 - \pi_2 < I(s^2 - 1)/a.$$

The least value of the right-hand side occurs when $s = 2$, in which case

$$\begin{aligned} \pi_1 - \pi_2 &< 3I/a \\ &< \frac{8h^3}{a^3} \left(\frac{mn}{m+n} + \alpha \right). \end{aligned} \quad (4)$$

If it were allowable to neglect α , the condition would become

$$\pi_1 - \pi_2 < \frac{8mnh^3}{a^3(m+n)}. \quad (5)$$

Finite Bending of Thin Shells.

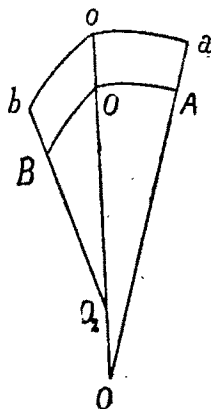
32. The problem of the finite bending of a thin shell presents difficulties which cannot yet be said to have been completely surmounted. When the deformation is small, the displacements of a point on the middle surface are small quantities whose squares and higher powers may be neglected in the cal-

culation of the strains; but when the deformation is finite the displacements may be large quantities. Since any deformation involves a change in the values of certain geometrical quantities, such as the curvature and torsion of certain lines drawn on the middle surface, the most appropriate course to pursue is to endeavor to express the stresses in terms of such geometrical quantities.

There is one class of problems which can often be solved without much difficulty which arise when a plane surface is bent without extension into a developable surface, or when a developable surface is bent into a plane or into some other developable surface such that the lines of curvature on the old surface are lines of curvature on the deformed one. This method can generally be applied when a plane plate is bent into a conical or cylindrical surface; but it could not be applied when a right circular cone is bent into a cone whose lines of curvature are not identical with those of the original one.

The success of this method, in cases where it can be applied, depends upon the fact that the flexural couples G_1 , G_2 can be expressed in terms of the changes of curvature, and also that in the special cases alluded to a sufficient number of the ten stresses are zero to enable the remainder to be determined by means of the general equations of equilibrium.

33. Let OA , OB be two lines of curvature on the middle surface of the undeformed shell; O_1 , O_2 the centres of principal curvature; let oa , ob be the curves in which the planes OAO_1 , OBO_2 meet any layer of the shell. Let



ρ_1 , ρ_2 be the principal radii of curvature at O ; let $Oo = r'$; also let accented letters denote the strained positions of the various points.

If P denote the normal traction along oa , and R the normal traction along Oo ,

$$\begin{aligned}
 P &= (m + n)\sigma_1 + (m - n)(\sigma_2 + \sigma_3) \\
 &= 2n\{\sigma_1 + E(\sigma_1 + \sigma_2)\} + ER.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Now

$$\sigma_1 = \frac{o'a' - oa}{oa}$$

and

$$\frac{oa}{OA} = 1 + \frac{\eta}{\rho_1}, \quad \frac{o'a'}{O'A'} = 1 + \frac{\eta'}{\rho_1'}, \quad \eta' = \eta(1 + \sigma_3).$$

Since we neglect the extension of the middle surface, $O'A' = OA$, whence

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\eta'/\rho_1' - \eta/\rho_1}{1 + \eta/\rho_1} = \eta \left(\frac{1}{\rho_1'} - \frac{1}{\rho_1} \right) + \frac{\eta\sigma_3}{\rho_1'} \\ &= \eta \left(\frac{1}{\rho_1'} - \frac{1}{\rho_1} \right) + \frac{\eta}{\rho_1'} \left\{ \frac{R}{m+n} - E(\sigma_1 + \sigma_3) \right\}. \end{aligned} \quad (2)$$

Similarly,

$$\sigma_3 = \eta \left(\frac{1}{\rho_2'} - \frac{1}{\rho_2} \right) + \frac{\eta}{\rho_2'} \left\{ \frac{R}{m+n} - E(\sigma_1 + \sigma_3) \right\}, \quad (3)$$

and the value of G_2 is

$$G_2 = \int_{-h}^h P \eta d\eta. \quad (4)$$

Now, according to the fundamental hypothesis laid down in §5, it follows that, *provided there is no external pressure*, R must be a quadratic function of h and η , and consequently the retention of R will lead on integration to terms in G_2 involving higher powers of h than h^3 ; accordingly we may neglect R , and if we substitute the values of σ_1, σ_3 from (2) and (3) in (1), and the resulting value of P in (4) and integrate, we shall obtain

$$G_2 = \frac{1}{3}nh^3 \left\{ (1+E) \left(\frac{1}{\rho_1'} - \frac{1}{\rho_1} \right) + E \left(\frac{1}{\rho_2'} - \frac{1}{\rho_2} \right) \right\}. \quad (5)$$

Similarly we can show that

$$G_1 = -\frac{1}{3}nh^3 \left\{ E \left(\frac{1}{\rho_1'} - \frac{1}{\rho_1} \right) + (1+E) \left(\frac{1}{\rho_2'} - \frac{1}{\rho_2} \right) \right\}. \quad (6)$$

We notice that the above values of G_1 and G_2 agree with those which we have already obtained for plane plates and cylindrical and spherical shells when the bending is small.

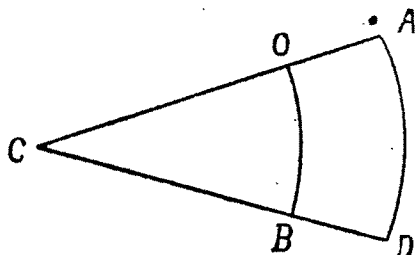
When a plane plate is bent into a developable surface $\rho_1 = \rho_2 = \infty$; also one of the quantities ρ_1' or ρ_2' (say ρ_2') is infinite; whence (5) and (6) become

$$\left. \begin{aligned} G_2 &= \frac{1}{3}nh^3(1+E)/\rho_1', \\ G_1 &= -\frac{1}{3}nh^3E/\rho_1'. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Since the extension of the middle surface is neglected, equations (5) and (6) would not apply to the case of a plane plate which is deformed into a surface such as a portion of a sphere.

34. As an example of the preceding method, we shall consider the case of a plane plate of thickness $2h$ which is bounded by two radii OA , OD and two arcs OB , AD of concentric circles; and we shall inquire whether it is possible to bend this plate into a portion of a right circular cone in which OA , BD are generators and OB , AD are circular sections.

We shall assume for trial that the bending may be effected by means of tensions, normal shearing stresses and flexural couples applied to the edges; so that the tangential shearing stresses and the torsional couples are zero.



Let α be the semi-vertical angle of the cone, r the distance of any point on $OADB$ from O . Then

$$\begin{aligned} \rho'_1 &= \rho'_2 = \infty; \quad \rho_2 = \infty, \quad \rho'_2 = r \tan \alpha; \\ \text{whence} \quad G_2 &= \frac{1}{3} nh^3 E r^{-1} \cot \alpha, \\ G_1 &= -\frac{1}{3} nh^3 (1 + E) r^{-1} \cot \alpha. \end{aligned}$$

The equations of equilibrium are

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dr} (T_1 r) - T_2 &= 0, \\ \frac{dT_2}{d\phi} + N_1 \cos \alpha &= 0, \\ \frac{d}{dr} (N_2 r) \sin \alpha + \frac{dN_1}{d\phi} - T_2 \cos \alpha &= 0, \\ \frac{dG_1}{d\phi} + N_1 r \sin \alpha &= 0, \\ \frac{d}{dr} (G_2 r) - N_2 r + G_1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \text{Let} \quad & \frac{1}{3} nh^3 (1 + E) \cot \alpha = k, \\ \text{then} \quad & G_1 = -k/r; \\ \text{whence} \quad & N_2 = -k/r^2, \quad N_1 = 0, \\ & T_2 = k \tan \alpha / r^2, \end{aligned}$$

and therefore

$$T_1 = \frac{A}{r} - \frac{k \tan \alpha}{r^2},$$

where A is the constant of integration.

From these equations we see that all the stresses are determinate except T_1 . If $CO = a$, $CA = b$, and T_a , T_b denote the tensions along OB , AD , we have

$$T_a = \frac{A}{a} - \frac{k \tan \alpha}{a^2},$$

$$T_b = \frac{A}{b} - \frac{k \tan \alpha}{b^2},$$

from which it appears that either T_a or T_b may if we please be made zero, provided the other is properly determined.

The above results would also apply to a belt of a complete cone bounded by two circular sections.

FLEDBOROUGH HALL, HOLYPORT, BERKS, ENGLAND.

[CORRECTIONS BY A. CHESSIN.]

Page 165.

Instead of: for every whole negative number a_e there should be another whole negative number $a_{e'}$, and that at the same time $A_e x^{a_e} + A_{e'} x^{a_{e'}} = 0$

read:

$a_{e_1}, a_{e_2}, \dots, a_{e_p}$ being the negative numbers, the expression

$$A_{e_1} x^{-a_{e_1}} + A_{e_2} x^{-a_{e_2}} + \dots + A_{e_p} x^{-a_{e_p}}$$

vanishes identically.

Page 182.

Instead of: for every such α_e there should be another whole negative number $\alpha_{e'}$, and that at the same time

$$\frac{A_e x^{-\alpha_e}}{(-\alpha \alpha_e + b)!} + \frac{A_{e'} x^{-\alpha_{e'}}}{(-\alpha \alpha_{e'} + b)!} = 0$$

read:

$\alpha_{e_1}, \alpha_{e_2}, \dots, \alpha_{e_p}$ being the negative numbers, the expression

$$\frac{A_{e_1} x^{-\alpha_{e_1}}}{(-\alpha \alpha_{e_1} + b)!} + \frac{A_{e_2} x^{-\alpha_{e_2}}}{(-\alpha \alpha_{e_2} + b)!} + \dots + \frac{A_{e_p} x^{-\alpha_{e_p}}}{(-\alpha \alpha_{e_p} + b)!}$$

vanishes identically.

Sur la transformation des courbes algébriques.

PAR E. GOURSAT.

1. Lorsque les coordonnées d'un point d'une courbe algébrique C

$$F(x, y) = 0, \quad (1)$$

s'expriment par des fonctions rationnelles d'un paramètre t , par des formules telles que

$$x = \phi(t), \quad y = \psi(t), \quad (2)$$

il peut se présenter deux cas. Si à un point (x, y) de la courbe C ne correspond qu'une valeur du paramètre t , la courbe C correspond point par point à une ligne droite $z = t$. Si à un point (x, y) correspondent plusieurs valeurs du paramètre t , il suffit d'un simple changement dans le paramètre, comme l'a démontré Mr. Luröth (*Mathematische Annalen*, t. IX, p. 163), pour être ramené au premier cas.

Le théorème de Mr. Luröth peut-être généralisé de différentes façons. Une première généralisation, que la théorie des intégrales abéliennes rend évidente, est celle-ci : *Si les coordonnées d'un point d'une courbe algébrique C sont des fonctions rationnelles des coordonnées d'un point d'une autre courbe algébrique C' , le genre de la courbe C est au plus égal au genre de la courbe C' .* En effet, la courbe C' a au moins autant d'intégrales distinctes de première espèce que la courbe C , mais elle peut en avoir davantage, si la transformation n'est pas birationnelle.

Voici une généralisation différente, d'un caractère plus algébrique. *Si les coordonnées d'un point d'une courbe algébrique C sont des fonctions rationnelles d'un paramètre t et d'une variable v liée à t par une équation algébrique entière de degré n en v , de telle façon qu'à un même point (x, y) de C correspondent plusieurs systèmes de valeurs de t et de v , on peut trouver une courbe C' , qui correspond point par point à la courbe C , et dont l'équation renferme une des variables à un degré égal ou inférieur à n .*

2. La démonstration de ce théorème repose sur deux lemmes, que nous allons d'abord établir. Supposons que les points de deux courbes C , C' se correspondent de telle façon qu'à un point de C' corresponde un seul point de C et qu'à un point de C correspondent μ points de C' ($\mu > 1$). Si (x, y) désignent les coordonnées d'un point de C , (x', y') les coordonnées d'un point de C' , on a

$$x = \phi(x', y'), \quad y = \psi(x', y'), \quad (3)$$

$\phi(x', y')$ et $\psi(x', y')$ étant des fonctions rationnelles. Pour un point (x, y) de C les trois équations

$$x = \phi(x', y'), \quad y = \psi(x', y'), \quad F_1(x', y') = 0,$$

dont la dernière est l'équation de la courbe C' , ont μ systèmes de solutions communes en (x', y') . On dit que la courbe C est une transformée *simplement rationnelle* de la courbe C' . Cela posé, soit $\Phi(x', y')$ une fonction rationnelle de (x', y') devenant infinie du premier ordre en ν points seulement $(\alpha'_1, \beta'_1), \dots, (\alpha'_\nu, \beta'_\nu)$ de C' , auxquels correspondent ν points *distincts* de C , $(\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_\nu, \beta_\nu)$; *il existe une fonction rationnelle $\Pi(x, y)$ du point analytique (x, y) devenant infinie du premier ordre en quelques-uns des ν points $(\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_\nu, \beta_\nu)$, seulement.*

Nous supposons, ce qui ne restreint pas la généralité, que la courbe C , de degré m , a m points distincts à l'infini et qu'aucune asymptote n'est parallèle à l'axe des y , et de même que la courbe C' , de degré m' , a m' points distincts à l'infini et qu'aucune asymptote n'est parallèle à l'axe Oy' ; enfin, que les points (α_i, β_i) et (α'_i, β'_i) sont des points simples des deux courbes. Soit ρ le genre de la courbe C , et

$$\lambda_1 Q_1(x, y) + \lambda_2 Q_2(x, y) + \dots + \lambda_\rho Q_\rho(x, y) = 0,$$

l'équation générale des courbes adjointes d'ordre $m - 3$. Toute intégrale de première espèce relative à la courbe C se change, par la transformation (3), en une intégrale de première espèce relative à la courbe C' ; on a donc ρ relations de la forme

$$\int \frac{Q_i(x, y) dx}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \int \frac{R_i(x', y') dx'}{\frac{\partial F_1}{\partial y'}},$$

$R_i(x', y')$ désignant un polynôme adjoint d'ordre $m' - 3$ relatif à la courbe C' . Ces ρ relations peuvent aussi s'écrire

$$\frac{Q_1(x, y)}{R_1(x', y')} = \frac{Q_2(x, y)}{R_2(x', y')} = \dots = \frac{Q_\rho(x, y)}{R_\rho(x', y')} = H(x', y'), \quad (4)$$

en posant

$$H = \frac{dx'}{dx} \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F_1}{\partial y}}.$$

La courbe C' étant en général de genre $\rho' > \rho$ possède en outre $\rho' - \rho$ polynômes adjoints d'ordre $m - 3$, $R_{\rho+1}(x', y') \dots R_{\rho'}(x', y')$, formant avec les premiers un système de ρ' polynômes adjoints linéairement indépendants. Désignons par σ le nombre des courbes adjointes distinctes d'ordre $m - 3$ qui passent par les ν points (α_i, β_i) de C , et par σ' le nombre des courbes adjointes distinctes d'ordre $m' - 3$ qui passent par les ν points (α'_i, β'_i) de C' . On obtient ces nombres en considérant les déterminants que l'on peut déduire des deux tableaux (E) et (E') par la suppression d'un certain nombre de lignes et de colonnes

$$(E) \begin{vmatrix} Q_1(\alpha_1, \beta_1), & Q_2(\alpha_1, \beta_1), & \dots & Q_\rho(\alpha_1, \beta_1) \\ Q_1(\alpha_2, \beta_2), & Q_2(\alpha_2, \beta_2), & \dots & Q_\rho(\alpha_2, \beta_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q_1(\alpha_\nu, \beta_\nu), & Q_2(\alpha_\nu, \beta_\nu), & \dots & Q_\rho(\alpha_\nu, \beta_\nu) \end{vmatrix},$$

$$(E') \begin{vmatrix} R_1(\alpha'_1, \beta'_1), & \dots & R_\rho(\alpha'_1, \beta'_1), & \dots & R_{\rho'}(\alpha'_1, \beta'_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_1(\alpha'_\nu, \beta'_\nu), & \dots & R_\rho(\alpha'_\nu, \beta'_\nu), & \dots & R_{\rho'}(\alpha'_\nu, \beta'_\nu) \end{vmatrix}.$$

Les nombres σ et σ' ayant été définis comme tout-à-l'heure, tous les déterminants d'ordre $\rho - \sigma + 1$ contenus dans le tableau (E) sont nuls, et l'un au moins des déterminants d'ordre $\rho - \sigma$ est différent de zéro; de même, tous les déterminants d'ordre $\rho' - \sigma' + 1$ du tableau (E') sont nuls et l'un au moins des déterminants d'ordre $\rho' - \sigma'$ n'est pas nul. Or, on peut supposer qu'en chacun des points (α'_i, β'_i) le facteur $H(x', y')$ a une valeur finie; en effet, si la fonction rationnelle $\Phi(x', y')$ a ν pôles du premier ordre, il en est de même de la fonction rationnelle

$\frac{1}{\Phi(x', y') - A}$, quelle que soit la constante A , et on peut toujours disposer de

cette constante de façon que les ν pôles de la nouvelle fonction rationnelle soient distincts des pôles de $H(x', y')$. Cela étant, les formules (4) nous montrent que tout déterminant du tableau (E) est égal à un déterminant du même ordre du tableau (E') multiplié par un facteur qui conserve une valeur finie. Il suit de là que tous les déterminants d'ordre $\rho' - \sigma' + 1$ du premier tableau sont nuls, et on doit avoir

$$\rho - \sigma \leq \rho' - \sigma'. \quad (5)$$

La fonction rationnelle $\Phi(x', y')$ devenant infinie du premier ordre aux ν points (α'_i, β'_i) seulement, ou en quelques-uns de ces points, dépend de $\nu - \rho' + \sigma' + 1$ constantes arbitraires, d'après le théorème général de Riemann-Roch (V. Picard, *Traité d'Analyse*, tome II, p. 431). Ce nombre est au moins égal à 2, car, si la fonction $\phi(x', y')$ répond à la question, il en est de même de $A\phi(x', y') + B$, quelles que soient les constantes A et B . On a donc aussi, d'après la relation (5),

$$\nu - \rho + \sigma + 1 \geq 2;$$

ce nombre $\nu - \rho + \sigma + 1$ représente le nombre des constantes arbitraires dont dépend la fonction rationnelle $\Pi(x, y)$ la plus générale devenant infinie du premier ordre aux ν points (α_i, β_i) ou en quelques-uns de ces points seulement. Cette fonction ne peut se réduire à une constante, puisqu'elle dépend de deux paramètres arbitraires au moins. Donc il existe une fonction rationnelle du point analytique (x, y) ayant au plus ν pôles du premier ordre.

3. Le second lemme qui nous sera utile est le suivant : s'il existe une fonction rationnelle de (x, y) devenant infinie du premier ordre en n points seulement d'une courbe C , on peut trouver une courbe C' appartenant à la même classe que la courbe C et représentée par une équation du degré n par rapport à l'une des variables. Soit $\Pi(x, y)$ une fonction rationnelle ayant n pôles du premier ordre $(\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_n, \beta_n)$; prenons une autre fonction rationnelle $\Pi_1(x, y)$ ayant un seul pôle du premier ordre commun avec $\Pi(x, y)$, le point (α_1, β_1) par exemple, et posons

$$X = \Pi(x, y), \quad Y = \Pi_1(x, y).$$

Lorsque le point (x, y) décrit la courbe C , le point (X, Y) décrit une courbe C' , qui correspond point par point à la courbe C ; en effet, au point (α_1, β_1) de C correspond un point à l'infini de C' , avec une direction asymptotique non parallèle aux axes. Inversement, à ce point à l'infini de C' correspond un seul point de C , le point (α_1, β_1) . A une valeur de X , l'équation $X = \Pi(x, y)$ fait correspondre n points (x, y) de la courbe C et, par suite, n valeurs de Y ; l'équation qui représente la courbe C' est donc de degré n par rapport à Y .

4. Il est facile maintenant d'établir la proposition énoncée plus haut. Supposons que les coordonnées x, y d'un point de la courbe C , représentée par l'équation (1), soient des fonctions rationnelles de t et de v ,

$$x = \phi(t, v), \quad y = \psi(t, v), \quad (6)$$

v et t étant liées par la relation algébrique

$$\Phi(t, v) = 0, \quad (7)$$

de degré n en v . A une valeur arbitraire Θ de t correspondant n valeurs de v , en général distinctes, v_1, v_2, \dots, v_n et par suite n points $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ de la courbe C . Considérons d'abord le cas où ces n points sont distincts. La fonction rationnelle $\frac{1}{t - \Theta}$ du point analytique (t, v) devient infinie du premier ordre en n points seulement de la courbe auxiliaire C , représentée par l'équation (7), à savoir, aux points $(\Theta, v_1), (\Theta, v_2), \dots, (\Theta, v_n)$. Donc, d'après le premier lemme qui a été démontré, il existe une fonction rationnelle $\Pi(x, y)$, qui est infinie du premier ordre aux n points $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, ou en quelques-uns de ces points seulement. D'après le second lemme, on peut trouver une courbe C' correspondant point par point à la courbe C , et représentée par une équation qui sera de degré n au plus par rapport à l'une des variables.

Si les n points (x, y) de C qui correspondent à une valeur arbitraire de t ne sont pas distincts, le raisonnement n'est plus applicable. Mais, dans ce cas, les coordonnées d'un point (x, y) correspondant à une valeur arbitraire de t s'obtiendront par la résolution d'une équation de degré inférieur à n , quand on l'aura ramenée à n'avoir que des racines simples. Autrement dit, x et y seront des fonctions rationnelles de t et d'une variable auxiliaire W liée à t par une équation algébrique de degré inférieur à n par rapport à W .

5. Étant donnée une courbe C , de genre ρ , appelons *ordre* d'une fonction rationnelle du point analytique (x, y) la somme des ordres des pôles de cette fonction rationnelle, chacun d'eux étant compté avec son degré de multiplicité. Cet ordre ne peut pas descendre au dessous d'une certaine limite r ; il est clair que ce nombre r est un invariant relativement à toute transformation birationnelle. Parmi toutes les courbes de la même classe que C , il y en a toujours qui sont représentées par une équation renfermant l'une des variables au degré r seulement, mais il ne peut y en avoir renfermant l'une des variables à un degré inférieur à r . Pour $\rho = 0$, on a $r = 1$; si $\rho = 1$, ou $\rho = 2$, on a $r = 2$; si $\rho = 3$, r peut-être égal à 2 ou à 3; enfin, si $\rho > 3$, r est au plus égal à $\rho - 1$. Les courbes pour lesquelles $r = 2$ sont dites courbes *hyperelliptiques*; on peut leur faire correspondre point par point une courbe ayant une équation de la forme

$$y^2 = P(x), \quad (8)$$

$P(x)$ étant un polynôme.

Du théorème démontré plus haut, on conclut immédiatement que si une courbe C est une transformée simplement rationnelle d'une autre courbe C' , le nombre r relatif à la courbe C est au plus égal au nombre r' relatif à la courbe C' . Par exemple, si la courbe C' est une courbe hyperelliptique, on a $r' = 2$, et, par suite, $r = 1$ ou $r = 2$. Donc la courbe C est elle-même hyperelliptique, à moins d'être une courbe unicursale. Il peut se faire que l'on ait $r = r'$, sans que la transformation soit birationnelle; par exemple, supposons que dans la relation (8) le polynôme $P(x)$ soit de degré $2\rho + 2$,

$$P(x) = A(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_{2\rho+2}),$$

et que les $2\rho + 2$ racines a_i soient distinctes, aucune d'elles n'étant nulle. Si on pose $x = x'$, on est conduit à une nouvelle relation hyperelliptique

$$y^2 = Q(x'),$$

le polynôme $Q(x')$ étant de degré $4\rho + 4$. On a ici $\rho' = 2\rho + 1$, $r' = r$.

Si la transformation par laquelle on passe de la courbe C' à la courbe C est de degré μ , c'est-à-dire si elle fait correspondre à un point de C μ points de C' , on a $r' \leq r\mu$. En effet, une fonction rationnelle de (x, y) devenant infinie du premier ordre en r points de C se change en une fonction rationnelle de (x', y') devenant infinie du premier ordre en $r\mu$ points de C' .

6. Voici une autre remarque sur les transformations simplement rationnelles des courbes algébriques. Soit C une courbe de degré m et de genre ρ , C' une courbe de degré m' et de genre ρ' , μ le degré de la transformation simplement rationnelle par laquelle on passe de C' à C ; nous supposons $\rho \geq 2$. Soient $Q_1(x, y)$, $Q_2(x, y)$ deux polynômes adjoints distincts de degré $m - 3$ relatifs à la courbe C . Puisque toute intégrale de première espèce se change en une intégrale de première espèce, on a

$$\int \frac{Q_1(x, y) dx}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \int \frac{R_1(x', y') dx'}{\frac{\partial F_1}{\partial y'}},$$

$$\int \frac{Q_2(x, y) dx}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \int \frac{R_2(x', y') dx'}{\frac{\partial F_1}{\partial y'}},$$

$R_1(x', y')$ et $R_2(x', y')$ étant deux polynômes adjoints d'ordre $m' - 3$ de la courbe C' , et, par conséquent,

$$\frac{Q_1(x, y)}{Q_2(x, y)} = \frac{R_1(x', y')}{R_2(x', y')}.$$

La courbe adjointe $Q_1(x, y) - \kappa Q_2(x, y) = 0$ rencontre la courbe C en $2\rho - 2$ points distincts des points doubles; à ces $2\rho - 2$ points correspondent $\mu(2\rho - 2)$ points de la courbe C' situés sur la courbe adjointe $R_1(x', y') - \kappa R_2(x', y') = 0$. On conclut de là quelquefois que l'on a $\mu(2\rho - 2) = 2\rho' - 2$, mais la conclusion est inexacte; tout ce qu'on peut en déduire, c'est que l'on a

$$\mu(2\rho - 2) \leq 2\rho' - 2,$$

ou

$$\mu(\rho - 1) \leq \rho' - 1. \quad (9)$$

L'inégalité (9) fournit une limite inférieure pour ρ' , quand ρ et μ sont donnés, mais cette limite inférieure n'est pas toujours atteinte. Par exemple dans la relation

$$y^3 = A(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_8),$$

où toutes les quantités a_i sont distinctes et différentes de zéro, posons $x = x'$; il vient la nouvelle relation

$$y^3 = A(x' - a_1) \dots (x' - a_8).$$

On a ici $\rho = 3$, $\mu = 2$, $\rho' = 7$, et par suite $\rho' - 1 > 2(\rho - 1)$. Au contraire, dans la relation

$$y^2 = Ax(x - a_1) \dots (x - a_4),$$

faisons $x = x'$, il vient

$$y^2 = Ax'(x' - a_1) \dots (x' - a_4);$$

on a $\rho = 2$, $\mu = 2$, $\rho' = 3$, et, par conséquent, $\rho' - 1 = \mu(\rho - 1)$.

D'une manière générale, connaissant les nombres ρ et μ , il est impossible d'assigner *a priori* une limite supérieure pour le genre ρ' de la seconde courbe. Soit, en effet, une surface de Riemann composée de m feuillets, de genre ρ , n'ayant que des points de ramification simples, dont le nombre N est fourni par la formule générale de Riemann

$$N = m - 1 + \rho;$$

à cette surface T correspond une classe de courbes algébriques. Soit

$$F(x, y) = 0,$$

l'équation de l'une de ces courbes de degré m en y ; la surface de Riemann correspondante à la fonction algébrique y de la variable x , définie par l'équation

précédente, est précisément la surface T . Nous supposons que cette surface n'a aucun point de ramification à l'infini, ni au point $x' = 0$. Si on pose $x = x'^\mu$, on est conduit à une nouvelle relation

$$F(x'^\mu, y) = 0$$

de degré m en y , qui sera évidemment indécomposable, si la surface T n'a pas été prise d'une façon particulière. La surface de Riemann T'' , associée à cette nouvelle relation, se compose encore de m feuillets, et il est aisé de voir qu'elle possède μN points de ramification simples. On a donc

$$\rho' = \mu N - (m - 1) = \mu \rho + (\mu - 1)(m - 1);$$

or, les nombres ρ et μ étant donnés, il n'y a pas de limite supérieure pour m , ni par suite pour ρ' .

PARIS, le 11 Mai 1894.

Isotropic Elastic Solids of nearly Spherical Form.

BY C. CHREE, M. A.

PART I.—EQUILIBRIUM.

TABLE OF CONTENTS.

Section I.

§1.	Introduction,	300
§2.	Notation,	300
§3.	General solution in arbitrary constants,	301
§4.	Surface equations,	302
§5.	Abbreviations, stresses, etc.,	302
§6-7.	Nearly spherical spheroid, surface equations,	304-305
§8-10.	Pure mathematical results,	306-307
§11-15.	Solution of surface equations,	308-312
§16-17.	Values found for arbitrary constants,	313-314
§18.	Surface equation involving the i^{th} , and applied forces the 2d zonal harmonic,	314
§19.	General case of symmetry round an axis,	315

Section II.

§20.	Nearly spherical spheroid, surface forces normal and tangential, general case,	315
§21.	Special case, surface forces depending on 2d zonal harmonic,	318
§22-23.	Form of surface after strain,	320-321
§24.	Eccentricity produced in sphere,	323
§25.	Change of volume,	323

Section III.

§26.	Notation, problem of nearly spherical ellipsoid,	325
§27.	Discussion of question of equilibrium,	326
§28-33.	Pure mathematical results,	327-335

§34-35.	Notation, formulæ for stresses,	335-336
§36-38.	Equations from first surface condition,	337-339
§39-43.	“ “ second “	343-348
§44-46.	“ “ third “	354-358
§47.	Method of combining equations from 2d and 3d surface conditions,	363
§48.	Values of constants in “unequilibrated” terms,	365
§49-51.	Final equations determining arbitrary constants and their discussion,	366-373
§52.	First approximations to arbitrary constants,	374
§53.	Second “ “ “	375
§54-55.	Explanation and reference to simplifications in special cases,	378
§56-57.	“Unequilibrated constants” discussed,	379-380
§58.	General case of shell,	382
§59.	Form of surface in general case treated,	383
§60.	Origin of bodily forces,	383
§61-62.	Precession and nutation; question of equilibrium,	384-385
§63-66.	Example of nearly spherical spheroid with distant gravitating body along polar axis,	386-389
§67-69.	Example of nearly spherical ellipsoid with distant gravitating body in a principal plane; sub-case of spheroid with distant body in equatorial plane,	390-394
§71-72.	Speculations as to action of sun on earth,	394-395

§1. The investigation of a solution of the elastic solid equations for the equilibrium or motion of homogeneous isotropic material enclosed by the simplest of all surfaces, the spherical, presents no small difficulty. For even a slight departure from the spherical form the increase of difficulty is so considerable that, so far as I know, the only problem of the class successfully treated hitherto is that of a nearly spherical solid exposed to gravitational forces but free of all surface forces.* In the present case, surface forces appear as well as bodily forces, so that the problem is much more general than that previously treated. The method employed is also novel, and seems likely to prove serviceable in various other branches of applied mathematics.

Notation.

§2. Polar coordinates r, θ, ϕ are employed, θ being measured from the “polar axis.” The displacements u, v, w are measured as in Todhunter and

*Cambridge Philosophical Society's Transactions, Vol. XIV, p. 278 *et seq.*

Pearson's "History," and the convenient notation of the same work is also adopted for the stresses. The expressions for the strains and the body-stress equations—or equations satisfied by the stresses throughout the interior—may be deduced from the footnote, p. 79, Vol. II, Part I, of Todhunter and Pearson's "History" by writing θ, ϕ for ϕ and ψ respectively. The dilatation is denoted by Δ , so that

$$\Delta = \frac{du}{dr} + \frac{2u}{r} + \frac{1}{r} \frac{dv}{d\theta} + \frac{v}{r} \cot \theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{dw}{d\phi}.$$

The density is denoted by ρ and the elastic constants by m and n , as used in Thomson and Tait's "Natural Philosophy."

§3. The present paper employs the general solution in polar coordinates, involving surface spherical harmonics, given in Vol. XIV of the Cambridge "Transactions," p. 250, but with a slightly different notation. We need write down only the terms depending on surface harmonics of a single degree, i , as types. Thus we have

$$\Delta = \frac{-\rho}{m+n} r^i V_i \nabla_i + r^i Y_i \mathbf{Y}_i, \quad (1)$$

$$u = -r^{i+1} \left\{ \frac{(i+2)\rho}{2(2i+3)(m+n)} V_i \nabla_i + \frac{im-2n}{2(2i+3)n} Y_i \mathbf{Y}_i \right\} + r^{i-1} Z_i Z_i, \quad (2)$$

$$v = \frac{d}{d\theta} \left[-\frac{r^{i+1}}{2(2i+3)} \left\{ \frac{\rho}{m+n} V_i \nabla_i + \frac{(i+3)m+2n}{(i+1)n} Y_i \mathbf{Y}_i \right\} + \frac{r^{i-1}}{i} Z_i Z_i \right] \\ + \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} (r^i W_i \mathbf{W}_i), \quad (3)$$

$$w = \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} \left[-\frac{r^{i+1}}{2(2i+3)} \left\{ \frac{\rho}{m+n} V_i \nabla_i + \frac{(i+3)m+2n}{(i+1)n} Y_i \mathbf{Y}_i \right\} + \frac{r^{i-1}}{i} Z_i Z_i \right] \\ - \frac{d}{d\theta} (r^i W_i \mathbf{W}_i). \quad (4)$$

Here V_i, Y_i , etc., denote constants, while ∇_i, \mathbf{Y}_i , etc., represent each one or a series of surface harmonics. The bodily forces come from the potential $r^i V_i \nabla_i$, so that the form of the harmonic, or harmonics, ∇_i is given. The forms of $\mathbf{Y}_i, Z_i, \mathbf{W}_i$ depend partly on ∇_i and partly on the surface harmonics which occur in the expression for the surface forces.

When the solution is applied to a perfect sphere, \mathbf{Y}_i and Z_i may be treated

quite separately from \mathbf{W}_i . The latter depends only on surface forces of such a type that

$$\text{Component parallel to } \theta = \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} f_1(\theta, \phi),$$

$$\text{“ “ “ } \phi = -\frac{d}{d\theta} f_1(\theta, \phi),$$

where $f_1(\theta, \phi)$ denotes a function of θ and ϕ , which may be spoken of as a “stream function.”

On the other hand, in a perfect sphere \mathbf{Y}_i and \mathbf{Z}_i depend partly on \mathbf{V}_i and partly on surface forces of such a type that

$$\text{Component parallel to } \theta = \frac{d}{d\theta} f_2(\theta, \phi),$$

$$\text{“ “ “ } \phi = \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} f_2(\theta, \phi),$$

where $f_2(\theta, \phi)$ is a function of θ and ϕ , which may be spoken of as a “potential function.”

When the solution is applied to a nearly spherical mass, this separation of \mathbf{Y}_i and \mathbf{Z}_i from \mathbf{W}_i is not in general possible.

§4. The arbitrary constants Y_i , Z_i , W_i in the general solution have to be determined from the three surface equations, or equations satisfied by the stresses at the surface. Denoting the direction cosines of the outwardly directed normal relative to the fundamental directions r , θ , ϕ by λ , μ , ν , and employing R , Θ , Φ to signify the components of the applied surface forces in these directions, we have for surface equations

$$\left. \begin{aligned} \lambda \widehat{rr} + \mu \widehat{r\theta} + \nu \widehat{r\phi} &= R, \\ \lambda \widehat{r\theta} + \mu \widehat{\theta\theta} + \nu \widehat{\theta\phi} &= \Theta, \\ \lambda \widehat{r\phi} + \mu \widehat{\theta\phi} + \nu \widehat{\phi\phi} &= \Phi. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Here the values of the stresses \widehat{rr} , etc., answer of course to that point on the surface to which λ , R , belong.

§5. In the method of solution about to be used we require the values of the stresses answering to the displacements (2), (3), (4) over the spherical surface $r \parallel a$. To secure brevity in the expressions for these stresses, let us put

$$\frac{-a^i}{2i+3} \left\{ (i^2 - i - 3)m + n \right\} = A_i, \quad (6)$$

$$2(i-1)a^{i-2}n = B_i, \quad (7)$$

$$\frac{-a^i \{ i(i+2)m - n \}}{(i+1)(2i+3)} = C_i, \quad (8)$$

$$2 \frac{(i-1)}{i} a^{i-2}n = D_i, \quad (9)$$

$$\frac{a^i}{2i+3} \{ (i+3)m - (2i+1)n \} = E_i, \quad (10)$$

$$2a^{i-2}n = F_i, \quad (11)$$

$$\frac{-a^i \{ (i+3)m + 2n \}}{(i+1)(2i+3)} = G_i, \quad (12)$$

$$\frac{2a^{i-2}}{i} n = H_i, \quad (13)$$

$$\frac{-\rho}{m+n} \frac{a^i}{2i+3} \{ (2i+3)m + (i^2 + i - 1)n \} = L_i, \quad (14)$$

$$\frac{-\rho n}{m+n} a^i \frac{i+1}{2i+3} = M_i, \quad (15)$$

$$\frac{-\rho}{m+n} \frac{a^i}{2i+3} \{ (2i+3)m - (i+1)n \} = N_i, \quad (16)$$

$$\frac{-\rho n}{m+n} \frac{a^i}{2i+3} = O_i. \quad (17)$$

Also denote $V_i \mathbf{V}_i$ by $[V_i]$, etc.

Then when $r = a$ we have

$$\widehat{rr} = L_i [V_i] + A_i [Y_i] + B_i [Z_i], \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \widehat{\theta\theta} = N_i [V_i] + E_i [Y_i] + F_i [Z_i] + \frac{d^2}{d\theta^2} \{ O_i [V_i] + G_i [Y_i] + H_i [Z_i] \} \\ + 2na^{i-1} W_i \frac{d}{d\theta} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{d\mathbf{W}_i}{d\phi} \right\}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \widehat{\phi\phi} = N_i [V_i] + E_i [Y_i] + F_i [Z_i] \\ + \left(\frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{d^2}{d\phi^2} + \cot \theta \frac{d}{d\theta} \right) \{ O_i [V_i] + G_i [Y_i] + H_i [Z_i] \} \\ - 2na^{i-1} W_i \frac{d}{d\theta} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{d\mathbf{W}_i}{d\phi} \right\}, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\widehat{r\theta} = \frac{d}{d\theta} \{M_i[V_i] + O_i[Y_i] + D_i[Z_i]\} + n(i-1)a^{i-1}W_i \frac{1}{\sin \theta} \frac{d\mathbf{W}_i}{d\phi}, \quad (21)$$

$$\widehat{r\phi} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} \{M_i[V_i] + O_i[Y_i] + D_i[Z_i]\} - n(i-1)a^{i-1}W_i \frac{d\mathbf{W}_i}{d\phi}, \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \widehat{\theta\phi} = \frac{d^2}{d\theta d\phi} \{ \operatorname{cosec} \theta (O_i[V_i] + G_i[Y_i] + H_i[Z_i]) \} \\ - na^{i-1}W_i \left\{ 2 \frac{d^2 \mathbf{W}_i}{d\theta^2} + i(i+1) \mathbf{W}_i \right\}. \end{aligned} \quad (23)$$

When, as may frequently happen,

$$\mathbf{V}_i = \mathbf{Y}_i = \mathbf{Z}_i = T_i \text{ say,}$$

it is convenient to put

$$\left. \begin{aligned} L_i V_i + A_i Y_i + B_i Z_i &= \bar{L}_i, \\ M_i V_i + O_i Y_i + D_i Z_i &= \bar{M}_i, \\ N_i V_i + E_i Y_i + F_i Z_i &= \bar{N}_i, \\ O_i V_i + G_i Y_i + H_i Z_i &= \bar{O}_i. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

In such a case, when the equation to the surface also involves T_i , being of the form

$$r = a(1 + \varepsilon T_i),$$

where ε^2 is negligible, the following relations will be found useful:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dT_i}{d\theta} \frac{d^2 T_i}{d\theta^2} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{dT_i}{d\phi} \frac{d^2}{d\theta d\phi} (\operatorname{cosec} \theta T_i) &= \frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} \left\{ \left(\frac{dT_i}{d\theta} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{dT_i}{d\phi} \right)^2 \right\}, \\ \frac{dT_i}{d\theta} \frac{d^2}{d\theta d\phi} (\operatorname{cosec} \theta T_i) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{dT_i}{d\phi} \left(\frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{d^2 T_i}{d\phi^2} + \cot \theta \frac{dT_i}{d\theta} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} \left\{ \left(\frac{dT_i}{d\theta} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{dT_i}{d\phi} \right)^2 \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

§6. The first problem I propose to treat is as follows: The isotropic elastic solid of density ρ , the equation to whose surface is

$$r = a(1 + \varepsilon P_2), \quad (26)$$

where P_2 is the second zonal harmonic and ε is a constant, positive or negative, whose square is negligible, is acted on by bodily forces derived from the potential

$$r^i V_i P_i,$$

and by the following surface forces:

$$\begin{aligned} & R_i P_i \text{ along } r, \\ & \Theta_i \frac{dP_i}{d\theta} \quad \text{ " } \theta, \\ & -\Phi_i \frac{dP_i}{d\phi} \quad \text{ " } \phi, \end{aligned}$$

where P_i is the i^{th} zonal harmonic and V_i , R_i , Θ_i , Φ_i given finite constant quantities; to determine the elastic displacements, assuming equilibrium to exist.

The surface may be taken to represent any prolate or oblate spheroid of small eccentricity, and since i may have any positive integral value, the forces may be supposed to represent any continuous system symmetrical round the axis of the spheroid.

§7. Since terms in ε^2 are neglected, the direction cosines of the normal at a point on the surface relative to the fundamental directions r , θ , ϕ at the point are respectively 1 , $-\varepsilon \frac{dP_2}{d\theta}$ and 0 . Also the surface value of any function $f(r)$ occurring in the solution is given by

$$f(r) = f(a) + \varepsilon P_2 a \frac{df(a)}{da}.$$

In the first surface condition in the value of \widehat{rr} we write $a + \varepsilon a P_2$ for r , but in $\widehat{r\theta}$ which has already ε in its coefficient we simply write a for r . Noticing such little points, and employing Σ to denote summation with respect to i , we may write the surface conditions, in the general case of a series of zonal harmonics, in the form

$$\Sigma \left(1 + \varepsilon P_2 a \frac{d}{da} \right) \bar{L}_i P_i - \varepsilon \frac{dP_2}{d\theta} \Sigma \bar{M}_i \frac{dP_i}{d\theta} = \Sigma R_i P_i, \quad (27)$$

$$\Sigma \left(1 + \varepsilon P_2 a \frac{d}{da} \right) \bar{M}_i \frac{dP_i}{d\theta} - \varepsilon \frac{dP_2}{d\theta} \Sigma \left(\bar{N}_i P_i + \bar{O}_i \frac{d^2 P_i}{d\theta^2} \right) = \Sigma \Theta_i \frac{dP_i}{d\theta}, \quad (28)$$

$$\begin{aligned} -\Sigma (i-1) a^{i-1} W_i \frac{dP_i}{d\theta} + \varepsilon \frac{dP_2}{d\theta} \Sigma a^{i-1} W_i \left\{ i(i+1) P_i + 2 \frac{d^2 P_i}{d\theta^2} \right\} \\ = -\frac{1}{n} \Sigma \Phi_i \frac{dP_i}{d\phi}, \end{aligned} \quad (29)$$

where \bar{L}_i , etc., are given by (24).

In such a differential coefficient as $\frac{d\bar{L}_i}{da}$ in (27) we are to treat Y_i and Z_i as absolute constants, and after differentiation—since ε occurs as a coefficient—we

are to substitute the values they would have in a perfect sphere, i. e. the first approximations as obtained by putting $\varepsilon = 0$ in the surface equations.

§8. The solution of the above equations, in which Y_i , Z_i , W_i represent the unknowns, presents no great difficulty when we have expressed:

In the first surface equation $P_2 P_i$ and $\frac{dP_2}{d\theta} \frac{dP_i}{d\theta}$ as a finite series of surface harmonics.

In the second surface equation $P_2 \frac{dP_i}{d\theta}$, $P_i \frac{dP_2}{d\theta}$ and $\frac{dP_2}{d\theta} \frac{d^2 P_i}{d\theta^2}$ as a finite series of terms of the form $\frac{dP_j}{d\theta}$.

In the third surface equation $P_i \frac{dP_2}{d\theta}$ and $\frac{dP_2}{d\theta} \frac{d^2 P_i}{d\theta^2}$ as a finite series of terms of the form $\frac{dP_j}{d\theta}$.

These several objects are attained in the following formulae:

$$P_2 P_i = \frac{3(i-1)i}{2(2i-1)(2i+1)} P_{i-2} + \frac{i(i+1)}{(2i-1)(2i+3)} P_i + \frac{3(i+1)(i+2)}{2(2i+1)(2i+3)} P_{i+2}, \quad (30)$$

$$\frac{dP_2}{d\theta} \frac{dP_i}{d\theta} = \frac{3i(i+1)}{(2i-1)(2i+1)(2i+3)} \{ (i-1)(2i+3) P_{i-2} + (2i+1) P_i - (i+2)(2i-1) P_{i+2} \}, \quad (31)$$

$$P_2 \frac{dP_i}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \left[\frac{3i(i+1)}{2(2i-1)(2i+1)} P_{i-2} + \frac{i^2+i-3}{(2i-1)(2i+3)} P_i + \frac{3i(i+1)}{2(2i+1)(2i+3)} P_{i+2} \right], \quad (32)$$

$$P_i \frac{dP_2}{d\theta} = 3 \frac{d}{d\theta} \left[\frac{-i}{(2i-1)(2i+1)} P_{i-2} + \frac{1}{(2i-1)(2i+3)} P_i + \frac{i+1}{(2i+1)(2i+3)} P_{i+2} \right], \quad (33)$$

$$\frac{dP_2}{d\theta} \frac{d^2 P_i}{d\theta^2} = 3 \frac{d}{d\theta} \left[\frac{i(i+1)^2}{(2i-1)(2i+1)} P_{i-2} + \frac{i^2+i-3}{(2i-1)(2i+3)} P_i - \frac{i^2(i+1)}{(2i+1)(2i+3)} P_{i+2} \right]. \quad (34)$$

In (32) and (33) we may obviously use $d\mu$ for $d\theta$, where $\mu \equiv \cos \theta$, on the two sides of the equation.

§9. The above results were obtained originally by means of the relations existing between consecutive harmonics, use being made in (34) of the differential equation satisfied by harmonics. The results (30) and (32) may, however, be regarded as particular cases of a formula due to Professor C. Niven.* Employing Heine's notation

$$P_m^n(\mu) = \frac{|n-m|}{1.3 \dots (2n-1)} (\mu^2 - 1)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n(\mu)}{d\mu^m},$$

he found

$$\mu^2 P_m^n = P_m^{n+2} + \frac{2n^2 + 2n - 2m^2 - 1}{(2n-1)(2n+3)} P_m^n + \frac{(n^2 - m^2)\{(n-1)^2 - m^2\}}{(4n^2 - 1)\{4(n-1)^2 - 1\}} P_m^{n-2}.$$

Now

$$\mu^2 = \frac{1}{2}(2P_2 + 1),$$

so that we may rewrite this in the form

$$P_2 \frac{d^m P_n}{d\mu^m} = \frac{1}{2} \frac{(n-m+1)(n-m+2)}{(2n+1)(2n+3)} \frac{d^m P_{n+2}}{d\mu^m} + \frac{n(n+1) - 3m^2}{(2n-1)(2n+3)} \frac{d^m P_n}{d\mu^m} + \frac{1}{2} \frac{(n+m)(n+m-1)}{(2n-1)(2n+1)} \frac{d^m P_{n-2}}{d\mu^m}.$$

Writing i for n we deduce (30) by putting $m=0$, and (32) by putting $m=1$.

§10. For facilitating the determination of the arbitrary constants use will also be made of the result that if we have an equation with a *finite* number of terms of the form

$$\Sigma A_i \frac{dP_i}{d\theta} = \Sigma B_i \frac{dP_i}{d\theta}, \quad (35)$$

then

$$B_i = A_i, \text{ etc.}$$

The result is obviously true in its present form if it be true when $d\theta$ is replaced by $d\mu$ where $\mu = \cos \theta$. That it is true in the latter form may easily be proved rigidly by means of the substitution†

$$\frac{dP_i}{d\mu} = (2i-1) P_{i-1} + (2i-5) P_{i-3} + \dots$$

* Phil. Trans. for 1880, p. 124.

† Todhunter's "Functions of Laplace," p. 22.

§11. In each of the identities (30)–(34) there occur on the right only three surface harmonics, P_{i-2} , P_i and P_{i+2} . Thus supposing for simplicity there to be only one surface harmonic P_i in the applied surface forces on the right of equations (27), (28) and (29), we require on the left of these equations in addition to the *principal* terms involving P_i (which would alone occur in a perfect sphere) *subsidiary* terms involving P_i along with the two other harmonics P_{i-2} and P_{i+2} . The arbitrary constants Y_{i-2} , Y_{i+2} with suffixes $i-2$ and $i+2$ are only of order ε , so that in the surface values of the subsidiary terms we may suppose $r = a$ simply.

Again in (27), since \bar{M}_i occurs multiplied by ε , we may employ the first approximation given by (28), viz.

$$\bar{M}_i = \Theta_i.$$

Thus supposing only one surface harmonic on the right of (27), we may by means of (30) and (31) write that equation as

$$\begin{aligned} & (A_{i-2}Y_{i-2} + B_{i-2}Z_{i-2})P_{i-2} + (L_iV_i + A_iY_i + B_iZ_i)P_i \\ & + (A_{i+2}Y_{i+2} + B_{i+2}Z_{i+2})P_{i+2} + \varepsilon a \frac{d}{da} (L_iV_i + A_iY_i + B_iZ_i) \left\{ \frac{3(i-1)i}{2(2i-1)(2i+1)} P_{i-2} \right. \\ & + \frac{i(i+1)}{(2i-1)(2i+3)} P_i + \frac{3(i+1)(i+2)}{2(2i+1)(2i+3)} P_{i+2} \left. \right\} \\ & - 3\varepsilon\Theta_i \left\{ \frac{(i-1)i(i+1)}{(2i-1)(2i+1)} P_{i-2} + \frac{i(i+1)}{(2i-1)(2i+3)} P_i - \frac{i(i+1)(i+2)}{(2i+1)(2i+3)} P_{i+2} \right\} \\ & = R_i P_i \dots \end{aligned} \quad (36)$$

Equating coefficients of the same zonals on the two sides of (36) we get

$$A_{i-2}Y_{i-2} + B_{i-2}Z_{i-2} = \frac{-3(i-1)i}{2(2i-1)(2i+1)} \varepsilon a \frac{d\bar{L}_i}{da} + \frac{3(i-1)i(i+1)}{(2i-1)(2i+1)} \varepsilon\Theta_i, \quad (37)$$

$$A_iY_i + B_iZ_i = R_i - L_iV_i - \frac{i(i+1)}{(2i-1)(2i+3)} \varepsilon a \frac{d\bar{L}_i}{da} + \frac{3i(i+1)}{(2i-1)(2i+3)} \varepsilon\Theta_i, \quad (38)$$

$$A_{i+2}Y_{i+2} + B_{i+2}Z_{i+2} = \frac{-3(i+1)(i+2)}{2(2i+1)(2i+3)} \varepsilon a \frac{d\bar{L}_i}{da} - \frac{3i(i+1)(i+2)}{(2i+1)(2i+3)} \varepsilon\Theta_i. \quad (39)$$

In the second surface condition (28) we make use of (32), (33) and (34), and then, equating the coefficients of $\frac{dP_{i-2}}{d\theta}$, $\frac{dP_i}{d\theta}$ and $\frac{dP_{i+2}}{d\theta}$ respectively on the

two sides of the equation, we easily deduce the three equations

$$C_{i-2}Y_{i-2} + D_{i-2}Z_{i-2} = \frac{3\epsilon i}{(2i-1)(2i+1)} \left\{ -\frac{1}{2}(i+1)a \frac{d\bar{M}_i}{da} - \bar{N}_i + (i+1)^2 \bar{O}_i \right\}, \quad (40)$$

$$C_i Y_i + D_i Z_i = \Theta_i - M_i V_i + \frac{\epsilon}{(2i-1)(2i+3)} \left\{ -(i^2+i-3)a \frac{d\bar{M}_i}{da} + 3\bar{N}_i + 3(i^2+i-3)\bar{O}_i \right\}, \quad (41)$$

$$C_{i+2}Y_{i+2} + D_{i+2}Z_{i+2} = \frac{3\epsilon(i+1)}{(2i+1)(2i+3)} \left\{ -\frac{1}{2}ia \frac{d\bar{M}_i}{da} + \bar{N}_i - i^2 \bar{O}_i \right\}. \quad (42)$$

The six equations (37)–(42) suffice to determine the six unknowns Y_{i-2} , Z_{i-2} , Y_i , Z_i , Y_{i+2} , Z_{i+2} . Before entering, however, on this determination we will consider the third surface condition (29).

§12. Supposing only the one harmonic P_i in the applied surface forces we require in the third surface condition, as in the first two, subsidiary terms in P_{i-2} , P_i and P_{i+2} alone. Making use of (33) and (34) and equating the coefficients of $\frac{dP_{i-2}}{d\theta}$, $\frac{dP_i}{d\theta}$ and $\frac{dP_{i+2}}{d\theta}$ respectively on the two sides of the equation, we find

$$(i-3)a^{i-3}W_{i-2} = 3\epsilon a^{i-1}W_i i(i+1)(i+2) \div \{(2i-1)(2i+1)\}, \quad (43)$$

$$(i-1)a^{i-1}W_i = \frac{1}{n}\Phi_i + 9\epsilon a^{i-1}W_i(i-1)(i+2) \div \{(2i-1)(2i+3)\}, \quad (44)$$

$$(i+1)a^{i+1}W_{i+2} = -3\epsilon a^{i-1}W_i(i-1)i(i+1) \div \{(2i+1)(2i+3)\}. \quad (45)$$

From (44), neglecting terms in ϵ^2 , we find

$$W_i = \frac{a^{-i+1}}{i-1} \frac{\Phi_i}{n} \left\{ 1 + \frac{9\epsilon(i+2)}{(2i-1)(2i+3)} \right\}, \quad (46)$$

and substituting the principal term in the value of W_i in (43) and (45) we get

$$W_{i-2} = \frac{\Phi_i}{n} \frac{3\epsilon a^{-i+3}i(i+1)(i+2)}{(i-3)(i-1)(2i-1)(2i+1)}, \quad (47)$$

$$W_{i+2} = -\frac{\Phi_i}{n} \frac{3\epsilon a^{-i-1}i}{(2i+1)(2i+3)}. \quad (48)$$

This determines W_{i-2} , W_i and W_{i+2} in terms of the surface force perpendicular to the meridian alone; or there still exists in the present case of symmetry round an axis that independence of the transverse strains and stresses which, as stated in §3, exists in the perfect sphere.

As shown by (46), W_i becomes infinite if $i = 1$, while by (47) W_{i-2} becomes infinite if i be either 1 or 3. The explanation is that in these cases the applied forces are not in equilibrium, so that in addition to elastic displacements rigid body displacements and motion would ensue, and to obtain a complete knowledge of what happens it would be necessary to have recourse to dynamical principles.

§13. We now return to the six equations (37)–(42) supplied by the first and second surface conditions. The quantities \bar{L}_i , etc., on the right of these equations contain Y_i and Z_i . For these, since ε occurs as a factor, we are to substitute the first approximations given by the equations

$$\begin{aligned} A_i Y_i + B_i Z_i &= R_i - L_i V_i, \\ C_i Y_i + D_i Z_i &= \Theta_i - M_i V_i, \end{aligned}$$

which occur in the case of the perfect sphere.

Now if for shortness

$$(2i^2 + 4i + 3)m - (2i + 1)n \equiv \Pi_i, \quad (49)$$

then

$$A_i D_i - B_i C_i = 2n(i-1)a^{2i-2}\Pi_i \div \{i(i+1)(2i+3)\}, \quad (50)$$

and the first approximations are

$$Y_i = (i+1) \left[(2i+3)a^{-i}(R_i - i\Theta_i) + \left\{ (2i+3)m - n \right\} \frac{\rho}{m+n} V_i \right] \div \Pi_i, \quad (51)$$

$$\begin{aligned} Z_i = \frac{1}{2n} \frac{i}{i-1} \left[\{i(i+2)m - n\} a^{-i+2} R_i - (i+1) \{ (i^2 - i - 3)m + n \} a^{-i+2} \Theta_i \right. \\ \left. + i \{ (i+2)m - n \} \rho a^2 V_i \right] \div \Pi_i. \quad (52) \end{aligned}$$

In the right-hand sides of the equations (37)–(42) we first of all carry out differentiations $\frac{d\bar{L}_i}{da}$, etc., as if Y_i and Z_i were constants, and thereafter substitute for these two quantities from (51) and (52). The right-hand sides then contain only known quantities, and we have 3 pairs of simple equations to determine Y_{i-2} and Z_{i-2} , Y_{i+2} and Z_{i+2} , and the secondary terms of Y_i and Z_i . These secondary terms we shall now denote by δY_i and δZ_i . Thus the complete

values of Y_i and Z_i as given by (38) and (41) are the sums of the principal terms given in (51) and (52) and the secondary terms to be deduced from

$$A_i \delta Y_i + B_i \delta Z_i = \frac{i(i+1)\varepsilon}{(2i-1)(2i+3)} \left\{ -a \frac{d\bar{L}_i}{da} + 3\Theta_i \right\}, \quad (53)$$

$$C_i \delta Y_i + D_i \delta Z_i = \frac{\varepsilon}{(2i-1)(2i+3)} \left\{ -(i^2+i-3)a \frac{d\bar{M}_i}{da} + 3\bar{N}_i + 3(i^2+i-3)\bar{O}_i \right\}. \quad (54)$$

In our further discussion of the problem we shall, except when otherwise stated, restrict Y_i and Z_i to mean the first approximations (51) and (52) alone. Thus the Y_i, Z_i occurring in (1)–(4) are equal respectively to $Y_i + \delta Y_i$ and $Z_i + \delta Z_i$, where Y_i and Z_i now denote the first approximations (51) and (52), while $\delta Y_i, \delta Z_i$ are given by (53) and (54). No such change is required in the meanings to be attached to the other Y and Z constants because there are no principal terms in P_{i-2} or P_{i+2} . If we supposed several harmonics to occur in the applied forces, use might be made of the notation $\delta_i Y_i$ to denote the subsidiary term in the complete value of Y_i arising from the presence of P_i in the applied forces. For instance, we should then regard (37) and (40) as determining $\delta_i Y_{i-2}$ and $\delta_i Z_{i-2}$. The complete value of a Y or Z constant in such a case would be the sum of the first approximation—i. e. the value for a perfect sphere—and of the several subsidiary terms.

§14. From (38) and (41) we see that in the right-hand sides of (37), (39), (40), (42), (53) and (54), since ε is a factor, we may substitute R_i for \bar{L}_i and Θ_i for \bar{M}_i . From (6)–(9) and (14)–(17) we see that A_i, C_i, L_i, M_i, N_i and O_i all contain a^i , while B_i and D_i contain a^{i-2} , also that

$$B_i = iD_i. \quad (55)$$

Thus

$$a \frac{d\bar{L}_i}{da} = i(R_i - 2D_i Z_i), \quad (56)$$

$$a \frac{d\bar{M}_i}{da} = i\Theta_i - 2D_i Z_i. \quad (57)$$

By means of (6)–(13), we easily find

$$E_i = \frac{1}{i-1} \{ (i^2+i-1) A_i - i(i-2)(i+1) C_i \}, \quad (58)$$

$$F_i = \frac{1}{i-1} B_i, \quad (59)$$

$$G_i = \frac{1}{i-1} \{ A_i - (i-3) C_i \}, \quad (60)$$

$$H_i = \frac{1}{i-1} D_i. \quad (61)$$

Thus

$$\begin{aligned} E_i Y_i + F_i Z_i &= \frac{1}{i-1} \{ (i^2 + i - 1)(A_i Y_i + B_i Z_i) \\ &\quad - (i-2)i(i+1)(C_i Y_i + D_i Z_i) \} - \frac{2i}{i-1} B_i Z_i \\ &= \frac{1}{i-1} \{ (i^2 + i - 1)(R_i - L_i V_i) - (i-2)i(i+1)(\Theta_i - M_i V_i) \} - \frac{2i^2}{i-1} D_i Z_i. \end{aligned} \quad (62)$$

Similarly

$$G_i Y_i + H_i Z_i = \frac{1}{i-1} \{ R_i - L_i V_i - (i-3)(\Theta_i - M_i V_i) - 2D_i Z_i \}. \quad (63)$$

Referring to (24), we easily find

$$\bar{N}_i = \frac{1}{i-1} \{ i^2 \rho a^i V_i + (i^2 + i - 1) R_i - (i-2)i(i+1) \Theta_i - 2i^2 D_i Z_i \}, \quad (64)$$

$$\bar{O}_i = \frac{1}{i-1} \{ \rho a^i V_i + R_i - (i-3) \Theta_i - 2D_i Z_i \}, \quad (65)$$

and, as already pointed out,

$$\bar{L}_i = R_i, \quad (66)$$

$$\bar{M}_i = \Theta_i. \quad (67)$$

§15. Having regard to (56), (57), (64), (65), (66) and (67), we see that Y_i has been got rid of on the right-hand sides of (37), (39), (40), (42), (53) and (54). The equations thus simplified are

$$A_{i-2} Y_{i-2} + B_{i-2} Z_{i-2} = \frac{3\epsilon i(i-1)}{(2i-1)(2i+1)} \{ -\frac{1}{2} i R_i + (i+1) \Theta_i + i D_i Z_i \}, \quad (68)$$

$$\begin{aligned} C_{i-2} Y_{i-2} + D_{i-2} Z_{i-2} &= \frac{3\epsilon i}{(i-1)(2i-1)(2i+1)} \{ (2i+1) \rho a^i V_i + (i+2) R_i \\ &\quad - \frac{1}{2} (i-3)(i+1)(i+2) \Theta_i + (i^2 - 4i - 3) D_i Z_i \}, \end{aligned} \quad (69)$$

$$A_i \delta Y_i + B_i \delta Z_i = \frac{\epsilon i(i+1)}{(2i-1)(2i+3)} \{ -i R_i + 3 \Theta_i + 2i D_i Z_i \}, \quad (70)$$

$$\begin{aligned} C_i \delta Y_i + D_i \delta Z_i &= \frac{\epsilon}{(2i-1)(2i+3)} \{ 3(2i+3) \rho a^i V_i + 6(i+2) R_i \\ &\quad - (i^3 + 7i^2 - 6i - 27) \Theta_i + 2(i^2 - 5i - 12) D_i Z_i \}, \end{aligned} \quad (71)$$

$$A_{i+2} Y_{i+2} + B_{i+2} Z_{i+2} = -\frac{3\epsilon i(i+1)(i+2)}{2(2i+1)(2i+3)} (R_i + 2\Theta_i - 2D_i Z_i), \quad (72)$$

$$C_{i+2} Y_{i+2} + D_{i+2} Z_{i+2} = \frac{3\epsilon(i+1)}{2(2i+1)(2i+3)} \{ 2R_i - i(i+4) \Theta_i + 2i D_i Z_i \}. \quad (73)$$

In these equations D_i is given by (9) and Z_i by (52), while A_{i-2} , A_{i+2} , etc., are obtained by writing $i-2$ or $i+2$, as the case may be, for i in the general formulæ (6), etc.

§16. The algebraical work of solving the equations is not of interest, so it will suffice to state the results. Π_i , it will be remembered, is given by (49), while Π_{i-2} , Π_{i+2} are the corresponding quantities when $i-2$ and $i+2$ are written for i . The results are

$$Y_{i-2} = \frac{3\epsilon a^{-i+2}i}{(2i+1)\Pi_{i-2}\Pi_i} [\{(2i^3-4i^2+5i+6)m-(i+2)n\}\rho a^i V_i \\ - \frac{1}{2}\{(2i^5-4i^4-3i^3+16i^2-5i-24)m-(2i^4+i^3-6i^2-7i+4)n\}R_i \\ + \frac{1}{2}(i+1)\{(2i^5-6i^4-i^3+21i^2-4i+6)m \\ - (2i^4-i^3-9i^2+12i+2)n\}\Theta_i], \quad (74)$$

$$Z_{i-2} = \frac{3\epsilon a^{-i+4}(i-2)i}{2(i-3)(2i-1)(2i+1)n\Pi_{i-2}\Pi_i} [\{(2i^5+4i^4-11i^3+20i^2+3i-9)m^3 \\ - i(4i^3+i^2+i+6)mn+(2i+1)(i^2-i+1)n^2\}\rho a^i V_i \\ - \frac{1}{2}\{(2i^6-10i^5+3i^4+31i^3-50i^2-30i+36)m^3 \\ - (2i^5-3i^4-21i^3+13i^2+3i-18)mn \\ + (2i+1)(i^2-5i+2)n^2\}R_i \\ + \frac{1}{2}(i+1)\{i(2i^5-16i^4+27i^3+40i^2-56i+21)m^3 \\ - (2i^5-13i^4+16i^3+47i^2-22i-6)mn \\ - (2i+1)(i^2-5i+2)n^2\}\Theta_i], \quad (75)$$

$$\delta Y_i = \frac{\epsilon a^{-i}(i+1)}{(2i-1)(\Pi_i)^2} [3\{(2i^3-2i-9)m+3n\}\rho a^i V_i \\ - \{(2i^4+6i^3+7i^2+21i+36)m-(2i^3+15i^2+19i-12)n\}R_i \\ + i\{(2i^4+6i^3+i^2+9i+27)m-(2i^3+15i^2+13i-15)n\}\Theta_i], \quad (76)$$

$$\delta Z_i = \frac{\epsilon a^{-i+2}i(i+1)}{2(i-1)(2i-1)(2i+3)n(\Pi_i)^3} [\{(4i^5+22i^4+10i^3-27i^2+45i+81)m^3 \\ - (8i^4+18i^3-5i^2+15i+54)mn+(4i^3+2i^2+9)n^2\}\rho a^i V_i \\ - \{(2i^6+4i^5-5i^4+2i^3+6i^2-90i-108)m^3 \\ - i(2i^4+15i^3-2i^2-75i-66)mn \\ + (2i^3-15i^2-20i+12)n^2\}R_i \\ + \{(2i^7-19i^5+12i^4+107i^3+78i^2+9i+27)m^3 \\ - (2i^6+7i^5-12i^4-22i^3+61i^2+90i+18)mn \\ - (2i^4+11i^3-5i^2-29i-3)n^2\}\Theta_i], \quad (77)$$

$$Y_{i+2} = \frac{-3\epsilon a^{-i-2}(i+1)(i+2)^2(i+3)(2i+7)}{2(2i+1)(2i+3)\Pi_{i+2}} (R_i - i\Theta_i), \quad (78)$$

$$\begin{aligned}
Z_{i+2} = & \frac{3\epsilon a^{-4}(i+2)}{4(2i+1)(2i+3)n\Pi_i\Pi_{i+2}} [2i^2\{(i+2)m-n\}\Pi_{i+2}\rho a^i V_i \\
& - \{(2i^6 + 20i^5 + 75i^4 + 136i^3 + 136i^2 + 72i - 18)m^3 \\
& - (2i^5 + 19i^4 + 56i^3 + 43i^2 - 42i - 24)mn \\
& + (2i^3 - 3i^2 - 22i - 6)n^3\} R_i \\
& + i\{(2i^6 + 16i^5 + 43i^4 + 44i^3 + 24i^2 + 15i - 18)m^3 \\
& - (2i^5 + 11i^4 + 12i^3 - 33i^2 - 76i - 24)mn \\
& - (2i^3 + 15i^2 + 27i + 6)n^3\} \Theta_i].
\end{aligned} \tag{79}$$

§17. Referring to (2), (3) and (4), we are now in possession of the complete solution of the problem. The i^{th} surface harmonic involved is P_i . Of the constant coefficients Y_i is the sum of (51) and (76), Z_i the sum of (52) and (77), while W_i is given by (46). The $(i-2)^{\text{th}}$ harmonic is P_{i-2} , and of the constant coefficients Y_{i-2} is given by (74), Z_{i-2} by (75) and W_{i-2} by (47). The $(i+2)^{\text{th}}$ harmonic is P_{i+2} , and Y_{i+2} is given by (78), Z_{i+2} by (79) and W_{i+2} by (48). The potential of the bodily forces is

$$r^i V_i P_i,$$

so that V_i is given, while V_{i-2} and V_{i+2} are zero.

After this explanation it seems unnecessary to record the values of the displacements explicitly.

The expressions for the arbitrary constants are long; but in any particular case, as i and m/n are then given numerical quantities, they become easily manageable. It must also be borne in mind that we have here the solution of a great variety of problems, and that in most actual cases only one or two of the types of applied forces will exist.

§18. The previous method is equally applicable to the case when the applied forces involve P_2 only while the equation to the surface is

$$r = a(1 + \Sigma \epsilon_i P_i),$$

where the squares and products of the constants represented by ϵ_i are negligible.

For brevity we may suppose but the one harmonic P_i in the equation to the surface.

Taking for instance the first and second surface conditions, we have for these

$$\widehat{rr} - \epsilon_i \frac{dP_i}{d\theta} \widehat{r\theta} = R_2 P_2,$$

$$\widehat{r\theta} - \epsilon_i \frac{dP_i}{d\theta} \widehat{\theta\theta} = \Theta_2 \frac{dP_2}{d\theta},$$

where R_2 and Θ_2 are constants.

In the first surface condition we have principal terms in P_2 and subsidiary from $P_2 P_i$ and $\frac{dP_i}{d\theta} \frac{dP_2}{d\theta}$, i. e. in P_{i-2} , P_i and P_{i+2} . In the second surface condition the principal terms are in $\frac{dP_2}{d\theta}$; the subsidiary come from

$$P_2 \frac{dP_i}{d\theta}, P_i \frac{dP_2}{d\theta} \text{ and } \frac{dP_i}{d\theta} \frac{d^2 P_2}{d\theta^2}.$$

But

$$\frac{dP_i}{d\theta} \frac{d^2 P_2}{d\theta^2} = \frac{dP_i}{d\theta} - 4P_2 \frac{dP_i}{d\theta},$$

and so using the results (32) and (33), we see the subsidiary terms are in $\frac{dP_{i-2}}{d\theta}$, $\frac{dP_i}{d\theta}$, $\frac{dP_{i+2}}{d\theta}$.

An examination of the third surface condition leads to similar results. The problem is thus obviously soluble in precisely the same way as the preceding.

§19. The method may be applied to most, if not all, cases where over a surface

$$r = a(1 + \varepsilon_j P_j),$$

where ε_j is negligible, there act along r , θ , ϕ respectively

$$R_i P_i, \Theta_i \frac{dP_i}{d\theta}, -\Phi_i \frac{dP_i}{d\theta},$$

where R_i , Θ_i , Φ_i represent constants.

Supposing $P_i P_j$ expressed in terms of P_{i+j} , P_{i+j-2} , etc., $P_i \frac{dP_j}{d\theta}$ in terms of $\frac{d}{d\theta} P_{i+j}$, etc., and so on, there is no theoretical difficulty in applying the solution so as to deduce the values of the subsidiary constants represented by $\delta_j Y_i$, denoting the change in Y_i due to the presence of P_j in the equation to the surface. As i and j increase, however, the complexity of the solution rapidly increases. For instance, $P_4 P_i$ when expanded contains five harmonics, viz. P_{i-4} , P_{i-2} , P_i , P_{i+2} and P_{i+4} .

SECTION II.

§20. In our first section, surface forces were supposed resolved along r and θ . It seems, however, likely to be more convenient in some cases to have them resolved along the normal and in the tangent plane. As in the final

problem of Section I we shall confine our attention to a spheroid of very small eccentricity,

$$r = a(1 + \varepsilon P_2),$$

under forces symmetrical about the axis of figure.

If N and T represent the normal and tangential forces—the latter being supposed to act in the meridian, as the component perpendicular to the meridian would be treated as in Section I—then we are given

$$N = \Sigma N_i P_i, \quad (1)$$

$$T = \Sigma T_i \frac{dP_i}{d\theta}. \quad (2)$$

Taking the i^{th} harmonic as a type, we may regard these forces as equivalent to forces R , Θ along r and θ , where

$$R = N_i P_i + \varepsilon \frac{dP_2}{d\theta} T_i \frac{dP_i}{d\theta}, \quad (3)$$

$$\Theta = T_i \frac{dP_i}{d\theta} - \varepsilon \frac{dP_2}{d\theta} N_i P_i, \quad (4)$$

ε^2 being neglected as before.

Referring to (31) and (33), Section I, we can express $\frac{dP_2}{d\theta} \frac{dP_i}{d\theta}$ in terms of P_{i-2} , P_i and P_{i+2} , and can express $P_i \frac{dP_2}{d\theta}$ in terms of the differentials of the same three harmonics.

Thus the first and second surface conditions may be written

$$\begin{aligned} \widehat{rr} - \varepsilon \frac{dP_2}{d\theta} \widehat{r\theta} = N_i P_i + 3\varepsilon T_i i(i+1) \left\{ \frac{i-1}{(2i-1)(2i+1)} P_{i-2} \right. \\ \left. + \frac{1}{(2i-1)(2i+3)} P_i - \frac{i+2}{(2i+1)(2i+3)} P_{i+2} \right\}, \quad (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widehat{r\theta} - \varepsilon \frac{dP_2}{d\theta} \widehat{\theta\theta} = T_i \frac{dP_i}{d\theta} - 3\varepsilon N_i \frac{d}{d\theta} \left\{ -\frac{i}{(2i-1)(2i+1)} P_{i-2} \right. \\ \left. + \frac{1}{(2i-1)(2i+3)} P_i + \frac{i+1}{(2i+1)(2i+3)} P_{i+2} \right\}. \quad (6) \end{aligned}$$

It is obvious that we require only the terms depending on P_{i-2} , P_i and P_{i+2} in the general solution (2), (3), (4) of Section I. The method of procedure is also obviously identical with that of Section I, so that it will suffice to record the values of Y_{i-2} , Z_{i-2} , δY_i , δZ_i , Y_{i+2} and Z_{i+2} . The first approximations (51)

and (52), Section I, for Y_i and Z_i are, it is needless to say, applicable in the present case. With the notation (49) of Section I we now get

$$Y_{i-2} = \frac{3\epsilon a^{-i+2}i}{2(2i+1)\Pi_{i-2}\Pi_i} \left[-\{(2i^5 - 7i^3 + 6i^2 - 7i - 12)m \right. \\ \left. - (2i^4 + 5i^3 - 16i^2 - 5i + 8)n\} N_i \right. \\ \left. + (i+1)\{(2i^5 - 2i^4 - i^3 + 15i^2 - 8i + 12)m \right. \\ \left. - (2i^4 + 3i^3 - 15i^2 + 12i + 4)n\} T_i \right], \quad (7)$$

$$Z_{i-2} = \frac{3\epsilon a^{-i+4}(i-2)i}{4(i-3)(2i-1)(2i+1)\Pi_{i-2}\Pi_i} \times \\ \left[-\{(2i^6 - 6i^5 - 13i^4 + 21i^3 - 34i^2 - 6i + 18)m^2 \right. \\ \left. - (2i^5 + i^4 - 47i^3 + 29i^2 + 9i - 18)mn + (2i+1)(i^3 - 7i + 4)n^2\} N_i \right. \\ \left. + (i+1)\{i(2i^5 - 12i^4 + 23i^3 + 30i^2 - 58i + 33)m^2 \right. \\ \left. - (2i^5 - 9i^4 + 10i^3 + 53i^2 - 20i - 12)mn \right. \\ \left. - (2i+1)(i^3 - 7i + 4)n^2\} T_i \right], \quad (8)$$

$$\delta Y_i = \frac{\epsilon a^{-i}(i+1)}{(2i-1)(\Pi_i)^3} \left[-\{(2i^4 + 6i^3 + i^2 + 9i + 27)m - (2i^3 + 15i^2 + 13i - 15)n\} N_i \right. \\ \left. + \{(2i^5 + 6i^4 + 7i^3 + 27i^2 + 48i + 9)m \right. \\ \left. - (2i^4 + 15i^3 + 19i^2 - 6i + 3)n\} T_i \right], \quad (9)$$

$$\delta Z_i = \frac{\epsilon a^{-i+2}i(i+1)}{2n(i-1)(2i-1)(2i+3)(\Pi_i)^3} \times \\ \left[-\{(2i^6 + 4i^5 - 11i^4 - 4i^3 + 27i^2 - 45i - 81)m^2 \right. \\ \left. - (2i^5 + 15i^4 - 8i^3 - 66i^2 - 33i + 18)mn \right. \\ \left. + (2i^3 - 15i^2 - 14i + 15)n^2\} N_i \right. \\ \left. + \{(2i^7 - 13i^5 + 36i^4 + 140i^3 + 96i^2 + 9i + 27)m^2 \right. \\ \left. - (2i^6 + 7i^5 - 6i^4 - i^3 + 79i^2 + 99i + 18)mn \right. \\ \left. - (2i^4 + 11i^3 - 11i^2 - 32i - 3)n^2\} T_i \right], \quad (10)$$

$$Y_{i+2} = \frac{3\epsilon a^{-i-2}i(i+1)(i+2)(i+3)(2i+7)}{2(2i+1)(2i+3)\Pi_{i+2}} (iT_i - N_i), \quad (11)$$

$$Z_{i+2} = \frac{3\epsilon a^{-i}(i+2)}{4(2i+1)(2i+3)n\Pi_i\Pi_{i+2}} \left[-\{(i+2)(2i^4 + 12i^3 + 19i^2 + 12i + 24)m^2 \right. \\ \left. - (2i^4 + 15i^3 + 34i^2 + 19i - 16)mn + (2i^3 + i - 8)n^2\} N_i \right. \\ \left. + \{(2i^5 + 12i^4 + 3i^3 - 106i^2 - 248i^2 - 233i - 114)m^2 \right. \\ \left. - (2i^5 + 7i^4 - 26i^3 - 145i^2 - 202i - 68)mn \right. \\ \left. - (2i^3 + 19i^2 + 37i + 10)n^2\} T_i \right]. \quad (12)$$

For the values of the displacements we employ as before (2), (3) and (4) of Section I. In these we substitute the above values of Y_{i-2} , Z_{i-2} , Y_{i+2} and Z_{i+2} .

The complete values of Y_i and Z_i are the sums of (9) and (51), Section I, and of (10) and (52), Section I, respectively.

The expressions for the arbitrary constants are, in point of length, pretty much on a par with those of the first problem.

As the opportunity for numerical slips in such problems as the present is considerable, I may mention that after working out the present problem and that of Section I independently, I employed the one solution to verify the other.

§21. Whether the surface forces be resolved along the radius and its perpendicular or along the normal and tangent, the case $i=2$ presents special features. The harmonic P_0 occurring in the subsidiary terms is simply unity, so that all terms containing it are independent of the angular coordinates and answer to pure radial displacements.

The values (75), Section I, and (8) vanish when we write 2 for i , and this they ought to do, for in the general solution there is only one pure radial displacement term, and that answers to Y_0 .

Besides presenting these peculiarities, the case $i=2$ seems of special physical interest. I shall thus briefly consider the problem presented by the nearly spherical spheroid

$$r = a(1 + \varepsilon P_2), \quad (13)$$

acted on by the surface forces

$$\left. \begin{aligned} N_2 P_2 &\equiv \frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta - 1) N_2 \text{ along the normal,} \\ T_2 \frac{dP_2}{d\theta} &\equiv -3 \sin \theta \cos \theta T_2 \quad \text{“ “ meridian tangent,} \\ -\Phi_2 \frac{dP_2}{d\theta} &\equiv 3 \sin \theta \cos \theta \Phi_2 \quad \text{“ “ perpendicular to the meridian.} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

From (7)-(12), and from (51), (52), and (46)-(48) of Section I, we have

$$Y_0 = \frac{18\varepsilon \{-(m-n)N_2 + 4(10m-3n)T_2\}}{5(3m-n)(19m-5n)}, \quad (15)$$

$$Y_2 = \frac{21\varepsilon^{-2}(N_2 - 2T_2)}{19m-5n} + \frac{6\varepsilon\alpha^{-2} \{-(43m-29n)N_2 + (143m-73n)T_2\}}{(19m-5n)^2}, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} Z_2 &= \frac{(8m-n)N_2 + 3(m-n)T_2}{n(19m-5n)} \\ &\quad + \frac{3}{7}\varepsilon \frac{(m-n)(5m-19n)N_2 + (655m^2 - 260mn - 3n^2)T_2}{n(19m-5n)^2}, \end{aligned} \quad (17)$$

$$Y_4 = \frac{132}{7} \frac{\varepsilon\alpha^{-4}(2T_2 - N_2)}{17m-3n}, \quad (18)$$

$$Z_4 = -\frac{4\epsilon a^{-3}}{35} \frac{(504m^3 - 155mn + n^3)N_2 + 2(465m^3 - 271mn + 44n^3)T_2}{n(19m - 5n)(17m - 3n)}, \quad (19)$$

$$W_3 = a^{-1} \frac{\Phi_3}{n} \left(1 + \frac{12}{7} \epsilon\right), \quad (20)$$

$$W_4 = -\frac{6}{35} \epsilon a^{-3} \frac{\Phi_2}{n}. \quad (21)$$

As already stated Z_0 vanishes, and $\frac{dP_0}{d\theta}$ being zero, there is no term in W_0 .

Under Y_2 and Z_2 above are included both principal and subsidiary terms.

Substituting in (2), (3) and (4) of Section I, we find for the displacements:

$$\begin{aligned} u = & -\frac{6}{5} \epsilon r \frac{(m-n)N_2 - 4(10m-3n)T_2}{(3m-n)(19m-5n)} \\ & + \frac{N_2 P_2}{n(19m-5n)} \left[r \left\{ 8m-n + \frac{3}{7} \epsilon \frac{(m-n)(5m-19n)}{19m-5n} \right\} \right. \\ & \left. - 3a^{-2} r^3 (m-n) \left\{ 1 - \frac{2}{7} \epsilon \frac{43m-29n}{19m-5n} \right\} \right] \\ & + \frac{3T_2 P_2}{n(19m-5n)} \left[r \left\{ m-n + \frac{\epsilon}{7} \frac{655m^3 - 260mn - 3n^3}{19m-5n} \right\} \right. \\ & \left. + 2a^{-2} r^3 (m-n) \left\{ 1 - \frac{\epsilon}{7} \frac{143m-73n}{19m-5n} \right\} \right] \\ & - \frac{4\epsilon N_2 P_4}{35n(17m-3n)} \left\{ a^{-2} r^3 \frac{504m^3 - 155mn + n^3}{19m-5n} - 15a^{-4} r^5 (2m-n) \right\} \\ & - \frac{8\epsilon T_2 P_4}{35n(17m-3n)} \left\{ a^{-2} r^3 \frac{465m^3 - 271mn + 44n^3}{19m-5n} + 15a^{-4} r^5 (2m-n) \right\}, \quad (22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v = & \frac{1}{2n(19m-5n)} N_2 \frac{dP_2}{d\theta} \left[r \left\{ 8m-n + \frac{3}{7} \epsilon \frac{(m-n)(5m-19n)}{19m-5n} \right\} \right. \\ & \left. - a^{-2} r^3 (5m+2n) \left\{ 1 - \frac{2}{7} \epsilon \frac{43m-29n}{19m-5n} \right\} \right] \\ & + \frac{1}{n(19m-5n)} T_2 \frac{dP_2}{d\theta} \left[\frac{3}{2} r \left\{ m-n + \frac{\epsilon}{7} \frac{655m^3 - 260mn - 3n^3}{19m-5n} \right\} \right. \\ & \left. + a^{-2} r^3 (5m+2n) \left\{ 1 - \frac{\epsilon}{7} \frac{143m-73n}{19m-5n} \right\} \right] \\ & - \frac{\epsilon N_2}{35n(17m-3n)} \frac{dP_4}{d\theta} \left\{ a^{-2} r^3 \frac{504m^3 - 155mn + n^3}{19m-5n} - 6a^{-4} r^5 (7m+2n) \right\} \\ & - \frac{2\epsilon T_2}{35n(17m-3n)} \frac{dP_4}{d\theta} \left\{ a^{-2} r^3 \frac{465m^3 - 271mn + 44n^3}{19m-5n} + 6a^{-4} r^5 (7m+2n) \right\}, \quad (23) \end{aligned}$$

$$w = -a^{-1} \frac{\Phi_3}{n} \frac{d}{d\theta} \left[\left(1 + \frac{12}{7} \epsilon\right) r^3 P_2 - \frac{6}{35} \epsilon a^{-2} r^4 P_4 \right]. \quad (24)$$

§22. An important question as regards the interpretation of such solutions as the present claims a passing notice. The question is whether $r = a(1 + \epsilon P_2)$ is to be regarded as the equation to the surface before or after the application of the forces. I have elsewhere referred to this subject, but shall treat it independently here.

According to the usual definition $\frac{du}{dr}$, taken as a typical strain, is the limit of $\delta u / \delta r$ when δr is indefinitely small, δr being the original length of an element the increment in which, due to applied force, is δu . According to this definition r, θ, ϕ must apparently refer to the original unstrained condition. The surface forces, however, balance the stresses over, not the original surface before strain, but the surface which answers to the equilibrium position. Further, the bodily forces at least, when such exist, must depend on the positions of the elements of the solid in the strained state.

The simplest way of surmounting the difficulty is to have recourse to the fact that the strains must be very small in order that the mathematical theory which assumes them superposable may apply, and the same limitation is also in general imposed by the narrowness of the limits experiment assigns to *linear** elasticity. Thus when regard is had to the limits imposed either by the mathematical or physical necessities, it is in general immaterial whether the dr in $\frac{du}{dr}$ refers to the strained or the unstrained body. On the other hand, the surface conditions must seemingly refer to the actual equilibrium surface and so to the strained state.

The conclusion appears to be that we may in general suppose r, θ, ϕ to refer throughout to the strained condition. In cases where the limits of linear elasticity are unusually great, this conclusion should, however, not be acted on without careful consideration.

In problems such as the present, where the difference between the strained and unstrained surfaces is necessarily very small, it seems probable that the two methods of regarding r, θ, ϕ will lead to results which in general differ only by terms containing the square or a higher power of the strains, quantities whose retention in a mathematical theory that supposes strains superposable is extremely risky.

* See Todhunter and Pearson's "History," footnote, p. 9, Vol. II, Part I.

§23. The preceding remarks will show that the determination of the change in form of the surface requires careful treatment. If r, θ, ϕ refer to the strained position, the radius vector to an element on the surface (13) has been both altered in length and rotated. The increment in length is u , the rotation* v/r , where u, v, r have their surface values. Let us take for surface values

$$u = a \{ A\varepsilon + (B + C\varepsilon) P_2 + D\varepsilon P_4 \},$$

$$v = aE \frac{dP_2}{d\theta} + \text{terms in } \varepsilon,$$

where A, B , etc., may be easily deduced from (22) and (23). As terms containing ε^2 have been neglected in u , the original surface must have had for its equation

$$r' = a' (1 + \varepsilon' P_2 + \varepsilon'' P_4),$$

where

$$\begin{aligned} a(1 + \varepsilon P_2) - a \{ A\varepsilon + (B + C\varepsilon) P_2 + D\varepsilon P_4 \} \\ = a' \left\{ 1 + \frac{\varepsilon'}{2} \left(3 \cos^2 \left(\theta - E \frac{dP_2}{d\theta} \right) - 1 \right) + \varepsilon'' P_4 \right\}, \\ = a' \left\{ 1 + \varepsilon' P_2 - \varepsilon' E \left(\frac{6}{5} + \frac{6}{7} P_2 - \frac{72}{35} P_4 \right) + \varepsilon'' P_4 \right\}. \end{aligned} \quad (25)$$

In obtaining this, since ε' and ε are of the same order, except when one of the two is vanishingly small, we neglect terms in ε and write a for r in the coefficient of ε' . The variation of θ in the term $\varepsilon'' P_4$ is also neglected.

Equating the constant terms and the coefficients of P_2 and P_4 on the two sides of (25), we obtain

$$a(1 - A\varepsilon) = a' \left(1 - \frac{6}{5} E\varepsilon' \right), \quad (26)$$

$$a(\varepsilon - B - C\varepsilon) = a'\varepsilon' \left(1 - \frac{6}{7} E \right), \quad (27)$$

$$-aD\varepsilon = a' \left(\varepsilon'' + \frac{72}{35} E\varepsilon' \right). \quad (28)$$

Referring to (22) and (23), it will be seen that the constants A, B, C, D, E are of the same order of magnitude as the principal strains in the solid. It may thus appear doubtful what reliance can be placed on the subsidiary terms in $A\varepsilon, E\varepsilon'$, etc. The following argument, for instance, might be advanced: "The

*The rotation answering to w may be neglected. ?

mathematical theory assumes strains superposable, which is practically equivalent to neglecting their squares, and the previous work is based on the hypothesis that ϵ^2 is negligible. It would also appear from the above equations that ϵ' is of the same order of magnitude as $\epsilon - B$. Thus whether ϵ be great or small compared to the principal strains, or be of the same order of magnitude, the subsidiary terms, such as $A\epsilon$, $E\epsilon'$, in the above equations are not quantities that can be legitimately retained, and we cannot go beyond the approximations

$$\begin{aligned} a' &= a, \\ \epsilon' &= \epsilon - B. \end{aligned}$$

This argument is not, however, I believe, altogether sound. Our assumption is not that terms in ϵ^2 are, absolutely considered, negligible, but that terms in ϵ^2 may be neglected compared to terms in ϵ when both exist with numerical coefficients of similar magnitudes. What equation (26) shows, for instance, is that

$$1 - a'/a = \epsilon \times \text{quantity of order of a strain,}$$

and we know that while the right-hand side may be small compared to ϵ^2 , yet it is large compared to any term containing ϵ^2 that has been neglected, because any such term would also have for numerical coefficient a quantity of the order of a strain. Thus the relation (26) can probably be relied on except in an exceptional case. With regard to the equation (28) and the secondary terms in (27) I should hesitate to express an opinion without actually carrying the solution as far as terms in ϵ^2 . Considering the extreme smallness of the quantities involved, the labor required for this purpose appears excessive compared to the probable value of the results. For practical purposes the result

$$\epsilon = \epsilon' + B$$

is probably in general sufficiently exact.

If, for convenience, we write

$$(m - n)/2m = \eta,$$

so that η denotes Poisson's ratio, we find, referring to (22) for the value of B , that this becomes

$$\epsilon = \epsilon' + \{(7 - 4\eta)N_s + 18\eta T_s\} \div \{2n(7 + 5\eta)\}. \quad (29)$$

The displacement v in the meridian plane makes, it will be noticed, no appreciable contribution to the change in the form of the surface. This change may thus be deduced from the radial displacement alone.

§24. If in (29) we put $\epsilon' = 0$ we simply obtain the value we should have got for ϵ from the ordinary solution for the perfect sphere, i. e. the solution which treats $r = a$ as the surface over which the forces act.

If in (29)

$$N_2 = 2T_2, \quad (30)$$

i. e. if the surface forces consist of

a normal force $T_2(3 \cos^2 \theta - 1)$, outwards , inwards ,
and a tangential meridian }
force $T_2(3 \sin \theta \cos \theta)$, towards the poles, towards the equator,
then

$$\epsilon = \epsilon' + T_2/n, \quad (31)$$

or the change in eccentricity is independent of the value of Poisson's ratio.

§25. The existence in the value of u , as given by (22), of terms independent of the angular coordinates necessitates the existence of corresponding constant terms in the dilatation. We have in fact

$$\Delta = -\frac{18}{5} \epsilon \frac{(m-n)N_2 - 4(10m-3n)T_2}{(3m-n)(19m-5n)} + \frac{21a^{-2}r^2P_2(N_2-2T_2)}{19m-5n} \\ + \text{terms in } \epsilon P_2 \text{ and } \epsilon P_4. \quad (32)$$

These constant terms are of importance from their influence on the increment $\delta\bar{v}$ in the volume \bar{v} of the spheroid. This is given by

$$\delta\bar{v} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^a \Delta r^2 \sin \theta d\phi d\theta dr.$$

Since terms in ϵ^2 are neglected, the terms in ϵP_2 and ϵP_4 in the value of Δ contribute nothing to $\delta\bar{v}$. After a little reduction we easily find

$$\delta\bar{v}/\bar{v} = \frac{3}{5} \epsilon (N_2 + 2T_2)/k, \quad (33)$$

where

$$k \equiv m - n/3$$

is the bulk modulus.

The existence of a change of volume forms an important distinction between the spheroid and a sphere under surface forces depending on a harmonic.

The formula (33) affords us the means of testing the accuracy of our solution so far as regards the constant terms in Δ and the terms independent of the angular coordinates in u . For the change of volume produced by any system

of surface forces, whose components parallel to rectangular axes are represented by F , G , H per unit of surface S , is given* by

$$3k\delta\bar{v} = \int \int (Fx + Gy + Hz) dS,$$

where the integral is taken over the entire surface. In polar coordinates this becomes

$$3k\delta\bar{v} = \int \int r \text{ (radial component of surface forces) } dS.$$

Now in the present case, terms in ϵ^2 being neglected,

$$r = a(1 + \epsilon P_2),$$

$$dS = a^2(1 + 2\epsilon P_2) \sin \theta d\theta d\phi,$$

$$\text{radial component} = N_2 P_2 + \epsilon T_2 \left(\frac{dP_2}{d\theta} \right)^2.$$

Thus we have

$$3k\delta\bar{v} = \epsilon a^3 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left\{ 3N_2 P_2^2 + T_2 \left(\frac{dP_2}{d\theta} \right)^2 \right\} \sin \theta d\theta d\phi,$$

$$= \epsilon a^3 \pi \left(\frac{12}{5} N_2 + \frac{24}{5} T_2 \right),$$

which agrees with (33).

Combining (29) and (33), we see that in the case of a nearly spherical spheroid whose unstrained surface is a true sphere

$$\begin{array}{l} \text{if } T_2 \text{ vanish} \left\{ \begin{array}{l} \epsilon \text{ is of the same sign as } N_2, \\ \delta\bar{v} \text{ " " " " } \epsilon N_2, \end{array} \right. \\ \text{if } N_2 \text{ vanish} \left\{ \begin{array}{l} \epsilon \text{ " " " " } T_2, \\ \delta\bar{v} \text{ " " " " } \epsilon T_2. \end{array} \right. \end{array}$$

It follows that if either normal forces $N_2 P_2$ alone, or tangential forces $T_2 \frac{dP_2}{d\theta}$ alone, tend to hold an originally spherical body in the shape of a spheroid, the volume of the spheroid is necessarily greater than that of the sphere. If normal and tangential forces coexist, the spheroid may be less in volume than the sphere. This will happen, for instance, if $\eta = 1/4$, while N_2 and T_2 are of opposite signs and so related that

$$\frac{4}{3} > \left(\frac{-T_2}{N_2} \right) > \frac{1}{2}. \quad (34)$$

* See Camb. Phil. Soc. Trans., Vol. XV, p. 318.

SECTION III.

§26. When the surface of the solid, though nearly spherical, is not symmetrical round an axis, or when there is an absence of such symmetry in the applied forces, the same method may still be employed, but the increased number of subsidiary terms enhances the complexity. I shall treat only one such class of problem here. Before entering on it the notation requires explanation. Denoting the i^{th} zonal harmonic by P_i , I put

$$P_{i,k}(\mu) = \frac{|i-k|}{1.3 \dots (2i-1)} (1-\mu^2)^{\frac{k}{2}} \frac{d^k}{d\mu^k} P_i(\mu), \quad (1)$$

where

$$\mu \equiv \cos \theta.$$

The only change from Heine's notation is that the i is lowered so that it may not appear a power. The μ need not in general be written in.

Taking the ordinary coordinates r, θ, ϕ , let

$$\left. \begin{aligned} \cos(\phi - \alpha_1) \sin \theta \cos \theta &\equiv \cos(\phi - \alpha_1) P_{2,1} = X_{2,1}, \\ \cos(\phi - \beta_1) \sin \theta \cos \theta &\equiv \cos(\phi - \beta_1) P_{2,1} = X'_{2,1}, \\ \cos(2\phi - \alpha_2) \sin^2 \theta &\equiv \cos(2\phi - \alpha_2) P_{2,2} = X_{2,2}, \\ \cos(2\phi - \beta_2) \sin^2 \theta &\equiv \cos(2\phi - \beta_2) P_{2,2} = X'_{2,2}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Then I propose to find the solution of the elastic solid problem presented by the nearly spherical ellipsoid

$$r = a(1 + \varepsilon P_2 + \varepsilon_1 X_{2,1} + \varepsilon_2 X_{2,2}) \quad (3)$$

under the action of the bodily forces derived from the potential

$$r^2 (V_2 P_2 + V_{2,1} X'_{2,1} + V_{2,2} X'_{2,2}), \quad (4)$$

combined with the surface forces of which

component along $r = R_2 P_2 + R_{2,1} X'_{2,1} + R_{2,2} X'_{2,2}$,

$$\left. \begin{aligned} \text{" " } \theta &= \frac{d}{d\theta} (\Theta_2 P_2 + \Theta_{2,1} X'_{2,1} + \Theta_{2,2} X'_{2,2}) \\ &\quad + \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} (\Phi_{2,1} X'_{2,1} + \Phi_{2,2} X'_{2,2}), \\ \text{" " } \phi &= \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} (\Theta_{2,1} X'_{2,1} + \Theta_{2,2} X'_{2,2}) \\ &\quad - \frac{d}{d\theta} (\Phi_2 P_2 + \Phi_{2,1} X'_{2,1} + \Phi_{2,2} X'_{2,2}). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Here ϵ , ϵ_1 , ϵ_2 are small positive or negative quantities whose squares and products are negligible; V , R , Θ , Φ denote constants. To economise letters, $X'_{2,1}$ and $X'_{2,2}$ are each employed in four classes of applied forces. For instance, $X'_{2,1}$ appears in the bodily forces and radial surface forces as well as in the surface forces derived from a potential and those derived from a stream function. There is in consequence an apparent loss of generality, the expressions for all these forces seeming to contain the same constant β_1 . In reality, however, we can tell by the coefficient appearing in the final solution, according as it is V , R , Θ or Φ , from which class of forces each single term comes, so that the loss of generality is only apparent.

§27. It may, if necessary, be assumed that the applied forces as a whole are in equilibrium. It would, however, seemingly be a mistake in any case to use the resulting equations at this stage to eliminate anything. Each set of terms which, equated to zero, embodies one of the equations of equilibrium constitutes, as it were, an insoluble nucleus which can be isolated at different stages of the proceedings and affords a useful check on the accuracy of the calculations. Further, when a solution is found which takes account of the strains and stresses induced by the motion, when the applied forces are not in equilibrium, the restriction of equilibrium need not be applied, so that at present it seems expedient not to introduce this restriction sooner than avoidable.

In passing we may glance at a difficulty which may arise when unequibrated forces exist. Take for example a sphere acted on by a constant couple round an axis; the rate of rotation continually increases, and the same would be true of the mathematical expressions for the strains answering to the "centrifugal" forces. It would, however, be illegitimate to treat the results as having any physical application after a certain time has elapsed, for the solid would in due course fly into pieces. A similar result would certainly follow in many other cases of unequibrated forces. There are cases, however, when rupture is not a necessary consequence of the absence of equilibrium. The applied forces, for instance, may go through a regular cycle, the time integral throughout a cycle of a component in any particular direction vanishing. If the periodic time is small, the dynamical features of the case predominate, but when the change in the forces is very slow, it is otherwise.

§28. A number of pure mathematical results are employed in the solution of the problem. The following are merely special forms of the $P_{i,k}$ of (1):

$$\left. \begin{aligned} P_{1,1} &= \sin \theta \frac{dP_1}{d\mu} = \sin \theta, \\ P_{2,1} &= \frac{1}{3} \sin \theta \frac{dP_2}{d\mu} = \sin \theta \cos \theta, \\ P_{2,2} &= \frac{1}{3} \sin^2 \theta \frac{d^2 P_2}{d\mu^2} = \sin^2 \theta, \\ P_{3,1} &= \frac{2}{15} \sin \theta \frac{dP_3}{d\mu} = \frac{1}{5} \sin \theta (5 \cos^2 \theta - 1), \\ P_{3,2} &= \frac{1}{15} \sin^2 \theta \frac{d^2 P_3}{d\mu^2} = \sin^2 \theta \cos \theta, \\ P_{3,3} &= \frac{1}{15} \sin^3 \theta \frac{d^3 P_3}{d\mu^3} = \sin^3 \theta, \\ P_{4,1} &= \frac{2}{35} \sin \theta \frac{dP_4}{d\mu} = \frac{1}{7} \sin \theta \cos \theta (7 \cos^2 \theta - 3), \\ P_{4,2} &= \frac{2}{105} \sin^2 \theta \frac{d^2 P_4}{d\mu^2} = \frac{1}{7} \sin^2 \theta (7 \cos^2 \theta - 1), \\ P_{4,3} &= \frac{1}{105} \sin^3 \theta \frac{d^3 P_4}{d\mu^3} = \sin^3 \theta \cos \theta, \\ P_{4,4} &= \frac{1}{105} \sin^4 \theta \frac{d^4 P_4}{d\mu^4} = \sin^4 \theta. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

§29. The next set of results are employed in the surface conditions in dealing with those terms that refer to bodily forces, radial surface forces, and surface forces with Θ coefficients, i. e. which come from a potential. Some are probably old. The several X 's are defined by (2). The results are

$$(P_2)^2 = \frac{1}{5} + \frac{2}{7} P_2 + \frac{18}{35} P_4, \quad (7)$$

$$\left(\frac{dP_2}{d\theta}\right)^2 = \frac{6}{5} + \frac{6}{7} P_2 - \frac{72}{35} P_4, \quad (8)$$

$$P_2 \frac{dP_2}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{7} P_2 + \frac{9}{35} P_4 \right), \quad (9)$$

$$\frac{dP_2}{d\theta} \frac{d^2 P_2}{d\theta^2} = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{3}{7} P_2 - \frac{36}{35} P_4 \right), \quad (10)$$

$$P_2 P_{2,1} = \frac{1}{7} P_{2,1} + \frac{3}{2} P_{4,1}, \quad (11)$$

$$\frac{dP_2}{d\theta} \frac{dP_{2,1}}{d\theta} = \frac{3}{7} P_{2,1} - 6P_{4,1}, \quad (12)$$

$$\frac{P_{2,1}}{\sin \theta} \cot \theta \frac{dP_2}{d\theta} = \frac{1}{\sin \theta} \left(-\frac{9}{7} P_{2,1} - 3P_{4,1} \right), \quad (13)$$

$$P_{2,1} \frac{dP_2}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \left(-\frac{3}{56} P_{2,1} + \frac{3}{4} P_{4,1} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \left(-\frac{3}{8} P_{1,1} \right), \quad (14)$$

$$P_2 \frac{dP_{2,1}}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{11}{56} P_{2,1} + \frac{3}{4} P_{4,1} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{3}{8} P_{1,1} \right), \quad (15)$$

$$\frac{dP_{2,1}}{d\theta} \frac{d^2 P_2}{d\theta^2} = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{3}{14} P_{2,1} - 3P_{4,1} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \left(-\frac{3}{2} P_{1,1} \right), \quad (16)$$

$$\frac{dP_2}{d\theta} \frac{d^2 P_{2,1}}{d\theta^2} = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{3}{14} P_{2,1} - 3P_{4,1} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{3}{2} P_{1,1} \right), \quad (17)$$

$$\frac{dP_2}{d\theta} \frac{d}{d\theta} (\operatorname{cosec} \theta P_{2,1}) = \frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{12}{7} P_{2,1} - 3P_{4,1} \right), \quad (18)$$

$$P_2 P_{2,2} = -\frac{2}{7} P_{2,2} + \frac{3}{2} P_{4,2}, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \frac{dP_2}{d\theta} \frac{dP_{2,2}}{d\theta} &= 2 \sin \theta \frac{dP_2}{d\theta} \frac{d}{d\theta} (\operatorname{cosec} \theta P_{2,2}) \\ &= 2P_{2,2} \cot \theta \frac{dP_2}{d\theta} = -\frac{6}{7} P_{2,2} - 6P_{4,2}, \end{aligned} \quad (20)$$

$$P_{2,2} \frac{dP_2}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \left(-\frac{9}{14} P_{2,2} + \frac{3}{4} P_{4,2} \right), \quad (21)$$

$$P_2 \frac{dP_{2,2}}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{5}{14} P_{2,2} + \frac{3}{4} P_{4,2} \right), \quad (22)$$

$$\frac{dP_{2,2}}{d\theta} \frac{d^2 P_2}{d\theta^2} = \frac{dP_2}{d\theta} \frac{d^2 P_{2,2}}{d\theta^2} = \frac{d}{d\theta} \left(-\frac{3}{7} P_{2,2} - 3P_{4,2} \right), \quad (23)$$

$$\begin{aligned} X_{2,1} X'_{2,1} &= \left(\frac{1}{15} + \frac{1}{21} P_2 - \frac{4}{35} P_4 \right) \cos(\alpha_1 - \beta_1) \\ &\quad + \left(\frac{1}{14} P_{2,2} + \frac{1}{2} P_{4,2} \right) \cos(2\phi - \alpha_1 - \beta_1), \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \frac{dX_{2,1}}{d\theta} \frac{dX'_{2,1}}{d\theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{dX_{2,1}}{d\phi} \frac{dX'_{2,1}}{d\phi} &= \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{7} P_2 + \frac{16}{35} P_4 \right) \cos(\alpha_1 - \beta_1) \\ &\quad + \left(\frac{3}{14} P_{2,2} - 2P_{4,2} \right) \cos(2\phi - \alpha_1 - \beta_1), \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} X'_{2,1} \frac{dX_{2,1}}{d\theta} &= X_{2,1} \frac{dX'_{2,1}}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \left[\left(\frac{1}{42} P_2 - \frac{2}{35} P_4 \right) \cos(\alpha_1 - \beta_1) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{28} P_{2,2} + \frac{1}{4} P_{4,2} \right) \cos(2\phi - \alpha_1 - \beta_1) \right], \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \frac{dX_{2,1}}{d\theta} \frac{d^2 X'_{2,1}}{d\theta^2} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{dX_{2,1}}{d\phi} \frac{d^2}{d\theta d\phi} (\operatorname{cosec} \theta X'_{2,1}) \\ = \frac{d}{d\theta} \left[\left(\frac{1}{14} P_2 + \frac{8}{35} P_4 \right) \cos(\alpha_1 - \beta_1) \right. \\ \left. + \left(\frac{3}{28} P_{2,2} - P_{4,2} \right) \cos(2\phi - \alpha_1 - \beta_1) \right], \quad (27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X'_{2,1} \frac{1}{\sin \theta} \frac{dX_{2,1}}{d\phi} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} \left[\left(\frac{1}{28} P_{2,2} + \frac{1}{4} P_{4,2} \right) \cos(2\phi - \alpha_1 - \beta_1) \right] \\ + \frac{d}{d\theta} \left[- \left(\frac{1}{10} P_1 + \frac{1}{15} P_3 \right) \sin(\alpha_1 - \beta_1) \right], \quad (28) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dX_{2,1}}{d\theta} \frac{d^2}{d\theta d\phi} (\operatorname{cosec} \theta X'_{2,1}) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{dX_{2,1}}{d\phi} \left(\frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{d^2 X'_{2,1}}{d\phi^2} + \cot \theta \frac{dX'_{2,1}}{d\theta} \right) \\ = \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} \left[\left(\frac{3}{28} P_{2,2} - P_{4,2} \right) \cos(2\phi - \alpha_1 - \beta_1) \right] \\ + \frac{d}{d\theta} \left[\frac{1}{2} P_1 \sin(\alpha_1 - \beta_1) \right], \quad (29) \end{aligned}$$

$$X_{2,1} X_{2,2} = \left(\frac{2}{7} P_{2,1} - \frac{1}{2} P_{4,1} \right) \cos(\phi + \alpha_1 - \alpha_2) + \frac{1}{2} P_{4,3} \cos(3\phi - \alpha_1 - \alpha_2), \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \frac{dX_{2,1}}{d\theta} \frac{dX_{2,2}}{d\theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{dX_{2,1}}{d\phi} \frac{dX_{2,2}}{d\phi} \\ = \left(\frac{6}{7} P_{2,1} + 2P_{4,1} \right) \cos(\phi + \alpha_1 - \alpha_2) - 2P_{4,3} \cos(3\phi - \alpha_1 - \alpha_2), \quad (31) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_{2,2} \frac{dX_{2,1}}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \left[\left(\frac{15}{56} P_{2,1} - \frac{1}{4} P_{4,1} \right) \cos(\phi + \alpha_1 - \alpha_2) \right. \\ \left. + \frac{1}{4} P_{4,3} \cos(3\phi - \alpha_1 - \alpha_2) \right] + \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} \left[-\frac{1}{8} P_{1,1} \sin(\phi + \alpha_1 - \alpha_2) \right. \\ \left. - \frac{1}{12} P_{3,3} \sin(3\phi - \alpha_1 - \alpha_2) \right], \quad (32) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_{2,1} \frac{dX_{2,2}}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \left[\left(\frac{1}{56} P_{2,1} - \frac{1}{4} P_{4,1} \right) \cos(\phi + \alpha_1 - \alpha_2) \right. \\ \left. + \frac{1}{4} P_{4,3} \cos(3\phi - \alpha_1 - \alpha_2) \right] + \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} \left[\frac{1}{8} P_{1,1} \sin(\phi + \alpha_1 - \alpha_2) \right. \\ \left. + \frac{1}{12} P_{3,3} \sin(3\phi - \alpha_1 - \alpha_2) \right], \quad (33) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dX_{2,1}}{d\theta} \frac{d^2 X_{2,2}}{d\theta^2} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{dX_{2,1}}{d\phi} \frac{d^2}{d\theta d\phi} (\operatorname{cosec} \theta X_{2,2}) \\ = \frac{d}{d\theta} \left[\left(\frac{3}{7} P_{2,1} + P_{4,1} \right) \cos(\phi + \alpha_1 - \alpha_2) - P_{4,3} \cos(3\phi - \alpha_1 - \alpha_2) \right] \\ + \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} \left[P_{1,1} \sin(\phi + \alpha_1 - \alpha_2) \right], \quad (34) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dX_{2,2}}{d\theta} \frac{d^2 X_{2,1}}{d\theta^2} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{dX_{2,2}}{d\phi} \frac{d^2}{d\theta d\phi} (\operatorname{cosec} \theta X_{2,1}) \\
= \frac{d}{d\theta} \left[\left(\frac{3}{7} P_{2,1} + P_{4,1} \right) \cos(\phi + \alpha_1 - \alpha_2) - P_{4,3} \cos(3\phi - \alpha_1 - \alpha_2) \right] \\
+ \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} [-P_{11} \sin(\phi + \alpha_1 - \alpha_2)], \quad (35)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_{2,2} \frac{1}{\sin \theta} \frac{dX_{2,1}}{d\phi} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} \left[\left(-\frac{2}{7} P_{2,1} + \frac{1}{2} P_{4,1} \right) \cos(\phi + \alpha_1 - \alpha_2) \right. \\
\left. + \frac{1}{6} P_{4,3} \cos(3\phi - \alpha_1 - \alpha_2) \right], \quad (36)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_{2,1} \frac{1}{\sin \theta} \frac{dX_{2,2}}{d\phi} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} \left[\left(\frac{4}{7} P_{2,1} - P_{4,1} \right) \cos(\phi + \alpha_1 - \alpha_2) \right. \\
\left. + \frac{1}{3} P_{4,3} \cos(3\phi - \alpha_1 - \alpha_2) \right], \quad (37)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dX_{2,1}}{d\theta} \frac{d^2}{d\theta d\phi} (\operatorname{cosec} \theta X_{2,2}) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{dX_{2,1}}{d\phi} \left(\frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{d^2 X_{2,2}}{d\phi^2} + \cot \theta \frac{dX_{2,2}}{d\theta} \right) \\
= \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} \left[\left(\frac{10}{7} P_{2,1} + P_{4,1} \right) \cos(\phi + \alpha_1 - \alpha_2) \right. \\
\left. - P_{4,3} \cos(3\phi - \alpha_1 - \alpha_2) \right], \quad (38)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dX_{2,2}}{d\theta} \frac{d^2}{d\theta d\phi} (\operatorname{cosec} \theta X_{2,1}) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{dX_{2,2}}{d\phi} \left(\frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{d^2 X_{2,1}}{d\phi^2} + \cot \theta \frac{dX_{2,1}}{d\theta} \right) \\
= \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} \left[\left(-\frac{4}{7} P_{2,1} + P_{4,1} \right) \cos(\phi + \alpha_1 - \alpha_2) \right. \\
\left. - P_{4,3} \cos(3\phi - \alpha_1 - \alpha_2) \right], \quad (39)
\end{aligned}$$

$$X_{2,2} X'_{2,2} = \left(\frac{4}{15} - \frac{8}{21} P_2 + \frac{4}{35} P_4 \right) \cos(\alpha_2 - \beta_2) + \frac{1}{2} P_{4,4} \cos(4\phi - \alpha_2 - \beta_2), \quad (40)$$

$$\begin{aligned}
\frac{dX_{2,2}}{d\theta} \frac{dX'_{2,2}}{d\theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{dX_{2,2}}{d\phi} \frac{dX'_{2,2}}{d\phi} = \left(\frac{56}{35} - \frac{8}{7} P_2 - \frac{16}{35} P_4 \right) \cos(\alpha_2 - \beta_2) \\
- 2P_{4,4} \cos(4\phi - \alpha_2 - \beta_2), \quad (41)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_{2,2} \frac{dX'_{2,2}}{d\theta} = X'_{2,2} \frac{dX_{2,2}}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \left[\left(-\frac{4}{21} P_2 + \frac{2}{35} P_4 \right) \cos(\alpha_2 - \beta_2) \right. \\
\left. + \frac{1}{4} P_{4,4} \cos(4\phi - \alpha_2 - \beta_2) \right], \quad (42)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dX_{2,2}}{d\theta} \frac{d^2 X'_{2,2}}{d\theta^2} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{dX_{2,2}}{d\phi} \frac{d^2}{d\theta d\phi} (\operatorname{cosec} \theta X'_{2,2}) \\
= \frac{d}{d\theta} \left[-\left(\frac{4}{7} P_2 + \frac{8}{35} P_4 \right) \cos(\alpha_2 - \beta_2) - P_{4,4} \cos(4\phi - \alpha_2 - \beta_2) \right], \quad (43)
\end{aligned}$$

$$X_{2,2} \frac{1}{\sin \theta} \frac{dX'_{2,2}}{d\phi} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} \left[\frac{1}{4} P_{4,4} \cos(4\phi - \alpha_2 - \beta_2) \right] \\ + \frac{d}{d\theta} \left[\left(\frac{4}{5} P_1 - \frac{2}{15} P_3 \right) \sin(\alpha_2 - \beta_2) \right], \quad (44)$$

$$\frac{dX_{2,2}}{d\theta} \frac{d^2}{d\theta d\phi} (\operatorname{cosec} \theta X'_{2,2}) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{dX_{2,2}}{d\phi} \left(\frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{d^3 X'_{2,2}}{d\phi^2} + \cot \theta \frac{dX'_{2,2}}{d\theta} \right) \\ = \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} \left[-P_{4,4} \cos(4\phi - \alpha_2 - \beta_2) \right] \\ + \frac{d}{d\theta} [4P_1 \sin(\alpha_2 - \beta_2)]. \quad (45)$$

As a matter of fact, we do not have products such as $X_{2,1}X_{2,2}$, but two sets, viz. $X_{2,1}X'_{2,2}$ and $X'_{2,1}X_{2,2}$; the results, however, for the two sets actually occurring may be deduced from the one set actually given by writing β_2 for α_2 in the one case and β_1 for α_1 in the other.

§30. The following set of results are required in dealing with the surface forces with Φ coefficients, i. e. those coming from a stream function:

$$\frac{dP_2}{d\theta} \frac{1}{\sin \theta} \frac{dX'_{2,1}}{d\phi} = \left(\frac{3}{5} P_{1,1} + 3P_{3,1} \right) \sin(\phi - \beta_1), \quad (46)$$

$$\frac{dP_2}{d\theta} \frac{1}{\sin \theta} \frac{dX'_{2,2}}{d\phi} = 6P_{3,2} \sin(2\phi - \beta_2), \quad (47)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{dX_{2,1}}{d\phi} \frac{dX'_{2,1}}{d\theta} - \frac{dX_{2,1}}{d\theta} \frac{1}{\sin \theta} \frac{dX'_{2,1}}{d\phi} = \left(\frac{1}{5} P_1 + \frac{4}{5} P_3 \right) \sin(\alpha_1 - \beta_1), \quad (48)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{dX_{2,1}}{d\phi} \frac{dX'_{2,2}}{d\theta} - \frac{dX_{2,1}}{d\theta} \frac{1}{\sin \theta} \frac{dX'_{2,2}}{d\phi} \\ = \left(-\frac{2}{5} P_{1,1} + 3P_{3,1} \right) \sin(\phi + \alpha_1 - \beta_2) - P_{3,2} \sin(3\phi - \alpha_1 - \beta_2), \quad (49)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{dX_{2,2}}{d\phi} \frac{dX'_{2,2}}{d\theta} - \frac{dX_{2,2}}{d\theta} \frac{1}{\sin \theta} \frac{dX'_{2,2}}{d\phi} = \frac{8}{5} (P_1 - P_3) \sin(\alpha_2 - \beta_2), \quad (50)$$

$$P_2 \frac{1}{\sin \theta} \frac{dX'_{2,1}}{d\phi} - 2 \frac{dP_2}{d\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{dX'_{2,1}}{d\phi} \right) \\ = \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} \left[\left(-\frac{23}{7} P_{2,1} + \frac{15}{2} P_{4,1} \right) \cos(\phi - \beta_1) \right], \quad (51)$$

$$P_2 \frac{1}{\sin \theta} \frac{dX'_{2,2}}{d\phi} - 2 \frac{dP_2}{d\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{dX'_{2,2}}{d\phi} \right) \\ = \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} \left[\left(\frac{4}{7} P_{2,2} + \frac{15}{2} P_{4,2} \right) \cos(2\phi - \beta_2) \right], \quad (52)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{dX_{2,1}}{d\phi} \left(6P_2 + 2 \frac{d^2 P_2}{d\theta^2} \right) = \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} \left[\left(\frac{12}{7} P_{2,1} - 3P_{4,1} \right) \cos(\phi - \alpha_1) \right], \quad (53)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{dX_{2,2}}{d\phi} \left(6P_2 + 2 \frac{d^2 P_2}{d\theta^2} \right) = \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} \left[\left(\frac{18}{7} P_{2,2} - 3P_{4,2} \right) \cos(2\phi - \alpha_2) \right], \quad (54)$$

$$\begin{aligned} X_{2,1} \frac{1}{\sin \theta} \frac{dX'_{2,1}}{d\phi} - 2 \frac{dX_{2,1}}{d\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{dX'_{2,1}}{d\phi} \right) + \frac{2}{\sin \theta} \frac{dX_{2,1}}{d\phi} \left(3X'_{2,1} + \frac{d^2 X'_{2,1}}{d\theta^2} \right) \\ = \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} \left[\left(-\frac{11}{28} P_{2,2} + \frac{3}{4} P_{4,2} \right) \cos(2\phi - \alpha_1 - \beta_1) \right] \\ + \frac{d}{d\theta} \left[\left(-\frac{3}{10} P_1 + \frac{7}{15} P_3 \right) \sin(\alpha_1 - \beta_1) \right], \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} X_{2,1} \frac{1}{\sin \theta} \frac{dX'_{2,2}}{d\phi} - 2 \frac{dX_{2,1}}{d\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{dX'_{2,2}}{d\phi} \right) + \frac{2}{\sin \theta} \frac{dX_{2,1}}{d\phi} \left(3X'_{2,2} + \frac{d^2 X'_{2,2}}{d\theta^2} \right) \\ = \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} \left[-\left(\frac{4}{7} P_{2,1} + 6P_{4,1} \right) \cos(\phi - \beta_2 + \alpha_1) \right] \\ + \frac{4}{3} P_{4,2} \cos(3\phi - \alpha_1 - \beta_2), \end{aligned} \quad (56)$$

$$\begin{aligned} X_{2,2} \frac{1}{\sin \theta} \frac{dX'_{2,1}}{d\phi} - 2 \frac{dX_{2,2}}{d\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{dX'_{2,1}}{d\phi} \right) + \frac{2}{\sin \theta} \frac{dX_{2,2}}{d\phi} \left(3X'_{2,1} + \frac{d^2 X'_{2,1}}{d\theta^2} \right) \\ = \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} \left[\left(-\frac{18}{7} P_{2,1} + \frac{9}{2} P_{4,1} \right) \cos(\phi + \beta_1 - \alpha_2) \right] \\ + \frac{1}{4} P_{4,2} \cos(3\phi - \alpha_2 - \beta_1), \end{aligned} \quad (57)$$

$$\begin{aligned} X_{2,2} \frac{1}{\sin \theta} \frac{dX'_{2,2}}{d\phi} - 2 \frac{dX_{2,2}}{d\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{dX'_{2,2}}{d\phi} \right) + \frac{2}{\sin \theta} \frac{dX_{2,2}}{d\phi} \left(3X'_{2,2} + \frac{d^2 X'_{2,2}}{d\theta^2} \right) \\ = \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} \left[\frac{3}{4} P_{4,2} \cos(4\phi - \alpha_2 - \beta_2) \right] \\ - \frac{d}{d\theta} \left[\left(\frac{12}{5} P_1 + \frac{14}{15} P_3 \right) \sin(\alpha_2 - \beta_2) \right], \end{aligned} \quad (58)$$

$$\frac{dP_2}{d\theta} \left(5P_2 + 2 \frac{d^2 P_2}{d\theta^2} \right) = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{11}{7} P_2 - \frac{27}{35} P_4 \right), \quad (59)$$

$$\begin{aligned} -P_2 \frac{dX'_{2,1}}{d\theta} + 2 \frac{dP_2}{d\theta} \left(3X'_{2,1} + \frac{d^2 X'_{2,1}}{d\theta^2} \right) \\ = \frac{d}{d\theta} \left[-\left(\frac{5}{56} P_{2,1} + \frac{9}{4} P_{4,1} \right) \cos(\phi - \beta_1) \right] \\ + \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} \left[\frac{3}{8} P_{1,1} \sin(\phi - \beta_1) \right], \end{aligned} \quad (60)$$

$$\begin{aligned} -P_2 \frac{dX'_{2,2}}{d\theta} + 2 \frac{dP_2}{d\theta} \left(3X'_{2,2} + \frac{d^2 X'_{2,2}}{d\theta^2} \right) \\ = \frac{d}{d\theta} \left[-\left(\frac{71}{14} P_{2,2} + \frac{9}{4} P_{4,2} \right) \cos(2\phi - \beta_2) \right], \end{aligned} \quad (61)$$

$$\begin{aligned}
-X_{2,1} \frac{dP_2}{d\theta} + 2 \frac{dX_{2,1}}{d\theta} \left(3P_2 + \frac{d^2 P_2}{d\theta^2} \right) &= \frac{d}{d\theta} \left[\left(\frac{93}{56} P_{2,1} - \frac{9}{4} P_{4,1} \right) \cos(\phi - \alpha_1) \right] \\
&+ \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} \left[-\frac{3}{8} P_{1,1} \sin(\phi - \alpha_1) \right], \quad (62)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-X_{2,2} \frac{dP_2}{d\theta} + 2 \frac{dX_{2,2}}{d\theta} \left(3P_2 + \frac{d^2 P_2}{d\theta^2} \right) \\
= \frac{d}{d\theta} \left[\left(\frac{27}{14} P_{2,2} - \frac{9}{4} P_{4,2} \right) \cos(2\phi - \alpha_2) \right], \quad (63)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-X_{2,1} \frac{dX'_{2,1}}{d\theta} + 2 \frac{dX_{2,1}}{d\theta} \left(3X'_{2,1} + \frac{d^2 X'_{2,1}}{d\theta^2} \right) + \frac{2}{\sin \theta} \frac{dX_{2,1}}{d\phi} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{dX'_{2,1}}{d\phi} \right) \\
= \frac{d}{d\theta} \left[\left(\frac{11}{42} P_2 + \frac{6}{35} P_4 \right) \cos(\alpha_1 - \beta_1) \right. \\
\left. + \left(\frac{11}{28} P_{2,2} - \frac{3}{4} P_{4,2} \right) \cos(2\phi - \alpha_1 - \beta_1) \right], \quad (64)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-X_{2,1} \frac{dX'_{2,2}}{d\theta} + 2 \frac{dX_{2,1}}{d\theta} \left(3X'_{2,2} + \frac{d^2 X'_{2,2}}{d\theta^2} \right) + \frac{2}{\sin \theta} \frac{dX_{2,1}}{d\phi} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{dX'_{2,2}}{d\phi} \right) \\
= \frac{d}{d\theta} \left[\left(\frac{137}{56} P_{2,1} + \frac{3}{4} P_{4,1} \right) \cos(\phi - \beta_2 + \alpha_1) \right. \\
\left. - \frac{3}{4} P_{4,3} \cos(3\phi - \alpha_1 - \beta_2) \right] + \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} \left[-\frac{9}{8} P_{1,1} \sin(\phi - \beta_2 + \alpha_1) \right. \\
\left. - \frac{7}{12} P_{2,2} \sin(3\phi - \alpha_1 - \beta_2) \right], \quad (65)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-X_{2,2} \frac{dX'_{2,1}}{d\theta} + 2 \frac{dX_{2,2}}{d\theta} \left(3X'_{2,1} + \frac{d^2 X'_{2,1}}{d\theta^2} \right) + \frac{2}{\sin \theta} \frac{dX_{2,2}}{d\phi} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{dX'_{2,1}}{d\phi} \right) \\
= \frac{d}{d\theta} \left[\left(\frac{39}{56} P_{2,1} + \frac{3}{4} P_{4,1} \right) \cos(\phi - \alpha_2 + \beta_1) \right. \\
\left. - \frac{3}{4} P_{4,3} \cos(3\phi - \alpha_2 - \beta_1) \right] + \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} \left[-\frac{9}{8} P_{1,1} \sin(\phi - \alpha_2 + \beta_1) \right. \\
\left. + \frac{7}{12} P_{2,2} \sin(3\phi - \alpha_2 - \beta_1) \right], \quad (66)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-X_{2,2} \frac{dX'_{2,2}}{d\theta} + 2 \frac{dX_{2,2}}{d\theta} \left(3X'_{2,2} + \frac{d^2 X'_{2,2}}{d\theta^2} \right) + \frac{2}{\sin \theta} \frac{dX_{2,2}}{d\phi} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{dX'_{2,2}}{d\phi} \right) \\
= \frac{d}{d\theta} \left[-\left(\frac{44}{21} P_2 + \frac{6}{35} P_4 \right) \cos(\alpha_2 - \beta_2) \right. \\
\left. - \frac{3}{4} P_{4,4} \cos(4\phi - \alpha_2 - \beta_2) \right]. \quad (67)
\end{aligned}$$

In one or two cases results are wanted such as that answering to (44) with $X_{2,2}$ and $X'_{2,2}$ interposed, or that answering to (28) with $X_{2,1}$ and $X'_{2,1}$ interposed.

§31. Yet another set of results are wanted, constituting what may be called *alternative forms*, viz.

$$\frac{d}{d\theta} (P_{3,1} \cos \phi) = \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} \left[\left(-\frac{32}{35} P_{3,1} + 3 P_{4,1} \right) \sin \phi \right], \quad (68)$$

$$\frac{d}{d\theta} (P_{3,2} \cos 2\phi) = \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} \left[\left(-\frac{2}{7} P_{3,2} + \frac{3}{2} P_{4,2} \right) \sin 2\phi \right], \quad (69)$$

$$\frac{d}{d\theta} (P_{3,3} \cos 3\phi) = \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} (P_{4,3} \sin 3\phi), \quad (70)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} \left[\left(P_{3,1} - \frac{3}{10} P_{1,1} \right) \sin \phi \right] = \frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} (P_{2,1} \cos \phi), \quad (71)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} (P_{3,2} \sin 2\phi) = \frac{d}{d\theta} (P_{2,2} \cos 2\phi), \quad (72)$$

along with the corresponding results when $\sin \phi$ is written for $\cos \phi$ in the expressions differentiated with respect to θ and $(-\cos \phi)$ for $\sin \phi$ in the expressions differentiated with respect to ϕ .

The occasion for these alternative forms arises in the following way: The forces derived from the stream function are no longer completely separable from the others. In the second surface condition, for instance, we might have the expression on the left of (70) occurring with a Y or Z coefficient and at the same time the expression on the right of (70) with a W coefficient. If the identity of the two variable coefficients were overlooked, one would erroneously conclude that there were too many equations to determine the arbitrary constants in a consistent way.

§32. The absence of a separation of the two sets of surface forces shows itself in such a result as (28), which is used in the third surface condition. On the right-hand side are two sets of terms. The first set, in which the differentiation is with respect to ϕ , present themselves in the determination of the Y and Z arbitrary constants of the general solution; the second set, in which the differentiation is with respect to θ , aid in the determination of the W constants. Since $X'_{2,1}$ has a Θ coefficient, the principal terms connected with it are of the same type as those with Y and Z coefficients.

In (14), and the three following results, the ϕ factors are omitted for brevity; in actual use the forms presenting themselves are such as

$$X'_{2,1} \frac{dP_2}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \left[\left(-\frac{3}{56} P_{2,1} + \frac{3}{4} P_{4,1} \right) \cos(\phi - \beta_1) \right] + \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} \left[-\frac{3}{8} P_{1,1} \sin(\phi - \beta_1) \right].$$

This result occurs in the second surface condition. In it the first set of terms on the right, in which the differentiation is with respect to θ , enter into the determination of the Y or Z constants. On the other hand, (55) occurs in the second surface condition with a Φ coefficient, and it is the constants of type W that have to do with the first set of terms in which the differentiation is with respect to ϕ . The principal terms are here exclusively of the W type, but there are subsidiary terms of the Y and Z type.

In all cases in these equations when there are differentiations with respect to both ϕ and θ , the set of terms put first occur in the determination of that class of arbitrary constants which would alone arise in a perfect sphere under surface forces of the specified kind. In the second set of terms in such a case there always appears P_1 or $P_{1,1}$; it may be alone or along with some other terms. Terms containing P_1 or $P_{1,1}$, as will appear subsequently, are connected with rigid body displacements and with the statical resultants of the applied forces.

§33. The occurrence of the several results is as follows: (7), (8), (11), (12), (19), (20), (24), (25), (30), (31), (40), (41) and (46)–(50) occur in the first surface condition; (9), (10), (14)–(17), (21)–(23), (26), (27), (32)–(35), (42), (43) and (51)–(58) occur in the second surface condition; (13), (18), (20), (28), (29), (36)–(39), (44), (45) and (59)–(67) occur in the third surface condition. The alternative forms (68)–(72) are required in the second and third surface conditions.

§34. Referred to the fundamental directions, r, θ, ϕ , at a point on the surface (3) the direction cosines of the normal, squares and products of $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ being neglected, are

$$1, -\frac{d}{d\theta}(\varepsilon P_2 + \varepsilon_1 X_{2,1} + \varepsilon_2 X_{2,2}) \text{ and } -\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi}(\varepsilon P_2 + \varepsilon_1 X_{2,1} + \varepsilon_2 X_{2,2}).$$

Thus the surface equations take the form

$$\begin{aligned} \widehat{r\theta} - \frac{d}{d\theta}(\varepsilon P_2 + \varepsilon_1 X_{2,1} + \varepsilon_2 X_{2,2}) \widehat{r\theta} - \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi}(\varepsilon_1 X_{2,1} + \varepsilon_2 X_{2,2}) \widehat{r\phi} \\ = R_2 P_2 + R_{2,1} X'_{2,1} + R_{2,2} X'_{2,2}, \end{aligned} \quad (73)$$

$$\begin{aligned} \widehat{r\phi} - \frac{d}{d\theta}(\varepsilon P_2 + \varepsilon_1 X_{2,1} + \varepsilon_2 X_{2,2}) \widehat{\theta\theta} - \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi}(\varepsilon_1 X_{2,1} + \varepsilon_2 X_{2,2}) \widehat{\theta\phi} \\ = \frac{d}{d\theta}(\Theta_2 P_2 + \Theta_{2,1} X'_{2,1} + \Theta_{2,2} X'_{2,2}) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi}(\Phi_{2,1} X'_{2,1} + \Phi_{2,2} X'_{2,2}), \end{aligned} \quad (74)$$

$$\begin{aligned} \widehat{r\phi} - \frac{d}{d\theta} (\varepsilon P_2 + \varepsilon_1 X_{2,1} + \varepsilon_2 X_{2,2}) \widehat{\theta\phi} - \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} (\varepsilon_1 X_{2,1} + \varepsilon_2 X_{2,2}) \widehat{\phi\phi} \\ = \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} (\Theta_{2,1} X'_{2,1} + \Theta_{2,2} X'_{2,2}) - \frac{d}{d\theta} (\Phi_2 P_2 + \Phi_{2,1} X'_{2,1} + \Phi_{2,2} X'_{2,2}). \end{aligned} \quad (75)$$

The notation of (6)–(17) and of (24), Section I, is also employed in the present problem. Thus for the values, when $r = a$, of the stresses arising from the principal terms, we have

$$\widehat{rr} = \bar{L}P_2 + \bar{L}_1 X'_{2,1} + \bar{L}_2 X'_{2,2}, \quad (76)$$

$$\begin{aligned} \widehat{\theta\theta} = \bar{N}P_2 + \bar{N}_1 X'_{2,1} + \bar{N}_2 X'_{2,2} + \frac{d^2}{d\theta^2} (\bar{O}P_2 + \bar{O}_1 X'_{2,1} + \bar{O}_2 X'_{2,2}) \\ + 2na \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} \right) (W_2 P_2 + W_{2,1} X'_{2,1} + W_{2,2} X'_{2,2}), \end{aligned} \quad (77)$$

$$\begin{aligned} \widehat{\phi\phi} = \bar{N}P_2 + \bar{N}_1 X'_{2,1} + \bar{N}_2 X'_{2,2} + \left(\frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{d^2}{d\phi^2} + \cot \theta \frac{d}{d\theta} \right) (\bar{O}P_2 + \bar{O}_1 X'_{2,1} + \bar{O}_2 X'_{2,2}) \\ - 2na \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} \right) (W_2 P_2 + W_{2,1} X'_{2,1} + W_{2,2} X'_{2,2}), \end{aligned} \quad (78)$$

$$\widehat{r\theta} = \frac{d}{d\theta} (\bar{M}P_2 + \bar{M}_1 X'_{2,1} + \bar{M}_2 X'_{2,2}) + na \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} (W_{2,1} X'_{2,1} + W_{2,2} X'_{2,2}), \quad (79)$$

$$\widehat{r\phi} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} (\bar{M}_1 X'_{2,1} + \bar{M}_2 X'_{2,2}) - na \frac{d}{d\theta} (W_2 P_2 + W_{2,1} X'_{2,1} + W_{2,2} X'_{2,2}), \quad (80)$$

$$\begin{aligned} \widehat{\theta\phi} = \frac{d^2}{d\theta d\phi} [\operatorname{cosec} \theta (\bar{O}_1 X'_{2,1} + \bar{O}_2 X'_{2,2})] \\ - na \left(6 + 2 \frac{d^2}{d\theta^2} \right) (W_2 P_2 + W_{2,1} X'_{2,1} + W_{2,2} X'_{2,2}). \end{aligned} \quad (81)$$

As the applied forces contain only harmonics of the second degree, I have economized one suffix in \bar{L} , etc. Thus, for instance, above

$$\begin{aligned} \bar{L} &= L_2 V_2 + A_2 Y_2 + B_2 Z_2, \\ \bar{O}_2 &= O_2 V_{2,2} + A_2 Y_{2,2} + B_2 Z_{2,2}. \end{aligned}$$

If applied forces depending on harmonics of other degrees had occurred, we should have had to write \bar{L}_2 for \bar{L} and $\bar{O}_{2,2}$ for \bar{O}_2 in the above.

§35. Every Y , Z and W constant must be determined by means of the surface conditions. As in the previous problems, there are principal terms containing the harmonics which occur in the applied forces, and these alone would

exist if the surface were truly spherical. There are also subsidiary terms depending on a large number of harmonics of different degrees.

In the case of harmonics the same in form as those in the applied forces, the notation $Y_2 + \delta Y_2$, etc., is used for the arbitrary constants. Here Y_2 represents the first approximation when terms in ε , ε_1 , ε_2 are neglected. For the constant coefficients of harmonics which would not exist if the surface were truly spherical, one letter only is used; e. g. Y_4 appears alone as the coefficient of P_4 .

In the case of harmonics containing ϕ , undashed letters are used in the subsidiary terms containing a cosine, and dashed letters in those containing a sine, e. g. $Y_{4,2}P_{4,2} \cos 2\phi$, $Y'_{4,2}P_{4,2} \sin 2\phi$.

The subsidiary harmonics required are learned by inspection of the harmonics occurring in the left of the surface equations (73), (74), (75) when $a(1 + \varepsilon P_2 + \varepsilon_1 X_{2,1} + \varepsilon_2 X_{2,2})$ is written for r and account is taken only of the principal terms in the stresses.

§36. In the following identity (82) the left-hand side gives the original form of the terms which contain ε , ε_1 or ε_2 explicitly on the left-hand side of (73), while the right-hand side gives the final form when use is made of such of the results (7)-(67) as apply to the first surface condition:

$$\begin{aligned}
 & (\varepsilon P_2 + \varepsilon_1 X_{2,1} + \varepsilon_2 X_{2,2}) a \frac{d}{da} (\bar{L}P_2 + \bar{L}_1 X'_{2,1} + \bar{L}_2 X'_{2,2}) \\
 & - \frac{d}{d\theta} (\varepsilon P_2 + \varepsilon_1 X_{2,1} + \varepsilon_2 X_{2,2}) \frac{d}{d\theta} (\bar{M}P_2 + \bar{M}_1 X'_{2,1} + \bar{M}_2 X'_{2,2}) \\
 & - \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} (\varepsilon_1 X_{2,1} + \varepsilon_2 X_{2,2}) \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} (\bar{M}_1 X'_{2,1} + \bar{M}_2 X'_{2,2}) \\
 & - \frac{d}{d\theta} (\varepsilon P_2 + \varepsilon_1 X_{2,1} + \varepsilon_2 X_{2,2}) \frac{na}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} (W_{2,1} X'_{2,1} + W_{2,2} X'_{2,2}) \\
 & + \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} (\varepsilon_1 X_{2,1} + \varepsilon_2 X_{2,2}) na \frac{d}{d\theta} (W_{2,1} P_2 + W_{2,1} X'_{2,1} + W_{2,2} X'_{2,2}) \\
 & \equiv a \frac{d\bar{L}}{da} \left[\varepsilon \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{7} P_2 + \frac{18}{35} P_4 \right) + \varepsilon_1 \left(\frac{1}{7} P_{2,1} + \frac{3}{2} P_{4,1} \right) \cos(\phi - \alpha_1) \right. \\
 & \quad \left. + \varepsilon_2 \left(-\frac{2}{7} P_{2,2} + \frac{3}{2} P_{4,2} \right) \cos(2\phi - \alpha_2) \right] \\
 & + a \frac{d\bar{L}_1}{da} \left[\varepsilon \left(\frac{1}{7} P_{2,1} + \frac{3}{2} P_{4,1} \right) \cos(\phi - \beta_1) \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \varepsilon_1 \left\{ \left(\frac{1}{15} + \frac{1}{21} P_2 - \frac{4}{35} P_4 \right) \cos(\alpha_1 - \beta_1) \right. \\
& + \left(\frac{1}{14} P_{2,2} + \frac{1}{2} P_{4,2} \right) \cos(2\phi - \alpha_1 - \beta_1) \left. \vphantom{\left(\frac{1}{15} + \frac{1}{21} P_2 - \frac{4}{35} P_4 \right)} \right\} \\
& + \varepsilon_2 \left\{ \left(\frac{2}{7} P_{2,1} - \frac{1}{2} P_{4,1} \right) \cos(\phi + \beta_1 - \alpha_2) + \frac{1}{2} P_{4,3} \cos(3\phi - \beta_1 - \alpha_2) \right\} \Big] \\
& + a \frac{d\bar{L}_2}{da} \left[\varepsilon \left(-\frac{2}{7} P_{2,2} + \frac{3}{2} P_{4,2} \right) \cos(2\phi - \beta_2) \right. \\
& + \varepsilon_1 \left\{ \left(\frac{2}{7} P_{2,1} - \frac{1}{2} P_{4,1} \right) \cos(\phi + \alpha_1 - \beta_2) + \frac{1}{2} P_{4,3} \cos(3\phi - \alpha_1 - \beta_2) \right\} \\
& + \varepsilon_2 \left\{ \left(\frac{4}{15} - \frac{8}{21} P_2 + \frac{4}{35} P_4 \right) \cos(\alpha_2 - \beta_2) + \frac{1}{2} P_{4,4} \cos(4\phi - \alpha_2 - \beta_2) \right\} \Big] \\
& - \bar{M} \left[\varepsilon \left(\frac{6}{5} + \frac{6}{7} P_2 - \frac{72}{35} P_4 \right) + \varepsilon_1 \left(\frac{3}{7} P_{2,1} - 6P_{4,1} \right) \cos(\phi - \alpha_1) \right. \\
& + \varepsilon_2 \left(-\frac{6}{7} P_{2,2} - 6P_{4,2} \right) \cos(2\phi - \alpha_2) \Big] \\
& - \bar{M}_1 \left[\varepsilon \left(\frac{3}{7} P_{2,1} - 6P_{4,1} \right) \cos(\phi - \beta_1) \right. \\
& + \varepsilon_1 \left\{ \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{7} P_2 + \frac{16}{35} P_4 \right) \cos(\alpha_1 - \beta_1) \right. \\
& + \left(\frac{3}{14} P_{2,2} - 2P_{4,2} \right) \cos(2\phi - \alpha_1 - \beta_1) \left. \vphantom{\left(\frac{2}{5} + \frac{1}{7} P_2 + \frac{16}{35} P_4 \right)} \right\} \\
& + \varepsilon_2 \left\{ \left(\frac{6}{7} P_{2,1} + 2P_{4,1} \right) \cos(\phi + \beta_1 - \alpha_2) - 2P_{4,3} \cos(3\phi - \beta_1 - \alpha_2) \right\} \Big] \\
& - \bar{M}_2 \left[\varepsilon \left(-\frac{6}{7} P_{2,2} - 6P_{4,2} \right) \cos(2\phi - \beta_2) \right. \\
& + \varepsilon_1 \left\{ \left(\frac{6}{7} P_{2,1} + 2P_{4,1} \right) \cos(\phi + \alpha_1 - \beta_2) - 2P_{4,3} \cos(3\phi - \alpha_1 - \beta_2) \right\} \\
& + \varepsilon_2 \left\{ \left(\frac{8}{5} - \frac{8}{7} P_2 - \frac{16}{35} P_4 \right) \cos(\alpha_2 - \beta_2) - 2P_{4,4} \cos(4\phi - \alpha_2 - \beta_2) \right\} \Big] \\
& + na W_2 \left[\varepsilon_1 \left(\frac{3}{5} P_{1,1} + 3P_{3,1} \right) \sin(\phi - \alpha_1) + 6\varepsilon_2 P_{3,2} \sin(2\phi - \alpha_2) \right] \\
& + na W_{2,1} \left[-\varepsilon \left(\frac{3}{5} P_{1,1} + 3P_{3,1} \right) \sin(\phi - \beta_1) + \varepsilon_1 \left(\frac{1}{5} P_1 + \frac{4}{5} P_3 \right) \sin(\alpha_1 - \beta_1) \right. \\
& + \varepsilon_2 \left\{ \left(\frac{2}{5} P_{1,1} - 3P_{3,1} \right) \sin(\phi + \beta_1 - \alpha_2) + P_{3,3} \sin(3\phi - \beta_1 - \alpha_2) \right\} \Big] \\
& + na W_{2,2} \left[-6\varepsilon P_{3,2} \sin(2\phi - \beta_2) \right. \\
& + \varepsilon_1 \left\{ \left(-\frac{2}{5} P_{1,1} + 3P_{3,1} \right) \sin(\phi + \alpha_1 - \beta_2) - P_{3,3} \sin(3\phi - \alpha_1 - \beta_2) \right\} \\
& + \frac{8}{5} \varepsilon_2 (P_1 - P_3) \sin(\alpha_2 - \beta_2) \Big]. \tag{82}
\end{aligned}$$

§37. When the applied forces are in equilibrium we can introduce sufficient subsidiary terms to give a perfect solution. Suppose, however, we do not at this stage introduce the conditions for equilibrium, and that in consequence there remain on the left-hand side of (73) what may be called the *uncompensated* terms $a_1 \sin \theta \cos \phi + b_1 \sin \theta \sin \phi + c_1 \cos \theta$. Then if we add $a_1 \sin \theta \cos \phi + b_1 \sin \theta \sin \phi + c_1 \cos \theta$ to the right-hand side of (73) and introduce the proper subsidiary terms on the left, we ought to obtain a satisfactory equation. This equation is as follows:

$$\begin{aligned}
& A_0 Y_0 + \{A_2(Y_2 + \delta Y_2) + B_2(Z_2 + \delta Z_2)\} P_2 + (A_2 Y_{2,1} + B_2 Z_{2,1}) X'_{2,1} \\
& + \{(A_2 \delta Y_{2,1} + B_2 \delta Z_{2,1}) \cos \phi + (A_2 \delta Y'_{2,1} + B_2 \delta Z'_{2,1}) \sin \phi\} P_{2,1} + (A_2 Y_{2,2} + B_2 Z_{2,2}) X'_{2,2} \\
& + \{(A_2 \delta Y_{2,2} + B_2 \delta Z_{2,2}) \cos 2\phi + (A_2 \delta Y'_{2,2} + B_2 \delta Z'_{2,2}) \sin 2\phi\} P_{2,2} \\
& + (A_3 Y_3 + B_3 Z_3) P_3 + \{(A_3 Y_{3,1} + B_3 Z_{3,1}) \cos \phi + (A_3 Y'_{3,1} + B_3 Z'_{3,1}) \sin \phi\} P_{3,1} \\
& + \{(A_3 Y_{3,2} + B_3 Z_{3,2}) \cos 2\phi + (A_3 Y'_{3,2} + B_3 Z'_{3,2}) \sin 2\phi\} P_{3,2} \\
& + \{(A_3 Y_{3,3} + B_3 Z_{3,3}) \cos 3\phi + (A_3 Y'_{3,3} + B_3 Z'_{3,3}) \sin 3\phi\} P_{3,3} \\
& + (A_4 Y_4 + B_4 Z_4) P_4 + \{(A_4 Y_{4,1} + B_4 Z_{4,1}) \cos \phi + (A_4 Y'_{4,1} + B_4 Z'_{4,1}) \sin \phi\} P_{4,1} \\
& + \{(A_4 Y_{4,2} + B_4 Z_{4,2}) \cos 2\phi + (A_4 Y'_{4,2} + B_4 Z'_{4,2}) \sin 2\phi\} P_{4,2} \\
& + \{(A_4 Y_{4,3} + B_4 Z_{4,3}) \cos 3\phi + (A_4 Y'_{4,3} + B_4 Z'_{4,3}) \sin 3\phi\} P_{4,3} \\
& + \{(A_4 Y_{4,4} + B_4 Z_{4,4}) \cos 4\phi + (A_4 Y'_{4,4} + B_4 Z'_{4,4}) \sin 4\phi\} P_{4,4} \\
& + (\varepsilon P_2 + \varepsilon_1 X_{2,1} + \varepsilon_2 X_{2,2}) a \frac{d}{da} (\bar{L} P_2 + \bar{L}_1 X'_{2,1} + \bar{L}_2 X'_{2,2}) \\
& - \frac{d}{d\theta} (\varepsilon P_2 + \varepsilon_1 X_{2,1} + \varepsilon_2 X_{2,2}) \left\{ \frac{d}{d\theta} (\bar{M} P_2 + \bar{M}_1 X'_{2,1} + \bar{M}_2 X'_{2,2}) \right. \\
& + \frac{na}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} (W_{2,1} X'_{2,1} + W_{2,2} X'_{2,2}) \left. \right\} \\
& - \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} (\varepsilon_1 X_{2,1} + \varepsilon_2 X_{2,2}) \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} (\bar{M}_1 X'_{2,1} + \bar{M}_2 X'_{2,2}) \right. \\
& - na \frac{d}{d\theta} (W_2 P_2 + W_{2,1} X'_{2,1} + W_{2,2} X'_{2,2}) \left. \right\} \\
& = (R_2 - L_2 V_2) P_2 + (R_{2,1} - L_2 V_{2,1}) X'_{2,1} + (R_{2,2} - L_2 V_{2,2}) X'_{2,2} \\
& + (a_1 \cos \phi + b_1 \sin \phi) P_{1,1} + C_1 P_1. \tag{83}
\end{aligned}$$

For the terms containing ε , ε_1 or ε_2 explicitly the equivalent value in harmonics is to be substituted from (82):

§38. In the first place we deduce from (83) as first approximations

$$A_2 Y_2 + B_2 Z_2 = R_2 - L_2 V_2 \dots, \tag{84}$$

$$A_2 Y_{2,1} + B_2 Z_{2,1} = R_{2,1} - L_2 V_{2,1} \dots, \tag{85}$$

$$A_2 Y_{2,2} + B_2 Z_{2,2} = R_{2,2} - L_2 V_{2,2} \dots \tag{86}$$

In the next place we pick out the constant term and the coefficients of the several harmonics in (83) and employ the well-known result that, supposing all the terms taken to one side of the equation, the coefficients of each surface harmonic must separately vanish. In this way we get

from the constant term,

$$A_0 Y_0 = -\frac{\varepsilon}{5} \left(a \frac{d\bar{L}}{da} - 6\bar{M} \right) - \frac{\varepsilon_1}{15} \cos(\alpha_1 - \beta_1) \left(a \frac{d\bar{L}_1}{da} - 6\bar{M}_1 \right) - \frac{4}{15} \varepsilon_2 \cos(\alpha_2 - \beta_2) \left(a \frac{d\bar{L}_2}{da} - 6\bar{M}_2 \right), \quad (87)$$

from coefficient of P_2 ,

$$A_2 \delta Y_2 + B_2 \delta Z_2 = -\frac{2}{7} \varepsilon \left(a \frac{d\bar{L}}{da} - 3\bar{M} \right) - \frac{1}{21} \varepsilon_1 \cos(\alpha_1 - \beta_1) \left(a \frac{d\bar{L}_1}{da} - 3\bar{M}_1 \right) + \frac{8}{21} \varepsilon_2 \cos(\alpha_2 - \beta_2) \left(a \frac{d\bar{L}_2}{da} - 3\bar{M}_2 \right), \quad (88)$$

from coefficient of $P_{2,1} \cos \phi$,

$$A_2 \delta Y_{2,1} + B_2 \delta Z_{2,1} = -\frac{1}{7} \varepsilon \cos \beta_1 \left(a \frac{d\bar{L}_1}{da} - 3\bar{M}_1 \right) - \frac{1}{7} \varepsilon_1 \left\{ \cos \alpha_1 \left(a \frac{d\bar{L}}{da} - 3\bar{M} \right) + 2 \cos(\alpha_1 - \beta_2) \left(a \frac{d\bar{L}_2}{da} - 3\bar{M}_2 \right) \right\} - \frac{2}{7} \varepsilon_2 \cos(\alpha_2 - \beta_1) \left(a \frac{d\bar{L}_1}{da} - 3\bar{M}_1 \right), \quad (89)$$

from coefficient of $P_{2,1} \sin \phi$,

$$A_2 \delta Y'_{2,1} + B_2 \delta Z'_{2,1} = -\frac{1}{7} \varepsilon \sin \beta_1 \left(a \frac{d\bar{L}_1}{da} - 3\bar{M}_1 \right) - \frac{1}{7} \varepsilon_1 \left\{ \sin \alpha_1 \left(a \frac{d\bar{L}}{da} - 3\bar{M} \right) + 2 \sin(\beta_2 - \alpha_1) \left(a \frac{d\bar{L}_2}{da} - 3\bar{M}_2 \right) \right\} - \frac{2}{7} \varepsilon_2 \sin(\alpha_2 - \beta_1) \left(a \frac{d\bar{L}_1}{da} - 3\bar{M}_1 \right), \quad (90)$$

from coefficient of $P_{2,2} \cos 2\phi$,

$$A_2 \delta Y_{2,2} + B_2 \delta Z_{2,2} = \frac{2}{7} \varepsilon \cos \beta_2 \left(a \frac{d\bar{L}_2}{da} - 3\bar{M}_2 \right) - \frac{1}{14} \varepsilon_1 \cos(\alpha_1 + \beta_1) \left(a \frac{d\bar{L}_1}{da} - 3\bar{M}_1 \right) + \frac{2}{7} \varepsilon_2 \cos \alpha_2 \left(a \frac{d\bar{L}}{da} - 3\bar{M} \right), \quad (91)$$

from coefficient of $P_{2,2} \sin 2\phi$,

$$A_2 \delta Y'_{2,2} + B_2 \delta Z'_{2,2} = \frac{2}{7} \varepsilon \sin \beta_2 \left(a \frac{d\bar{L}_2}{da} - 3\bar{M}_2 \right) - \frac{1}{14} \varepsilon_1 \sin(\alpha_1 + \beta_1) \left(a \frac{d\bar{L}_1}{da} - 3\bar{M}_1 \right) + \frac{2}{7} \varepsilon_2 \sin \alpha_2 \left(a \frac{d\bar{L}}{da} - 3\bar{M} \right), \quad (92)$$

from coefficient of P_3 ,

$$A_3 Y_3 + B_3 Z_3 = \frac{4}{5} na \{ -\varepsilon_1 W_{2,1} \sin(\alpha_1 - \beta_1) + 2\varepsilon_2 W_{2,2} \sin(\alpha_2 - \beta_2) \}, \quad (93)$$

from coefficient of $P_{3,1} \cos \phi$,

$$A_3 Y_{3,1} + B_3 Z_{3,1} = 3na \{ -\varepsilon \sin \beta_1 W_{2,1} + \varepsilon_1 (\sin \alpha_1 W_2 + \sin(\beta_2 - \alpha_1) W_{2,2}) - \varepsilon_2 \sin(\alpha_2 - \beta_1) W_{2,1} \}, \quad (94)$$

from coefficient of $P_{3,1} \sin \phi$,

$$A_3 Y'_{3,1} + B_3 Z'_{3,1} = 3na \{ \varepsilon \cos \beta_1 W_{2,1} - \varepsilon_1 (\cos \alpha_1 W_2 + \cos(\beta_2 - \alpha_1) W_{2,2}) + \varepsilon_2 \cos(\alpha_2 - \beta_1) W_{2,1} \}, \quad (95)$$

from coefficient of $P_{3,2} \cos 2\phi$,

$$A_3 Y_{3,2} + B_3 Z_{3,2} = 6na (-\varepsilon \sin \beta_2 W_{2,2} + \varepsilon_2 \sin \alpha_2 W_2), \quad (96)$$

from coefficient of $P_{3,2} \sin 2\phi$,

$$A_3 Y'_{3,2} + B_3 Z'_{3,2} = 6na (\varepsilon \cos \beta_2 W_{2,2} - \varepsilon_2 \cos \alpha_2 W_2), \quad (97)$$

from coefficient of $P_{3,3} \cos 3\phi$,

$$A_3 Y_{3,3} + B_3 Z_{3,3} = na \{ -\varepsilon_1 \sin(\beta_2 + \alpha_1) W_{2,2} + \varepsilon_2 \sin(\alpha_2 + \beta_1) W_{2,1} \}, \quad (98)$$

from coefficient of $P_{3,3} \sin 3\phi$,

$$A_3 Y'_{3,3} + B_3 Z'_{3,3} = na \{ \varepsilon_1 \cos(\beta_2 + \alpha_1) W_{2,2} - \varepsilon_2 \cos(\alpha_2 + \beta_1) W_{2,1} \}, \quad (99)$$

from coefficient of P_4 ,

$$A_4 Y_4 + B_4 Z_4 = -\frac{18}{35} \varepsilon \left(a \frac{d\bar{L}}{da} + 4\bar{M} \right) + \frac{4}{35} \varepsilon_1 \cos(\alpha_1 - \beta_1) \left(a \frac{d\bar{L}_1}{da} + 4\bar{M}_1 \right) - \frac{4}{35} \varepsilon_2 \cos(\alpha_2 - \beta_2) \left(a \frac{d\bar{L}_2}{da} + 4\bar{M}_2 \right), \quad (100)$$

from coefficient of $P_{4,1} \cos \phi$,

$$A_4 Y_{4,1} + B_4 Z_{4,1} = -\frac{3}{2} \varepsilon \cos \beta_1 \left(a \frac{d\bar{L}_1}{da} + 4\bar{M}_1 \right) + \varepsilon_1 \left\{ -\frac{3}{2} \cos \alpha_1 \left(a \frac{d\bar{L}}{da} + 4\bar{M} \right) + \frac{1}{2} \cos(\beta_2 - \alpha_1) \left(a \frac{d\bar{L}_2}{da} + 4\bar{M}_2 \right) \right\} + \frac{1}{2} \varepsilon_2 \cos(\alpha_2 - \beta_1) \left(a \frac{d\bar{L}_1}{da} + 4\bar{M}_1 \right), \quad (101)$$

from coefficient of $P_{4,1} \sin \phi$,

$$A_4 Y'_{4,1} + B_4 Z'_{4,1} = -\frac{3}{2} \varepsilon \sin \beta_1 \left(a \frac{d\bar{L}_1}{da} + 4\bar{M}_1 \right) + \varepsilon_1 \left\{ -\frac{3}{2} \sin \alpha_1 \left(a \frac{d\bar{L}}{da} + 4\bar{M} \right) + \frac{1}{2} \sin(\beta_2 - \alpha_1) \left(a \frac{d\bar{L}_2}{da} + 4\bar{M}_2 \right) \right\} + \frac{1}{2} \varepsilon_2 \sin(\alpha_2 - \beta_1) \left(a \frac{d\bar{L}_1}{da} + 4\bar{M}_1 \right), \quad (102)$$

from coefficient of $P_{4,2} \cos 2\phi$,

$$A_4 Y_{4,2} + B_4 Z_{4,2} = -\frac{3}{2} \varepsilon \cos \beta_2 \left(a \frac{d\bar{L}_2}{da} + 4\bar{M}_2 \right) - \frac{1}{2} \varepsilon_1 \cos (\alpha_1 + \beta_1) \left(a \frac{d\bar{L}_1}{da} + 4\bar{M}_1 \right) - \frac{3}{2} \varepsilon_2 \cos \alpha_2 \left(a \frac{d\bar{L}}{da} + 4\bar{M} \right), \quad (103)$$

from coefficient of $P_{4,2} \sin 2\phi$,

$$A_4 Y'_{4,2} + B_4 Z'_{4,2} = -\frac{3}{2} \varepsilon \sin \beta_2 \left(a \frac{d\bar{L}_2}{da} + 4\bar{M}_2 \right) - \frac{1}{2} \varepsilon_1 \sin (\alpha_1 + \beta_1) \left(a \frac{d\bar{L}_1}{da} + 4\bar{M}_1 \right) - \frac{3}{2} \varepsilon_2 \sin \alpha_2 \left(a \frac{d\bar{L}}{da} + 4\bar{M} \right), \quad (104)$$

from coefficient of $P_{4,3} \cos 3\phi$,

$$A_4 Y_{4,3} + B_4 Z_{4,3} = -\frac{1}{2} \varepsilon_1 \cos (\alpha_1 + \beta_2) \left(a \frac{d\bar{L}_2}{da} + 4\bar{M}_2 \right) - \frac{1}{2} \varepsilon_2 \cos (\beta_1 + \alpha_2) \left(a \frac{d\bar{L}_1}{da} + 4\bar{M}_1 \right), \quad (105)$$

from coefficient of $P_{4,3} \sin 3\phi$,

$$A_4 Y'_{4,3} + B_4 Z'_{4,3} = -\frac{1}{2} \varepsilon_1 \sin (\alpha_1 + \beta_2) \left(a \frac{d\bar{L}_2}{da} + 4\bar{M}_2 \right) - \frac{1}{2} \varepsilon_2 \sin (\beta_1 + \alpha_2) \left(a \frac{d\bar{L}_1}{da} + 4\bar{M}_1 \right), \quad (106)$$

from coefficient of $P_{4,4} \cos 4\phi$,

$$A_4 Y_{4,4} + B_4 Z_{4,4} = -\frac{1}{2} \varepsilon_2 \cos (\alpha_2 + \beta_2) \left(a \frac{d\bar{L}_2}{da} + 4\bar{M}_2 \right), \quad (107)$$

from coefficient of $P_{4,4} \sin 4\phi$,

$$A_4 Y'_{4,4} + B_4 Z'_{4,4} = -\frac{1}{2} \varepsilon_2 \sin (\alpha_2 + \beta_2) \left(a \frac{d\bar{L}_2}{da} + 4\bar{M}_2 \right). \quad (108)$$

Lastly, coming to the uncompensated terms, we have

from coefficient of $P_{1,1} \cos \phi$,

$$a_1 = \frac{1}{5} na [3 (\varepsilon \sin \beta_1 W_{2,1} - \varepsilon_1 \sin \alpha_1 W_2) + 2 \{ \varepsilon_1 \sin (\beta_2 - \alpha_1) W_{2,2} - \varepsilon_2 \sin (\alpha_2 - \beta_1) W_{2,1} \}], \quad (109)$$

from coefficient of $P_{1,1} \sin \phi$,

$$b_1 = \frac{1}{5} na [3 (\varepsilon_1 \cos \alpha_1 W_2 - \varepsilon \cos \beta_1 W_{2,1}) + 2 \{ \varepsilon_2 \cos (\alpha_2 - \beta_1) W_{2,1} - \varepsilon_1 \cos (\beta_2 - \alpha_1) W_{2,2} \}], \quad (110)$$

from coefficient of P_1 ,

$$c_1 = \frac{1}{5} na \{ \varepsilon_1 \sin (\alpha_1 - \beta_1) W_{2,1} + 8 \varepsilon_2 \sin (\alpha_2 - \beta_2) W_{2,2} \}. \quad (111)$$

§39. In the second surface condition (74), that portion of the terms on the left which contains ε , ε_1 or ε_2 explicitly is in its original form the left-hand side, and in its final form—as supplied by the use of such of the results (7) to (67) as apply to the second surface condition—the right-hand side of the following identity:

$$\begin{aligned}
 & (\varepsilon P_2 + \varepsilon_1 X_{2,1} + \varepsilon_2 X_{2,2}) a \frac{d}{da} \frac{d}{d\theta} (\overline{M}P_2 + \overline{M}_1 X'_{2,1} + \overline{M}_2 X'_{2,2}) \\
 & - \frac{d}{d\theta} (\varepsilon P_2 + \varepsilon_1 X_{2,1} + \varepsilon_2 X_{2,2}) \left\{ \overline{N}P_2 + \overline{N}_1 X'_{2,1} + \overline{N}_2 X'_{2,2} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{d^2}{d\theta^2} (\overline{O}P_2 + \overline{O}_1 X'_{2,1} + \overline{O}_2 X'_{2,2}) \right\} \\
 & - \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} (\varepsilon_1 X_{2,1} + \varepsilon_2 X_{2,2}) \frac{d^2}{d\theta d\phi} \{ \operatorname{cosec} \theta (\overline{O}_1 X'_{2,1} + \overline{O}_2 X'_{2,2}) \} \\
 & + (\varepsilon P_2 + \varepsilon_1 X_{2,1} + \varepsilon_2 X_{2,2}) a \frac{d}{da} \left\{ na \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} (W_{2,1} X'_{2,1} + W_{2,2} X'_{2,2}) \right\} \\
 & - \frac{d}{d\theta} (\varepsilon P_2 + \varepsilon_1 X_{2,1} + \varepsilon_2 X_{2,2}) 2na \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} \right) (W_{2,1} X'_{2,1} + W_{2,2} X'_{2,2}) \\
 & - \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} (\varepsilon_1 X_{2,1} + \varepsilon_2 X_{2,2}) \left\{ -na \left(6 + 2 \frac{d^2}{d\theta^2} \right) (W_{2,1} P_2 + W_{2,1} X'_{2,1} + W_{2,2} X'_{2,2}) \right\} \\
 & \equiv a \frac{d\overline{M}}{da} \left[\varepsilon \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{7} P_2 + \frac{9}{35} P_4 \right) + \varepsilon_1 \left\{ \frac{d}{d\theta} \left(-\frac{3}{56} P_{2,1} + \frac{3}{4} P_{4,1} \right) \cos(\phi - \alpha_1) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} \left(-\frac{3}{5} P_{1,1} \sin(\phi - \alpha_1) \right) \right\} \right. \\
 & \quad \left. + \varepsilon_2 \frac{d}{d\theta} \left(-\frac{9}{14} P_{2,2} + \frac{3}{4} P_{4,2} \right) \cos(2\phi - \alpha_2) \right] \\
 & + a \frac{d\overline{M}_1}{da} \left[\varepsilon \left\{ \frac{d}{d\theta} \left(\frac{11}{56} P_{2,1} + \frac{3}{4} P_{4,1} \right) \cos(\phi - \beta_1) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} \left(\frac{3}{8} P_{1,1} \sin(\phi - \beta_1) \right) \right\} \right. \\
 & \quad \left. + \varepsilon_1 \frac{d}{d\theta} \left\{ \left(\frac{1}{42} P_2 - \frac{2}{35} P_4 \right) \cos(\alpha_1 - \beta_1) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \left(\frac{1}{28} P_{2,2} + \frac{1}{4} P_{4,2} \right) \cos(2\phi - \alpha_1 - \beta_1) \right\} \right. \\
 & \quad \left. + \varepsilon_2 \left\{ \frac{d}{d\theta} \left(\left(\frac{15}{56} P_{2,1} - \frac{1}{4} P_{4,1} \right) \cos(\phi + \beta_1 - \alpha_2) + \frac{1}{4} P_{4,3} \cos(3\phi - \beta_1 - \alpha_2) \right) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} \left(-\frac{1}{8} P_{1,1} \sin(\phi + \beta_1 - \alpha_2) - \frac{1}{12} P_{3,3} \sin(3\phi - \beta_1 - \alpha_2) \right) \right\} \right] \\
 & + a \frac{d\overline{M}_2}{da} \left[\varepsilon \frac{d}{d\theta} \left(\frac{5}{14} P_{2,2} + \frac{3}{4} P_{4,2} \right) \cos(2\phi - \beta_2) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \varepsilon_1 \left\{ \frac{d}{d\theta} \left(\left(\frac{1}{56} P_{2,1} - \frac{1}{4} P_{4,1} \right) \cos(\phi - \beta_2 + \alpha_1) + \frac{1}{4} P_{4,3} \cos(3\phi - \alpha_1 - \beta_2) \right) \right. \\
& + \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} \left(\frac{1}{8} P_{1,1} \sin(\phi - \beta_2 + \alpha_1) + \frac{1}{12} P_{3,3} \sin(3\phi - \alpha_1 - \beta_2) \right) \Big\} \\
& + \varepsilon_2 \frac{d}{d\theta} \left\{ \left(-\frac{4}{21} P_2 + \frac{2}{35} P_4 \right) \cos(\alpha_2 - \beta_2) + \frac{1}{4} P_{4,4} \cos(4\phi - \alpha_2 - \beta_2) \right\} \Big] \\
& - \bar{N} \left[\varepsilon \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{7} P_2 + \frac{9}{35} P_4 \right) + \varepsilon_1 \left\{ \frac{d}{d\theta} \left(\frac{11}{56} P_{2,1} + \frac{3}{4} P_{4,1} \right) \cos(\phi - \alpha_1) \right. \right. \\
& + \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} \left(\frac{3}{8} P_{1,1} \sin(\phi - \alpha_1) \right) \Big\} + \varepsilon_2 \frac{d}{d\theta} \left(\frac{5}{14} P_{2,2} + \frac{3}{4} P_{4,2} \right) \cos(2\phi - \alpha_2) \Big] \\
& - \bar{N}_1 \left[\varepsilon \left\{ \frac{d}{d\theta} \left(-\frac{3}{56} P_{2,1} + \frac{3}{4} P_{4,1} \right) \cos(\phi - \beta_1) \right. \right. \\
& + \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} \left(-\frac{3}{8} P_{1,1} \sin(\phi - \beta_1) \right) \Big\} \\
& + \varepsilon_1 \frac{d}{d\theta} \left\{ \left(\frac{1}{42} P_2 - \frac{2}{35} P_4 \right) \cos(\alpha_1 - \beta_1) \right. \\
& + \left(\frac{1}{28} P_{2,2} + \frac{1}{4} P_{4,2} \right) \cos(2\phi - \alpha_1 - \beta_1) \Big\} \\
& + \varepsilon_2 \left\{ \frac{d}{d\theta} \left(\left(\frac{1}{56} P_{2,1} - \frac{1}{4} P_{4,1} \right) \cos(\phi - \alpha_2 + \beta_1) + \frac{1}{4} P_{4,3} \cos(3\phi - \alpha_2 - \beta_1) \right) \right. \\
& + \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} \left(\frac{1}{8} P_{1,1} \sin(\phi - \alpha_2 + \beta_1) + \frac{1}{12} P_{3,3} \sin(3\phi - \alpha_2 - \beta_1) \right) \Big\} \Big] \\
& - \bar{N}_2 \left[\varepsilon \frac{d}{d\theta} \left(-\frac{9}{14} P_{2,2} + \frac{3}{4} P_{4,2} \right) \cos(2\phi - \beta_2) \right. \\
& + \varepsilon_1 \left\{ \frac{d}{d\theta} \left(\left(\frac{15}{56} P_{2,1} - \frac{1}{4} P_{4,1} \right) \cos(\phi - \beta_2 + \alpha_1) + \frac{1}{4} P_{4,3} \cos(3\phi - \beta_2 - \alpha_1) \right) \right. \\
& + \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} \left(-\frac{1}{8} P_{1,1} \sin(\phi - \beta_2 + \alpha_1) - \frac{1}{12} P_{3,3} \sin(3\phi - \beta_2 - \alpha_1) \right) \Big\} \\
& + \varepsilon_2 \frac{d}{d\theta} \left\{ \left(-\frac{4}{21} P_2 + \frac{2}{35} P_4 \right) \cos(\alpha_2 - \beta_2) + \frac{1}{4} P_{4,4} \cos(4\phi - \alpha_2 - \beta_2) \right\} \Big] \\
& - \bar{O} \left[\varepsilon \frac{d}{d\theta} \left(\frac{3}{7} P_2 - \frac{36}{35} P_4 \right) + \varepsilon_1 \left\{ \frac{d}{d\theta} \left(\frac{3}{14} P_{2,1} - 3P_{4,1} \right) \cos(\phi - \alpha_1) \right. \right. \\
& + \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} \left(-\frac{3}{2} P_{1,1} \sin(\phi - \alpha_1) \right) \Big\} + \varepsilon_2 \frac{d}{d\theta} \left(-\frac{3}{7} P_{2,2} - 3P_{4,2} \right) \cos(2\phi - \alpha_2) \Big] \\
& - \bar{O}_1 \left[\varepsilon \left\{ \frac{d}{d\theta} \left(\frac{3}{14} P_{2,1} - 3P_{4,1} \right) \cos(\phi - \beta_1) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} \left(\frac{3}{2} P_{1,1} \sin(\phi - \beta_1) \right) \right\} \right. \\
& + \varepsilon_1 \frac{d}{d\theta} \left\{ \left(\frac{1}{14} P_2 + \frac{8}{35} P_4 \right) \cos(\alpha_1 - \beta_1) + \left(\frac{3}{28} P_{2,2} - P_{4,2} \right) \cos(2\phi - \alpha_1 - \beta_1) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \varepsilon_2 \left\{ \frac{d}{d\theta} \left(\left(\frac{3}{7} P_{2,1} + P_{4,1} \right) \cos(\phi - \alpha_2 + \beta_1) - P_{4,3} \cos(3\phi - \alpha_2 - \beta_1) \right) \right. \\
 & \left. + \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} \left(-P_{1,1} \sin(\phi - \alpha_2 + \beta_1) \right) \right\}] \\
 & - \overline{O}_2 \left[\varepsilon \frac{d}{d\theta} \left(-\frac{3}{7} P_{2,2} - 3P_{4,2} \right) \cos(2\phi - \beta_2) \right. \\
 & + \varepsilon_1 \left\{ \frac{d}{d\theta} \left(\left(\frac{3}{7} P_{2,1} + P_{4,1} \right) \cos(\phi - \beta_2 + \alpha_1) - P_{4,3} \cos(3\phi - \beta_2 - \alpha_1) \right) \right. \\
 & \left. + \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} \left(P_{1,1} \sin(\phi - \beta_2 + \alpha_1) \right) \right\} \\
 & + \varepsilon_2 \frac{d}{d\theta} \left\{ -\left(\frac{4}{7} P_2 + \frac{8}{35} P_4 \right) \cos(\alpha_2 - \beta_2) - P_{4,4} \cos(4\phi - \alpha_2 - \beta_2) \right\}] \\
 & + na W_2 \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} \left[\varepsilon_1 \left(\frac{12}{7} P_{2,1} - 3P_{4,1} \right) \cos(\phi - \alpha_1) \right. \\
 & \left. + \varepsilon_2 \left(\frac{18}{7} P_{2,2} - 3P_{4,2} \right) \cos(2\phi - \alpha_2) \right] \\
 & + na W_{2,1} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} \left\{ \varepsilon \left(-\frac{23}{7} P_{2,1} + \frac{15}{2} P_{4,1} \right) \cos(\phi - \beta_1) \right. \right. \\
 & \left. + \varepsilon_1 \left(-\frac{11}{28} P_{2,2} + \frac{3}{4} P_{4,2} \right) \cos(2\phi - \alpha_1 - \beta_1) \right. \\
 & \left. + \varepsilon_2 \left(\left(-\frac{18}{7} P_{2,1} + \frac{9}{2} P_{4,1} \right) \cos(\phi - \alpha_2 + \beta_1) + \frac{1}{6} P_{4,3} \cos(3\phi - \alpha_2 - \beta_1) \right) \right\} \\
 & \left. + \frac{d}{d\theta} \left\{ \varepsilon_1 \left(-\frac{3}{10} P_1 + \frac{7}{15} P_3 \right) \sin(\alpha_1 - \beta_1) \right\} \right] \\
 & + na W_{2,2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} \left\{ \varepsilon \left(\frac{4}{7} P_{2,2} + \frac{15}{2} P_{4,2} \right) \cos(2\phi - \beta_2) \right. \right. \\
 & \left. + \varepsilon_1 \left(-\left(\frac{4}{7} P_{2,1} + 6P_{4,1} \right) \cos(\phi - \beta_2 + \alpha_1) + \frac{4}{3} P_{4,3} \cos(3\phi - \beta_2 - \alpha_1) \right) \right. \\
 & \left. + \varepsilon_2 \cdot \frac{3}{4} P_{4,4} \cos(4\phi - \alpha_2 - \beta_2) \right\} \\
 & \left. + \frac{d}{d\theta} \left\{ -\varepsilon_2 \left(\frac{12}{5} P_1 + \frac{14}{15} P_3 \right) \sin(\alpha_2 - \beta_2) \right\} \right]. \tag{112}
 \end{aligned}$$

§40. The terms remaining "uncompensated" on the left of the second surface equation may be written as

$$\cos \theta (a_2 \cos \phi + b_2 \sin \phi) + d_2 \cos \phi + e_2 \sin \phi + c_2 \sin \theta,$$

or

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} [(a_2 \sin \phi - b_2 \cos \phi) P_{2,1} + (d_2 \sin \phi - e_2 \cos \phi) P_{1,1}] - c_2 \frac{dP_1}{d\theta},$$

where a_2 , b_2 , etc., are constants.

In the subsidiary terms we make use of the alternative forms (68)–(72) to transform the coefficients of the arbitrary constants whose first suffix is 3, excepting $\frac{dP_3}{d\theta}$ and $\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} P_{3,3} (W_{3,3} \cos 3\phi + W'_{3,3} \sin 3\phi)$. We write, for instance,

$$(C_3 Y_{3,3} + D_3 Z_{3,3}) \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} (P_{4,3} \sin 3\phi) \text{ for } (C_3 Y_{3,3} + D_3 Z_{3,3}) \frac{d}{d\theta} (P_{3,3} \cos 3\phi),$$

and

$$W'_{3,1} \left\{ \frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} (P_{2,1} \cos \phi) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} \left(\frac{3}{10} P_{1,1} \sin \phi \right) \right\} \text{ for } W'_{3,1} \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} (P_{3,1} \sin \phi).$$

Thus the full form of the second surface equation is

$$\begin{aligned} & \{ C_2 (Y_2 + \delta Y_2) + D_2 (Z_2 + \delta Z_2) \} \frac{dP_2}{d\theta} + (C_2 Y_{2,1} + D_2 Z_{2,1}) \frac{dX'_{2,1}}{d\theta} \\ & + \{ (C_2 \delta Y_{2,1} + D_2 \delta Z_{2,1}) \cos \phi + (C_2 \delta Y'_{2,1} + D_2 \delta Z'_{2,1}) \sin \phi \} \frac{dP_{2,1}}{d\theta} \\ & + (C_2 Y_{2,2} + D_2 Z_{2,2}) \frac{dX'_{2,2}}{d\theta} + \{ (C_2 \delta Y_{2,2} + D_2 \delta Z_{2,2}) \cos 2\phi \\ & + (C_2 \delta Y'_{2,2} + D_2 \delta Z'_{2,2}) \sin 2\phi \} \frac{dP_{2,2}}{d\theta} + (C_3 Y_3 + D_3 Z_3) \frac{dP_3}{d\theta} \\ & + \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} \left[\left(-\frac{32}{35} P_{2,1} + 3P_{4,1} \right) \{ (C_3 Y_{3,1} + D_3 Z_{3,1}) \sin \phi \right. \\ & \left. - (C_3 Y'_{3,1} + D_3 Z'_{3,1}) \cos \phi \} \right. \\ & + \left(-\frac{2}{7} P_{2,2} + \frac{3}{2} P_{4,2} \right) \{ (C_3 Y_{3,2} + D_3 Z_{3,2}) \sin 2\phi - (C_3 Y'_{3,2} + D_3 Z'_{3,2}) \cos 2\phi \} \\ & \left. + P_{4,3} \{ (C_3 Y_{3,3} + D_3 Z_{3,3}) \sin 3\phi - (C_3 Y'_{3,3} + D_3 Z'_{3,3}) \cos 3\phi \} \right] \\ & + \frac{d}{d\theta} [(C_4 Y_4 + D_4 Z_4) P_4 + P_{4,1} \{ (C_4 Y_{4,1} + D_4 Z_{4,1}) \cos \phi + (C_4 Y'_{4,1} + D_4 Z'_{4,1}) \sin \phi \} \\ & + P_{4,2} \{ (C_4 Y_{4,2} + D_4 Z_{4,2}) \cos 2\phi + (C_4 Y'_{4,2} + D_4 Z'_{4,2}) \sin 2\phi \} \\ & + P_{4,3} \{ (C_4 Y_{4,3} + D_4 Z_{4,3}) \cos 3\phi + (C_4 Y'_{4,3} + D_4 Z'_{4,3}) \sin 3\phi \} \\ & + P_{4,4} \{ (C_4 Y_{4,4} + D_4 Z_{4,4}) \cos 4\phi + (C_4 Y'_{4,4} + D_4 Z'_{4,4}) \sin 4\phi \}] \\ & + na \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} (W_{2,1} X'_{2,1} + W_{2,2} X'_{2,2}) \\ & + na \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} [P_{3,1} (\delta W_{2,1} \cos \phi + \delta W'_{2,1} \sin \phi) \\ & + P_{2,2} (\delta W_{2,2} \cos 2\phi + \delta W'_{2,2} \sin 2\phi)] \\ & + 2ma^3 \frac{d}{d\theta} \left[\frac{1}{2} P_{2,1} (-W_{3,1} \sin \phi + W'_{3,1} \cos \phi) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + P_{2,2}(-W_{3,2} \sin 2\phi + W'_{3,2} \cos 2\phi) \\
& + 2na^3 \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} \left[\frac{3}{10} P_{1,1}(W_{3,1} \cos \phi + W'_{3,1} \sin \phi) \right. \\
& + P_{3,3}(W_{3,3} \cos 3\phi + W'_{3,3} \sin 3\phi) \\
& + 3na^3 \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} [P_{4,1}(W_{4,1} \cos \phi + W'_{4,1} \sin \phi) + P_{4,2}(W_{4,2} \cos 2\phi + W'_{4,2} \sin 2\phi) \\
& + P_{4,3}(W_{4,3} \cos 3\phi + W'_{4,3} \sin 3\phi) + P_{4,4}(W_{4,4} \cos 4\phi + W'_{4,4} \sin 4\phi)] \\
& + \text{expression on right-hand side of (112)} \\
& = \frac{d}{d\theta} \left\{ (\Theta_2 - M_2 V_2) P_2 + (\Theta_{2,1} - M_2 V_{2,1}) X'_{2,1} + (\Theta_{2,2} - M_2 V_{2,2}) X'_{2,2} \right\} \\
& + \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} (\Phi_{2,1} X'_{2,1} + \Phi_{2,2} X'_{2,2}) - c_2 \frac{dP_1}{d\theta} \\
& + \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} \left\{ P_{2,1}(a_2 \sin \phi - b_2 \cos \phi) + P_{1,1}(d_2 \sin \phi - e_2 \cos \phi) \right\}. \quad (113)
\end{aligned}$$

§41. Supposing for a moment all the terms taken to one side of the equation, we equate to zero the coefficient of each separate differential coefficient, the justification being practically the same as in the corresponding case in Sect. I.

In reality, the second and third surface conditions can hardly be treated apart. The one for instance contains terms such as

$$A_s \frac{dT_s}{d\theta}, \quad A'_s \frac{1}{\sin \theta} \frac{dT'_s}{d\phi},$$

the other corresponding terms, such as

$$A_s \frac{1}{\sin \theta} \frac{dT_s}{d\phi}, \quad A'_s \frac{dT'_s}{d\theta},$$

where for the moment A_s, A'_s represent coefficients independent of θ and ϕ answering to surface harmonics T_s, T'_s . In a good many instances, however, the identity of the corresponding coefficients in the two equations is not apparent; it thus seemed best to write down as if independent the equations obtained from the two surface conditions. Their identity will be clear enough subsequently.

§42. From the principal terms we have for the first approximations

$$C_2 Y_2 + D_2 Z_2 = \Theta_2 - M_2 V_2, \quad (114)$$

$$C_2 Y_{2,1} + D_2 Z_{2,1} = \Theta_{2,1} - M_2 V_{2,1}, \quad (115)$$

$$C_2 Y_{2,2} + D_2 Z_{2,2} = \Theta_{2,2} - M_2 V_{2,2}, \quad (116)$$

$$W_{2,1} = \frac{1}{na} \Phi_{2,1}, \quad (117)$$

$$W_{2,2} = \frac{1}{na} \Phi_{2,2}. \quad (118)$$

The same results are also, it need hardly be said, deducible as first approximations from the third surface equation. Taken along with (84), (85) and (86), they suffice to determine the first approximations Y_2 , Z_2 , $Y_{2,1}$, $Z_{2,1}$, $Y_{2,2}$, $Z_{2,2}$, as well as $W_{2,1}$, $W_{2,2}$. The values thus found are then to be substituted in terms containing ε , ε_1 or ε_2 to get the values of the constant coefficients of the subsidiary terms.

§43. The source of the several equations for the subsidiary constants is indicated below. We have

from coefficient of $\frac{dP_2}{d\theta}$,

$$\begin{aligned} C_2 \delta Y_2 + D_2 \delta Z_2 = & -\frac{1}{7} \varepsilon \left(a \frac{d\bar{M}}{da} - \bar{N} - 3\bar{O} \right) \\ & - \frac{1}{42} \varepsilon_1 \cos(\alpha_1 - \beta_1) \left(a \frac{d\bar{M}_1}{da} - \bar{N}_1 - 3\bar{O}_1 \right) \\ & + \frac{4}{21} \varepsilon_2 \cos(\alpha_2 - \beta_2) \left(a \frac{d\bar{M}_2}{da} - \bar{N}_2 - 3\bar{O}_2 \right), \end{aligned} \quad (119)$$

from coefficient of $\frac{dP_{2,1}}{d\theta} \cos \phi$,

$$\begin{aligned} C_2 \delta Y_{2,1} + D_2 \delta Z_{2,1} = & \frac{1}{56} \varepsilon_1 \cos \alpha_1 \left(3a \frac{d\bar{M}}{da} + 11\bar{N} + 12\bar{O} \right) \\ & - \frac{1}{56} \varepsilon \cos \beta_1 \left(11a \frac{d\bar{M}_1}{da} + 3\bar{N}_1 - 12\bar{O}_1 \right) - \frac{1}{56} \varepsilon_2 \cos(\alpha_2 - \beta_1) \left(15a \frac{d\bar{M}_2}{da} - \bar{N}_1 - 24\bar{O}_1 \right) \\ & - \frac{1}{56} \varepsilon_1 \cos(\beta_2 - \alpha_1) \left(a \frac{d\bar{M}_2}{da} - 15\bar{N}_2 - 24\bar{O}_2 \right) - na^2 W'_{2,1}, \end{aligned} \quad (120)$$

from coefficient of $\frac{dP_{2,1}}{d\theta} \sin \phi$,

$$\begin{aligned} C_2 \delta Y'_{2,1} + D_2 \delta Z'_{2,1} &= \frac{1}{56} \varepsilon_1 \sin \alpha_1 \left(3a \frac{d\bar{M}}{da} + 11\bar{N} + 12\bar{O} \right) \\ &\quad - \frac{1}{56} \varepsilon \sin \beta_1 \left(11a \frac{d\bar{M}_1}{da} + 3\bar{N}_1 - 12\bar{O}_1 \right) - \frac{1}{56} \varepsilon_2 \sin (\alpha_2 - \beta_1) \left(15a \frac{d\bar{M}_1}{da} - \bar{N}_1 - 24\bar{O}_1 \right) \\ &\quad - \frac{1}{56} \varepsilon_1 \sin (\beta_2 - \alpha_1) \left(a \frac{d\bar{M}_2}{da} - 15\bar{N}_2 - 24\bar{O}_2 \right) + na^2 W_{3,1}, \end{aligned} \quad (121)$$

from coefficient of $\frac{dP_{2,2}}{d\theta} \cos 2\phi$,

$$\begin{aligned} C_2 \delta Y_{2,2} + D_2 \delta Z_{2,2} &= \frac{1}{14} \varepsilon_2 \cos \alpha_2 \left(9a \frac{d\bar{M}}{da} + 5\bar{N} - 6\bar{O} \right) \\ &\quad - \frac{1}{28} \varepsilon_1 \cos (\alpha_1 + \beta_1) \left(a \frac{d\bar{M}_1}{da} - \bar{N}_1 - 3\bar{O}_1 \right) \\ &\quad - \frac{1}{14} \varepsilon \cos \beta_2 \left(5a \frac{d\bar{M}_2}{da} + 9\bar{N}_2 + 6\bar{O}_2 \right) - 2na^2 W'_{3,2}, \end{aligned} \quad (122)$$

from coefficient of $\frac{dP_{2,2}}{d\theta} \sin 2\phi$,

$$\begin{aligned} C_2 \delta Y'_{2,2} + D_2 \delta Z'_{2,2} &= \frac{1}{14} \varepsilon_2 \sin \alpha_2 \left(9a \frac{d\bar{M}}{da} + 5\bar{N} - 6\bar{O} \right) \\ &\quad - \frac{1}{28} \varepsilon_1 \sin (\alpha_1 + \beta_1) \left(a \frac{d\bar{M}_1}{da} - \bar{N}_1 - 3\bar{O}_1 \right) \\ &\quad - \frac{1}{14} \varepsilon \sin \beta_2 \left(5a \frac{d\bar{M}_2}{da} + 9\bar{N}_2 + 6\bar{O}_2 \right) + 2na^2 W_{3,2}, \end{aligned} \quad (123)$$

from coefficient of $\frac{dP_3}{d\theta}$,

$$C_3 Y_3 + D_3 Z_3 = na \left\{ -\frac{7}{15} \varepsilon_1 \sin (\alpha_1 - \beta_1) W_{2,1} + \frac{14}{15} \varepsilon_2 \sin (\alpha_2 - \beta_2) W_{2,2} \right\}, \quad (124)$$

from coefficient of $\frac{dP_4}{d\theta}$,

$$\begin{aligned} C_4 Y_4 + D_4 Z_4 &= -\frac{9}{45} \varepsilon \left(a \frac{d\bar{M}}{da} - \bar{N} + 4\bar{O} \right) + \frac{2}{35} \varepsilon_1 \cos (\alpha_1 - \beta_1) \left(a \frac{d\bar{M}_1}{da} - \bar{N}_1 + 4\bar{O}_1 \right) \\ &\quad - \frac{2}{35} \varepsilon_2 \cos (\alpha_2 - \beta_2) \left(a \frac{d\bar{M}_2}{da} - \bar{N}_2 + 4\bar{O}_2 \right), \end{aligned} \quad (125)$$

from coefficient of $\frac{dP_{4,1}}{d\theta} \cos \phi$,

$$\begin{aligned} C_4 Y_{4,1} + D_4 Z_{4,1} = & -\frac{3}{4} \varepsilon_1 \cos \alpha_1 \left(a \frac{d\bar{M}}{da} - \bar{N} + 4\bar{O} \right) \\ & + \frac{1}{4} \{ -3\varepsilon \cos \beta_1 + \varepsilon_2 \cos (\alpha_2 - \beta_1) \} \left(a \frac{d\bar{M}_1}{da} - \bar{N}_1 + 4\bar{O}_1 \right) \\ & + \frac{1}{4} \varepsilon_1 \cos (\beta_2 - \alpha_1) \left(a \frac{d\bar{M}_2}{da} - \bar{N}_2 + 4\bar{O}_2 \right), \end{aligned} \quad (126)$$

from coefficient of $\frac{dP_{4,1}}{d\theta} \sin \phi$,

$$\begin{aligned} C_4 Y'_{4,1} + D_4 Z'_{4,1} = & -\frac{3}{4} \varepsilon_1 \sin \alpha_1 \left(a \frac{d\bar{M}}{da} - \bar{N} + 4\bar{O} \right) \\ & + \frac{1}{4} \{ -3\varepsilon \sin \beta_1 + \varepsilon_2 \sin (\alpha_2 - \beta_1) \} \left(a \frac{d\bar{M}_1}{da} - \bar{N}_1 + 4\bar{O}_1 \right) \\ & + \frac{1}{4} \varepsilon_1 \sin (\beta_2 - \alpha_1) \left(a \frac{d\bar{M}_2}{da} - \bar{N}_2 + 4\bar{O}_2 \right), \end{aligned} \quad (127)$$

from coefficient of $\frac{dP_{4,2}}{d\theta} \cos 2\phi$,

$$\begin{aligned} C_4 Y_{4,2} + D_4 Z_{4,2} = & -\frac{3}{4} \varepsilon_2 \cos \alpha_2 \left(a \frac{d\bar{M}}{da} - \bar{N} + 4\bar{O} \right) \\ & - \frac{1}{4} \varepsilon_1 \cos (\alpha_1 + \beta_1) \left(a \frac{d\bar{M}_1}{da} - \bar{N}_1 + 4\bar{O}_1 \right) - \frac{3}{4} \varepsilon \cos \beta_2 \left(a \frac{d\bar{M}_2}{da} - \bar{N}_2 + 4\bar{O}_2 \right), \end{aligned} \quad (128)$$

from coefficient of $\frac{dP_{4,2}}{d\theta} \sin 2\phi$,

$$\begin{aligned} C_4 Y'_{4,2} + D_4 Z'_{4,2} = & -\frac{3}{4} \varepsilon_2 \sin \alpha_2 \left(a \frac{d\bar{M}}{da} - \bar{N} + 4\bar{O} \right) \\ & - \frac{1}{4} \varepsilon_1 \sin (\alpha_1 + \beta_1) \left(a \frac{d\bar{M}_1}{da} - \bar{N}_1 + 4\bar{O}_1 \right) - \frac{3}{4} \varepsilon \sin \beta_2 \left(a \frac{d\bar{M}_2}{da} - \bar{N}_2 + 4\bar{O}_2 \right), \end{aligned} \quad (129)$$

from coefficient of $\frac{dP_{4,3}}{d\theta} \cos 3\phi$,

$$\begin{aligned} C_4 Y_{4,3} + D_4 Z_{4,3} = & -\frac{1}{4} \varepsilon_2 \cos (\alpha_2 + \beta_1) \left(a \frac{d\bar{M}_1}{da} - \bar{N}_1 + 4\bar{O}_1 \right) \\ & - \frac{1}{4} \varepsilon_1 \cos (\alpha_1 + \beta_2) \left(a \frac{d\bar{M}_2}{da} - \bar{N}_2 + 4\bar{O}_2 \right), \end{aligned} \quad (130)$$

from coefficient of $\frac{dP_{4,3}}{d\theta} \sin 3\phi$,

$$C_4 Y'_{4,3} + D_4 Z'_{4,3} = -\frac{1}{4} \varepsilon_2 \sin(\alpha_2 + \beta_1) \left(a \frac{d\bar{M}_1}{da} - \bar{N}_1 + 4\bar{O}_1 \right) \\ - \frac{1}{4} \varepsilon_1 \sin(\alpha_1 + \beta_2) \left(a \frac{d\bar{M}_2}{da} - \bar{N}_2 + 4\bar{O}_2 \right), \quad (131)$$

from coefficient of $\frac{dP_{4,4}}{d\theta} \cos 4\phi$,

$$C_4 Y_{4,4} + D_4 Z_{4,4} = -\frac{1}{4} \varepsilon_2 \cos(\alpha_2 + \beta_2) \left(a \frac{d\bar{M}_2}{da} - \bar{N}_2 + 4\bar{O}_2 \right), \quad (132)$$

from coefficient of $\frac{dP_{4,4}}{d\theta} \sin 4\phi$,

$$C_4 Y'_{4,4} + D_4 Z'_{4,4} = -\frac{1}{4} \varepsilon_2 \sin(\alpha_2 + \beta_2) \left(a \frac{d\bar{M}_2}{da} - \bar{N}_2 + 4\bar{O}_2 \right), \quad (133)$$

from coefficient of $\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} (P_{2,1} \cos \phi)$,

$$na\delta W_{2,1} = -\frac{32}{35} (C_3 Y'_{3,1} + D_3 Z'_{3,1}) - b_2 - \frac{12}{7} na\varepsilon_1 \cos \alpha_1 W_2 \\ + na W_{2,1} \left\{ \frac{23}{7} \varepsilon \cos \beta_1 + \frac{18}{7} \varepsilon_2 \cos(\alpha_2 - \beta_1) \right\} + \frac{4}{7} na\varepsilon_1 \cos(\beta_2 - \alpha_1) W_{2,2}, \quad (134)$$

from coefficient of $\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} (P_{2,1} \sin \phi)$,

$$na\delta W'_{2,1} = \frac{32}{35} (C_3 Y_{3,1} + D_3 Z_{3,1}) + a_2 - \frac{12}{7} na\varepsilon_1 \sin \alpha_1 W_2 \\ + na W_{2,1} \left\{ \frac{23}{7} \varepsilon \sin \beta_1 + \frac{18}{7} \varepsilon_2 \sin(\alpha_2 - \beta_1) \right\} + \frac{4}{7} na\varepsilon_1 \sin(\beta_2 - \alpha_1) W_{2,2}, \quad (135)$$

from coefficient of $\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} (P_{2,2} \cos 2\phi)$,

$$na\delta W_{2,2} = -\frac{2}{7} (C_3 Y'_{3,2} + D_3 Z'_{3,2}) - \frac{18}{7} na\varepsilon_2 \cos \alpha_2 W_2 \\ + \frac{11}{28} na\varepsilon_1 \cos(\alpha_1 + \beta_1) W_{2,1} - \frac{4}{7} na\varepsilon \cos \beta_2 W_{2,2}, \quad (136)$$

from coefficient of $\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} (P_{2,2} \sin 2\phi)$,

$$na\delta W'_{2,2} = \frac{2}{7} (C_3 Y_{3,2} + D_3 Z_{3,2}) - \frac{18}{7} na\varepsilon_2 \sin \alpha_2 W_2 \\ + \frac{11}{28} na\varepsilon_1 \sin(\alpha_1 + \beta_1) W_{2,1} - \frac{4}{7} na\varepsilon \sin \beta_2 W_{2,2}, \quad (137)$$

from coefficient of $\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} (P_{3,3} \cos 3\phi)$,

$$2na^3 W_{3,3} = -\frac{1}{12} \varepsilon_2 \sin (\alpha_2 + \beta_1) \left(a \frac{d\bar{M}_1}{da} + \bar{N}_1 \right) + \frac{1}{12} \varepsilon_1 \sin (\alpha_1 + \beta_2) \left(a \frac{d\bar{M}_2}{da} + \bar{N}_2 \right), \quad (138)$$

from coefficient of $\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} (P_{3,3} \sin 3\phi)$,

$$2na^3 W'_{3,3} = \frac{1}{12} \varepsilon_2 \cos (\alpha_2 + \beta_1) \left(a \frac{d\bar{M}_1}{da} + \bar{N}_1 \right) - \frac{1}{12} \varepsilon_1 \cos (\alpha_1 + \beta_2) \left(a \frac{d\bar{M}_2}{da} + \bar{N}_2 \right), \quad (139)$$

from coefficient of $\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} (P_{4,1} \cos \phi)$,

$$3na^3 W_{4,1} = 3 (C_3 Y'_{3,1} + D_3 Z'_{3,1}) + 3na\varepsilon_1 \cos \alpha_1 W_2 - na W_{2,1} \left\{ \frac{15}{2} \varepsilon \cos \beta_1 + \frac{9}{2} \varepsilon_2 \cos (\alpha_2 - \beta_1) \right\} + 6na\varepsilon_1 \cos (\beta_2 - \alpha_1) W_{2,2}, \quad (140)$$

from coefficient of $\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} (P_{4,1} \sin \phi)$,

$$3na^3 W'_{4,1} = -3 (C_3 Y_{3,1} + D_3 Z_{3,1}) + 3na\varepsilon_1 \sin \alpha_1 W_2 - na W_{2,1} \left\{ \frac{15}{2} \varepsilon \sin \beta_1 + \frac{9}{2} \varepsilon_2 \sin (\alpha_2 - \beta_1) \right\} + 6na\varepsilon_1 \sin (\beta_2 - \alpha_1) W_{2,2}, \quad (141)$$

from coefficient of $\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} (P_{4,2} \cos 2\phi)$,

$$3na^3 W_{4,2} = \frac{3}{2} (C_3 Y'_{3,2} + D_3 Z'_{3,2}) + 3na\varepsilon_2 \cos \alpha_2 W_2 - \frac{3}{4} na\varepsilon_1 \cos (\alpha_1 + \beta_1) W_{2,1} - \frac{15}{2} na\varepsilon \cos \beta_2 W_{2,2}, \quad (142)$$

from coefficient of $\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} (P_{4,2} \sin 2\phi)$,

$$3na^3 W'_{4,2} = -\frac{3}{2} (C_3 Y_{3,2} + D_3 Z_{3,2}) + 3na\varepsilon_2 \sin \alpha_2 W_2 - \frac{3}{4} na\varepsilon_1 \sin (\alpha_1 + \beta_1) W_{2,1} - \frac{15}{2} na\varepsilon \sin \beta_2 W_{2,2}, \quad (143)$$

from coefficient of $\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} (P_{4,3} \cos 3\phi)$,

$$3na^3 W_{4,3} = C_3 Y'_{3,3} + D_3 Z'_{3,3} - \frac{1}{6} na\varepsilon_2 \cos (\alpha_2 + \beta_1) W_{2,1} - \frac{4}{3} na\varepsilon_1 \cos (\alpha_1 + \beta_2) W_{2,2}, \quad (144)$$

from coefficient of $\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} (P_{4,3} \sin 3\phi)$,

$$3na^3 W'_{4,3} = -O_3 Y_{3,3} - D_3 Z_{3,3} - \frac{1}{6} na\epsilon_2 \sin(\alpha_2 + \beta_1) W_{2,1} \\ - \frac{4}{3} na\epsilon_1 \sin(\alpha_1 + \beta_2) W_{2,2}, \quad (145)$$

from coefficient of $\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} (P_{4,4} \cos 4\phi)$,

$$3na^3 W_{4,4} = -\frac{3}{4} na\epsilon_2 \cos(\alpha_2 + \beta_2) W_{2,2}, \quad (146)$$

from coefficient of $\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} (P_{4,4} \sin 4\phi)$,

$$3na^3 W'_{4,4} = -\frac{3}{4} na\epsilon_2 \sin(\alpha_2 + \beta_2) W_{2,2}. \quad (147)$$

Lastly, coming to the harmonics of the first degree which represent entirely uncompensated terms, we have

from coefficient of $\frac{dP_1}{d\theta}$,

$$c_2 = \frac{3}{10} na\epsilon_1 \sin(\alpha_1 - \beta_1) W_{2,1} + \frac{12}{5} na\epsilon_2 \sin(\alpha_2 - \beta_2) W_{2,2}, \quad (148)$$

from coefficient of $\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} (P_{1,1} \cos \phi)$,

$$e_2 = \frac{3}{8} \left\{ -\epsilon_1 \sin \alpha_1 \left(a \frac{d\bar{M}}{da} + \bar{N} - 4\bar{O} \right) + \epsilon \sin \beta_1 \left(a \frac{d\bar{M}_1}{da} + \bar{N}_1 - 4\bar{O}_1 \right) \right\} \\ + \frac{1}{8} \left\{ -\epsilon_2 \sin(\alpha_2 - \beta_1) \left(a \frac{d\bar{M}_1}{da} + \bar{N}_1 - 8\bar{O}_1 \right) \right. \\ \left. + \epsilon_1 \sin(\beta_2 - \alpha_1) \left(a \frac{d\bar{M}_2}{da} + \bar{N}_2 - 8\bar{O}_2 \right) \right\} - \frac{3}{5} na^2 W_{2,1}, \quad (149)$$

from coefficient of $\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} (P_{1,1} \sin \phi)$,

$$d_2 = \frac{3}{8} \left\{ -\epsilon_1 \cos \alpha_1 \left(a \frac{d\bar{M}}{da} + \bar{N} - 4\bar{O} \right) + \epsilon \cos \beta_1 \left(a \frac{d\bar{M}_1}{da} + \bar{N}_1 - 4\bar{O}_1 \right) \right\} \\ + \frac{1}{8} \left\{ -\epsilon_2 \cos(\alpha_2 - \beta_1) \left(a \frac{d\bar{M}_1}{da} + \bar{N}_1 - 8\bar{O}_1 \right) \right. \\ \left. + \epsilon_1 \cos(\beta_2 - \alpha_1) \left(a \frac{d\bar{M}_2}{da} + \bar{N}_2 - 8\bar{O}_2 \right) \right\} + \frac{3}{5} na^2 W'_{2,1}. \quad (150)$$

Further consideration of the second surface equation will be postponed until the third surface equation has been worked out.

§44. Referring to (75) and the expressions (78), (80) and (81) for the stresses, we see that the terms containing ε , ε_1 or ε_2 explicitly on the left of the third surface equation are

$$\begin{aligned}
 & (\varepsilon P_2 + \varepsilon_1 X_{2,1} + \varepsilon_2 X_{2,2}) a \frac{d}{da} \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} (\bar{M}_1 X'_{2,1} + \bar{M}_2 X'_{2,2}) \\
 & - \frac{d}{d\theta} (\varepsilon P_2 + \varepsilon_1 X_{2,1} + \varepsilon_2 X_{2,2}) \frac{d^2}{d\theta d\phi} \{ \operatorname{cosec} \theta (\bar{O}_1 X'_{2,1} + \bar{O}_2 X'_{2,2}) \} \\
 & - \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} (\varepsilon_1 X_{2,1} + \varepsilon_2 X_{2,2}) \left\{ \bar{N} P_2 + \bar{N}_1 X'_{2,1} + \bar{N}_2 X'_{2,2} \right. \\
 & \left. + \left(\frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{d}{d\phi^2} + \cot \theta \frac{d}{d\theta} \right) (\bar{O} P_2 + \bar{O}_1 X'_{2,1} + \bar{O}_2 X'_{2,2}) \right\} \\
 & - (\varepsilon P_2 + \varepsilon_1 X_{2,1} + \varepsilon_2 X_{2,2}) a \frac{d}{da} \left\{ na \frac{d}{d\theta} (W_2 P_2 + W_{2,1} X'_{2,1} + W_{2,2} X'_{2,2}) \right\} \\
 & + \frac{d}{d\theta} (\varepsilon P_2 + \varepsilon_1 X_{2,1} + \varepsilon_2 X_{2,2}) na \left(6 + 2 \frac{d^2}{d\theta^2} \right) (W_2 P_2 + W_{2,1} X'_{2,1} + W_{2,2} X'_{2,2}) \\
 & + \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} (\varepsilon_1 X_{2,1} + \varepsilon_2 X_{2,2}) 2na \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} \right) (W_{2,1} X'_{2,1} + W_{2,2} X'_{2,2}) \\
 & \equiv a \frac{d\bar{M}_1}{da} \left[\varepsilon \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} \left\{ \left(\frac{1}{7} P_{2,1} + \frac{3}{2} P_{4,1} \right) \cos(\phi - \beta_1) \right\} \right. \\
 & + \varepsilon_1 \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} \left(\left(\frac{1}{28} P_{2,2} + \frac{1}{4} P_{4,2} \right) \cos(2\phi - \alpha_1 - \beta_1) \right) \right. \\
 & + \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{10} P_1 + \frac{1}{15} P_3 \right) \sin(\alpha_1 - \beta_1) \left. \right\} \\
 & + \varepsilon_2 \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} \left\{ \left(-\frac{2}{7} P_{2,1} + \frac{1}{2} P_{4,1} \right) \cos(\phi + \beta_1 - \alpha_2) \right. \\
 & \left. + \frac{1}{6} P_{4,3} \cos(3\phi - \alpha_2 - \beta_1) \right\} \left. \right] \\
 & + a \frac{d\bar{M}_2}{da} \left[\varepsilon \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} \left\{ \left(-\frac{2}{7} P_{2,2} + \frac{3}{2} P_{4,2} \right) \cos(2\phi - \beta_2) \right\} \right. \\
 & + \varepsilon_1 \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} \left\{ \left(\frac{4}{7} P_{2,1} - P_{4,1} \right) \cos(\phi + \alpha_1 - \beta_2) + \frac{1}{3} P_{4,3} \cos(3\phi - \alpha_1 - \beta_2) \right\} \\
 & + \varepsilon_2 \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} \left(\frac{1}{4} P_{4,4} \cos(4\phi - \alpha_2 - \beta_2) \right) + \frac{d}{d\theta} \left(\frac{4}{5} P_1 - \frac{2}{15} P_3 \right) \sin(\alpha_2 - \beta_2) \right\} \left. \right] \\
 & - \bar{N} \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} \left[\varepsilon_1 \left(\frac{1}{7} P_{2,1} + \frac{3}{2} P_{4,1} \right) \cos(\phi - \alpha_1) \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \varepsilon_2 \left(-\frac{2}{7} P_{2,2} + \frac{3}{2} P_{4,2} \right) \cos(2\phi - \alpha_2) \Big] \\
 & - \bar{N}_1 \left[\varepsilon_1 \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} \left(\left(\frac{1}{28} P_{2,2} + \frac{1}{4} P_{4,2} \right) \cos(2\phi - \alpha_1 - \beta_1) \right) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{10} P_1 + \frac{1}{15} P_3 \right) \sin(\alpha_1 - \beta_1) \right\} \right. \\
 & \quad + \varepsilon_2 \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} \left\{ \left(\frac{4}{7} P_{2,1} - P_{4,1} \right) \cos(\phi + \beta_1 - \alpha_2) + \frac{1}{3} P_{4,3} \cos(3\phi - \alpha_2 - \beta_1) \right\} \Big] \\
 & - \bar{N}_2 \left[\varepsilon_1 \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} \left\{ \left(-\frac{2}{7} P_{2,1} + \frac{1}{2} P_{4,1} \right) \cos(\phi + \alpha_1 - \beta_2) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{1}{6} P_{4,3} \cos(3\phi - \alpha_1 - \beta_2) \right\} \right. \\
 & \quad + \varepsilon_2 \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} \left(\frac{1}{4} P_{4,4} \cos(4\phi - \alpha_2 - \beta_2) \right) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{d}{d\theta} \left(-\frac{4}{5} P_1 + \frac{2}{15} P_3 \right) \sin(\alpha_2 - \beta_2) \right\} \Big] \\
 & - \bar{O} \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} \left[-\varepsilon_1 \left(\frac{9}{7} P_{2,1} + 3P_{4,1} \right) \cos(\phi - \alpha_1) \right. \\
 & \quad \left. - \varepsilon_2 \left(\frac{3}{7} P_{2,2} + 3P_{4,2} \right) \cos(2\phi - \alpha_2) \right] \\
 & - \bar{O}_1 \left[\varepsilon \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} \left\{ \left(\frac{12}{7} P_{2,1} - 3P_{4,1} \right) \cos(\phi - \beta_1) \right\} \right. \\
 & \quad + \varepsilon_1 \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} \left(\left(\frac{3}{28} P_{2,2} - P_{4,2} \right) \cos(2\phi - \alpha_1 - \beta_1) \right) + \frac{1}{2} \frac{dP_1}{d\theta} \sin(\alpha_1 - \beta_1) \right\} \\
 & \quad + \varepsilon_2 \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} \left\{ \left(-\frac{4}{7} P_{2,1} + P_{4,1} \right) \cos(\phi + \beta_1 - \alpha_2) - P_{4,3} \cos(3\phi - \beta_1 - \alpha_2) \right\} \Big] \\
 & - \bar{O}_2 \left[-\varepsilon \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} \left(\left(\frac{3}{7} P_{2,2} + 3P_{4,2} \right) \cos(2\phi - \beta_2) \right) \right. \\
 & \quad + \varepsilon_1 \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} \left\{ \left(\frac{10}{7} P_{2,1} + P_{4,1} \right) \cos(\phi + \alpha_1 - \beta_2) - P_{4,3} \cos(3\phi - \alpha_1 - \beta_2) \right\} \\
 & \quad + \varepsilon_2 \left\{ -\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} \left(P_{4,4} \cos(4\phi - \alpha_2 - \beta_2) \right) + \frac{d}{d\theta} \cdot 4P_1 \sin(\alpha_2 - \beta_2) \right\} \Big] \\
 & + naW_2 \left[\varepsilon \frac{d}{d\theta} \left(\frac{11}{7} P_2 - \frac{27}{35} P_4 \right) \right. \\
 & \quad \left. + \varepsilon_1 \left\{ \frac{d}{d\theta} \left(\frac{93}{56} P_{2,1} - \frac{9}{4} P_{4,1} \right) \cos(\phi - \alpha_1) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} \left(-\frac{3}{8} P_{1,1} \sin(\phi - \alpha_1) \right) \right\} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \epsilon_2 \frac{d}{d\theta} \left(\frac{27}{14} P_{2,2} - \frac{9}{4} P_{4,2} \right) \cos(2\phi - \alpha_2) \Big] \\
& + na W_{2,1} \left[\epsilon \left\{ \frac{d}{d\theta} \left(-\frac{5}{56} P_{2,1} - \frac{9}{4} P_{4,1} \right) \cos(\phi - \beta_1) \right. \right. \\
& + \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} \left(\frac{3}{8} P_{1,1} \sin(\phi - \beta_1) \right) \Big\} \\
& + \epsilon_1 \frac{d}{d\theta} \left\{ \left(\frac{11}{42} P_2 + \frac{6}{35} P_4 \right) \cos(\alpha_1 - \beta_1) + \left(\frac{11}{28} P_{2,2} - \frac{3}{4} P_{4,2} \right) \cos(2\phi - \alpha_1 - \beta_1) \right\} \\
& + \epsilon_2 \left\{ \frac{d}{d\theta} \left(\left(\frac{39}{56} P_{2,1} + \frac{3}{4} P_{4,1} \right) \cos(\phi - \alpha_2 + \beta_1) - \frac{3}{4} P_{4,3} \cos(3\phi - \alpha_2 - \beta_1) \right) \right. \\
& + \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} \left(-\frac{9}{8} P_{1,1} \sin(\phi - \alpha_2 + \beta_1) + \frac{7}{12} P_{3,3} \sin(3\phi - \alpha_2 - \beta_1) \right) \Big\} \Big] \\
& + na W_{2,2} \left[-\epsilon \frac{d}{d\theta} \left(\frac{71}{14} P_{2,2} + \frac{9}{4} P_{4,2} \right) \cos(2\phi - \beta_2) \right. \\
& + \epsilon_1 \left\{ \frac{d}{d\theta} \left(\left(\frac{137}{56} P_{2,1} + \frac{3}{4} P_{4,1} \right) \cos(\phi - \beta_2 + \alpha_1) - \frac{3}{4} P_{4,3} \cos(3\phi - \alpha_1 - \beta_2) \right) \right. \\
& + \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} \left(\frac{9}{8} P_{1,1} \sin(\phi - \beta_2 + \alpha_1) - \frac{7}{12} P_{3,3} \sin(3\phi - \alpha_1 - \beta_2) \right) \Big\} \\
& \left. - \epsilon_2 \frac{d}{d\theta} \left\{ \left(\frac{44}{21} P_2 + \frac{6}{35} P_4 \right) \cos(\alpha_2 - \beta_2) + \frac{3}{4} P_{4,4} \cos(4\phi - \alpha_2 - \beta_2) \right\} \right]. \quad (151)
\end{aligned}$$

In expanding the right-hand side of this identity use has been made of such of the formulae (7)–(67) as apply to the third surface condition.

§45. In the subsidiary terms of the general solution all harmonic terms with double suffixes in which the first suffix is 3, with the exception of

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} \left\{ P_{3,3} \frac{\cos \phi}{\sin \phi} \right\},$$

must be transformed by means of (68)–(72). Also to balance the uncompensated terms we must introduce on the right of the third surface equation

$$a_3 \sin \phi + b_3 \cos \phi + d_3 \cos \theta \sin \phi + e_3 \cos \theta \cos \phi + f_3 \sin \theta,$$

or

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} \{ P_{1,1} (-a_3 \cos \phi + b_3 \sin \phi) + P_{2,1} (-d_3 \cos \phi + e_3 \sin \phi) \} - f_3 \frac{dP_1}{d\theta}.$$

This being done, we have

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} \left[(C_2 Y_{2,1} + D_2 Z_{2,1}) X'_{2,1} + \{ (C_2 \delta Y_{2,1} + D_2 \delta Z_{2,1}) \cos \phi \right. \\
 & \quad + (C_2 \delta Y'_{2,1} + D_2 \delta Z'_{2,1}) \sin \phi \} P_{2,1} \\
 & \quad + (C_2 Y_{2,2} + D_2 Z_{2,2}) X'_{2,2} + \{ (C_2 \delta Y_{2,2} + D_2 \delta Z_{2,2}) \cos 2\phi \\
 & \quad + (C_2 \delta Y'_{2,2} + D_2 \delta Z'_{2,2}) \sin 2\phi \} P_{2,2} \Big] \\
 & + (C_3 Y_{3,1} + D_3 Z_{3,1}) \left\{ -\frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} (P_{2,1} \sin \phi) + \frac{3}{10} \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} (P_{1,1} \cos \phi) \right\} \\
 & + (C_3 Y'_{3,1} + D_3 Z'_{3,1}) \left\{ \frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} (P_{2,1} \cos \phi) + \frac{3}{10} \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} (P_{1,1} \sin \phi) \right\} \\
 & + \frac{d}{d\theta} [- (C_3 Y_{3,2} + D_3 Z_{3,2}) P_{2,2} \sin 2\phi + (C_3 Y'_{3,2} + D_3 Z'_{3,2}) P_{2,2} \cos 2\phi] \\
 & + \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} [\{ (C_3 Y_{3,3} + D_3 Z_{3,3}) \cos 3\phi + (C_3 Y'_{3,3} + D_3 Z'_{3,3}) \sin 3\phi \} P_{3,3} \\
 & + \{ (C_4 Y_{4,1} + D_4 Z_{4,1}) \cos \phi + (C_4 Y'_{4,1} + D_4 Z'_{4,1}) \sin \phi \} P_{4,1} \\
 & + \{ (C_4 Y_{4,2} + D_4 Z_{4,2}) \cos 2\phi + (C_4 Y'_{4,2} + D_4 Z'_{4,2}) \sin 2\phi \} P_{4,2} \\
 & + \{ (C_4 Y_{4,3} + D_4 Z_{4,3}) \cos 3\phi + (C_4 Y'_{4,3} + D_4 Z'_{4,3}) \sin 3\phi \} P_{4,3} \\
 & + \{ (C_4 Y_{4,4} + D_4 Z_{4,4}) \cos 4\phi + (C_4 Y'_{4,4} + D_4 Z'_{4,4}) \sin 4\phi \} P_{4,4}] \\
 & - na \frac{d}{d\theta} [W_2 P_2 + W_{2,1} X'_{2,1} + W_{2,2} X'_{2,2} + \delta W_2 P_2 + (\delta W_{2,1} \cos \phi + \delta W'_{2,1} \sin \phi) P_{2,1} \\
 & + (\delta W_{2,2} \cos 2\phi + \delta W'_{2,2} \sin 2\phi) P_{2,2}] \\
 & - 2na^2 W_3 \frac{dP_3}{d\theta} \\
 & - 2na^2 \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} \left[\left(-\frac{32}{35} P_{2,1} + 3P_{4,1} \right) (W_{3,1} \sin \phi - W'_{3,1} \cos \phi) \right. \\
 & + \left(-\frac{2}{7} P_{2,2} + \frac{3}{2} P_{4,2} \right) (W_{3,2} \sin 2\phi - W'_{3,2} \cos 2\phi) \\
 & + P_{4,3} (W_{3,3} \sin 3\phi - W'_{3,3} \cos 3\phi) \Big] \\
 & - 3na^3 \frac{d}{d\theta} [W_4 P_4 + (W_{4,1} \cos \phi + W'_{4,1} \sin \phi) P_{4,1} \\
 & + (W_{4,2} \cos 2\phi + W'_{4,2} \sin 2\phi) P_{4,2} + (W_{4,3} \cos 3\phi + W'_{4,3} \sin 3\phi) P_{4,3} \\
 & + (W_{4,4} \cos 4\phi + W'_{4,4} \sin 4\phi) P_{4,4}] \\
 & + \text{expression on right-hand side of (151)} \\
 & = \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} [(\Theta_{2,1} - M_2 V_{2,1}) X'_{2,1} + (\Theta_{2,2} - M_2 V_{2,2}) X'_{2,2}]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{d}{d\theta} (\Phi_2 P_2 + \Phi_{2,1} X'_{2,1} + \Phi_{2,2} X'_{2,2}) \\
& + \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} \{P_{1,1} (-a_3 \cos \phi + b_3 \sin \phi) \\
& + P_{2,1} (-d_3 \cos \phi + e_3 \sin \phi)\} - f_3 \frac{dP_1}{d\theta}.
\end{aligned} \tag{152}$$

§46. As in the second surface equation, we shall equate to zero the coefficients of the separate differentials, all the terms being supposed on one side of the equation. For first approximations to $Y_2, Z_2, Y_{2,1}, Z_{2,1}, Y_{2,2}, Z_{2,2}, W_{2,1}, W_{2,2}$ we should obtain equations which are obviously identical with (114)–(118). For first approximation to W_2 we have

$$W_2 = \frac{1}{na} \Phi_2. \tag{153}$$

For the subsidiary constants the equations obtained are as follows:

from coefficient of $\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} (P_{2,1} \cos \phi)$,

$$\begin{aligned}
C_2 \delta Y_{2,1} + D_2 \delta Z_{2,1} &= \frac{1}{7} \varepsilon_1 \cos \alpha_1 (\bar{N} - 9\bar{O}) - \frac{1}{7} \varepsilon \cos \beta_1 \left(a \frac{d\bar{M}_1}{da} - 12\bar{O}_1 \right) \\
&+ \frac{1}{7} \varepsilon_2 \cos (\alpha_2 - \beta_1) \left(2a \frac{d\bar{M}_1}{da} + 4\bar{N}_1 - 4\bar{O}_1 \right) \\
&- \frac{1}{7} \varepsilon_1 \cos (\beta_2 - \alpha_1) \left(4a \frac{d\bar{M}_2}{da} + 2\bar{N}_2 - 10\bar{O}_2 \right) + \frac{64}{35} na^2 W'_{2,1} - d_3,
\end{aligned} \tag{154}$$

from coefficient of $\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} (P_{2,1} \sin \phi)$,

$$\begin{aligned}
C_2 \delta Y'_{2,1} + D_2 \delta Z'_{2,1} &= \frac{1}{7} \varepsilon_1 \sin \alpha_1 (\bar{N} - 9\bar{O}) - \frac{1}{7} \varepsilon \sin \beta_1 \left(a \frac{d\bar{M}_1}{da} - 12\bar{O}_1 \right) \\
&+ \frac{1}{7} \varepsilon_2 \sin (\alpha_2 - \beta_1) \left(2a \frac{d\bar{M}_1}{da} + 4\bar{N}_1 - 4\bar{O}_1 \right) \\
&- \frac{1}{7} \varepsilon_1 \sin (\beta_2 - \alpha_1) \left(4a \frac{d\bar{M}_2}{da} + 2\bar{N}_2 - 10\bar{O}_2 \right) - \frac{64}{35} na^2 W'_{2,1} + e_3,
\end{aligned} \tag{155}$$

from coefficient of $\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} (P_{2,2} \cos 2\phi)$,

$$\begin{aligned}
C_2 \delta Y_{2,2} + D_2 \delta Z_{2,2} &= -\frac{1}{7} \varepsilon_2 \cos \alpha_2 (2\bar{N} + 3\bar{O}) \\
&- \frac{1}{28} \varepsilon_1 \cos (\alpha_1 + \beta_1) \left(a \frac{d\bar{M}_1}{da} - \bar{N}_1 - 3\bar{O}_1 \right) \\
&+ \frac{1}{7} \varepsilon \cos \beta_2 \left(2a \frac{d\bar{M}_2}{da} - 3\bar{O}_2 \right) + \frac{4}{7} na^2 W'_{2,2},
\end{aligned} \tag{156}$$

from coefficient of $\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} (P_{2,2} \sin 2\phi)$,

$$\begin{aligned} C_2 \delta Y'_{2,2} + D_2 \delta Z'_{2,2} = & -\frac{1}{7} \varepsilon_2 \sin \alpha_2 (2\bar{N} + 3\bar{O}) \\ & - \frac{1}{28} \varepsilon_1 \sin (\alpha_1 + \beta_1) \left(a \frac{d\bar{M}_1}{da} - \bar{N}_1 - 3\bar{O}_1 \right) \\ & + \frac{1}{7} \varepsilon \sin \beta_2 \left(2a \frac{d\bar{M}_2}{da} - 3\bar{O}_2 \right) - \frac{4}{7} na^2 W_{2,2}, \end{aligned} \quad (157)$$

from coefficient of $\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} (P_{3,3} \cos 3\phi)$,

$$C_3 Y_{3,3} + D_3 Z_{3,3} = \frac{7}{12} na \{ \varepsilon_2 \sin (\alpha_2 + \beta_1) W_{2,1} - \varepsilon_1 \sin (\alpha_1 + \beta_2) W_{2,2} \}, \quad (158)$$

from coefficient of $\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} (P_{3,3} \sin 3\phi)$,

$$C_3 Y'_{3,3} + D_3 Z'_{3,3} = \frac{7}{12} na \{ -\varepsilon_2 \cos (\alpha_2 + \beta_1) W_{2,1} + \varepsilon_1 \cos (\alpha_1 + \beta_2) W_{2,2} \}, \quad (159)$$

from coefficient of $\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} (P_{4,1} \cos \phi)$,

$$\begin{aligned} C_4 Y_{4,1} + D_4 Z_{4,1} = & \frac{3}{2} \varepsilon_1 \cos \alpha_1 (\bar{N} - 2\bar{O}) - \frac{3}{2} \varepsilon \cos \beta_1 \left(a \frac{d\bar{M}_1}{da} + 2\bar{O}_1 \right) \\ & - \frac{1}{2} \varepsilon_2 \cos (\alpha_2 - \beta_1) \left(a \frac{d\bar{M}_1}{da} + 2\bar{N}_1 - 2\bar{O}_1 \right) \\ & + \frac{1}{2} \varepsilon_1 \cos (\beta_2 - \alpha_1) \left(2a \frac{d\bar{M}_2}{da} + \bar{N}_2 + 2\bar{O}_2 \right) - 6na^2 W'_{3,1}, \end{aligned} \quad (160)$$

from coefficient of $\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} (P_{4,1} \sin \phi)$,

$$\begin{aligned} C_4 Y'_{4,1} + D_4 Z'_{4,1} = & \frac{3}{2} \varepsilon_1 \sin \alpha_1 (\bar{N} - 2\bar{O}) - \frac{3}{2} \varepsilon \sin \beta_1 \left(a \frac{d\bar{M}_1}{da} + 2\bar{O}_1 \right) \\ & - \frac{1}{2} \varepsilon_2 \sin (\alpha_2 - \beta_1) \left(a \frac{d\bar{M}_1}{da} + 2\bar{N}_1 - 2\bar{O}_1 \right) \\ & + \frac{1}{2} \varepsilon_1 \sin (\beta_2 - \alpha_1) \left(2a \frac{d\bar{M}_2}{da} + \bar{N}_2 + 2\bar{O}_2 \right) + 6na^2 W_{3,1}, \end{aligned} \quad (161)$$

from coefficient of $\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} (P_{4,2} \cos 2\phi)$,

$$\begin{aligned} C_4 Y_{4,2} + D_4 Z_{4,2} = & \frac{3}{2} \varepsilon_2 \cos \alpha_2 (\bar{N} - 2\bar{O}) - \frac{1}{4} \varepsilon_1 \cos (\alpha_1 + \beta_1) \left(a \frac{d\bar{M}_1}{da} - \bar{N}_1 + 4\bar{O}_1 \right) \\ & - \frac{3}{2} \varepsilon \cos \beta_2 \left(a \frac{d\bar{M}_2}{da} + 2\bar{O}_2 \right) - 3na^2 W'_{3,2}, \end{aligned} \quad (162)$$

from coefficient of $\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} (P_{4,2} \sin 2\phi)$,

$$C_4 Y'_{4,2} + D_4 Z'_{4,2} = \frac{3}{2} \varepsilon_2 \sin \alpha_2 (\bar{N} - 2\bar{O}) - \frac{1}{4} \varepsilon_1 \sin (\alpha_1 + \beta_1) \left(a \frac{d\bar{M}_1}{da} - \bar{N}_1 + 4\bar{O}_1 \right) \\ - \frac{3}{2} \varepsilon \sin \beta_2 \left(a \frac{d\bar{M}_2}{da} + 2\bar{O}_2 \right) + 3na^2 W_{3,2}, \quad (163)$$

from coefficient of $\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} (P_{4,3} \cos 3\phi)$,

$$C_4 Y_{4,3} + D_4 Z_{4,3} = -\frac{1}{6} \varepsilon_2 \cos (\alpha_2 + \beta_1) \left(a \frac{d\bar{M}_1}{da} - 2\bar{N}_1 + 6\bar{O}_1 \right) \\ - \frac{1}{6} \varepsilon_1 \cos (\alpha_1 + \beta_2) \left(2a \frac{d\bar{M}_2}{da} - \bar{N}_2 + 6\bar{O}_2 \right) - 2na^2 W'_{3,3}, \quad (164)$$

from coefficient of $\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} (P_{4,3} \sin 3\phi)$,

$$C_4 Y'_{4,3} + D_4 Z'_{4,3} = -\frac{1}{6} \varepsilon_2 \sin (\alpha_2 + \beta_1) \left(a \frac{d\bar{M}_1}{da} - 2\bar{N}_1 + 6\bar{O}_1 \right) \\ - \frac{1}{6} \varepsilon_1 \sin (\alpha_1 + \beta_2) \left(2a \frac{d\bar{M}_2}{da} - \bar{N}_2 + 6\bar{O}_2 \right) + 2na^2 W_{3,3}, \quad (165)$$

from coefficient of $\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} (P_{4,4} \cos 4\phi)$,

$$C_4 Y_{4,4} + D_4 Z_{4,4} = -\frac{1}{4} \varepsilon_2 \cos (\alpha_2 + \beta_2) \left(a \frac{d\bar{M}_2}{da} - \bar{N}_2 + 4\bar{O}_2 \right), \quad (166)$$

from coefficient of $\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} (P_{4,4} \sin 4\phi)$,

$$C_4 Y'_{4,4} + D_4 Z'_{4,4} = -\frac{1}{4} \varepsilon_2 \sin (\alpha_2 + \beta_2) \left(a \frac{d\bar{M}_2}{da} - \bar{N}_2 + 4\bar{O}_2 \right), \quad (167)$$

from coefficient of $\frac{dP_2}{d\theta}$,

$$\delta W_2 = \frac{11}{42} \{ 6\varepsilon W_2 + \varepsilon_1 \cos (\alpha_1 - \beta_1) W_{2,1} - 8\varepsilon_2 \cos (\alpha_2 - \beta_2) W_{2,2} \}, \quad (168)$$

from coefficient of $\frac{d}{d\theta} (P_{2,1} \cos \phi)$,

$$\delta W_{2,1} = \frac{1}{2na} (C_3 Y'_{3,1} + D_3 Z'_{3,1}) + \frac{93}{56} \varepsilon_1 \cos \alpha_1 W_2 \\ + \frac{1}{56} W_{2,1} \{ -5\varepsilon \cos \beta_1 + 39\varepsilon_2 \cos (\alpha_2 - \beta_1) \} + \frac{137}{56} \varepsilon_1 \cos (\beta_2 - \alpha_1) W_{2,2}, \quad (169)$$

from coefficient of $\frac{d}{d\theta} (P_{2,1} \sin \phi)$,

$$\begin{aligned} \delta W'_{2,1} = & -\frac{1}{2na} (C_3 Y_{3,1} + D_3 Z_{3,1}) + \frac{93}{56} \varepsilon_1 \sin \alpha_1 W_2 \\ & + \frac{1}{56} W_{2,1} \{-5\varepsilon \sin \beta_1 + 39\varepsilon_2 \sin (\alpha_2 - \beta_1)\} + \frac{137}{56} \varepsilon_1 \sin (\beta_2 - \alpha_1) W_{2,2}, \end{aligned} \quad (170)$$

from coefficient of $\frac{d}{d\theta} (P_{2,2} \cos 2\phi)$,

$$\begin{aligned} \delta W_{2,2} = & \frac{1}{na} (C_3 Y'_{3,2} + D_3 Z'_{3,2}) + \frac{27}{14} \varepsilon_2 \cos \alpha_2 W_2 \\ & + \frac{11}{28} \varepsilon_1 \cos (\alpha_1 + \beta_1) W_{2,1} - \frac{71}{14} \varepsilon \cos \beta_2 W_{2,2}, \end{aligned} \quad (171)$$

from coefficient of $\frac{d}{d\theta} (P_{2,2} \sin 2\phi)$,

$$\begin{aligned} \delta W'_{2,2} = & -\frac{1}{na} (C_3 Y_{3,2} + D_3 Z_{3,2}) + \frac{27}{14} \varepsilon_2 \sin \alpha_2 W_2 \\ & + \frac{11}{28} \varepsilon_1 \sin (\alpha_1 + \beta_1) W_{2,1} - \frac{71}{14} \varepsilon \sin \beta_2 W_{2,2}, \end{aligned} \quad (172)$$

from coefficient of $\frac{dP_3}{d\theta}$,

$$W_3 = \frac{1}{30na^2} \left\{ \varepsilon_1 \sin (\alpha_1 - \beta_1) \left(a \frac{d\bar{M}_1}{da} + \bar{N}_1 \right) - 2\varepsilon_2 \sin (\alpha_2 - \beta_2) \left(a \frac{d\bar{M}_2}{da} + \bar{N}_2 \right) \right\}, \quad (173)$$

from coefficient of $\frac{dP_4}{d\theta}$,

$$W_4 = -\frac{1}{35a^2} \{ 9\varepsilon W_2 - 2\varepsilon_1 \cos (\alpha_1 - \beta_1) W_{2,1} + 2\varepsilon_2 \cos (\alpha_2 - \beta_2) W_{2,2} \}, \quad (174)$$

from coefficient of $\frac{d}{d\theta} (P_{4,1} \cos \phi)$,

$$\begin{aligned} W_{4,1} = & \frac{1}{4a^2} \{-3\varepsilon_1 \cos \alpha_1 W_2 - 3\varepsilon \cos \beta_1 W_{2,1} \\ & + \varepsilon_2 \cos (\alpha_2 - \beta_1) W_{2,1} + \varepsilon_1 \cos (\beta_2 - \alpha_1) W_{2,2}\}, \end{aligned} \quad (175)$$

from coefficient of $\frac{d}{d\theta} (P_{4,1} \sin \phi)$,

$$\begin{aligned} W'_{4,1} = & \frac{1}{4a^2} \{-3\varepsilon_1 \sin \alpha_1 W_2 - 3\varepsilon \sin \beta_1 W_{2,1} \\ & + \varepsilon_2 \sin (\alpha_2 - \beta_1) W_{2,1} + \varepsilon_1 \sin (\beta_2 - \alpha_1) W_{2,2}\}, \end{aligned} \quad (176)$$

from coefficient of $\frac{d}{d\theta} (P_{4,2} \cos 2\phi)$,

$$W_{4,2} = -\frac{1}{4a^2} \{ 3\varepsilon_2 \cos \alpha_2 W_2 + \varepsilon_1 \cos (\alpha_1 + \beta_1) W_{2,1} + 3\varepsilon \cos \beta_2 W_{2,2} \}, \quad (177)$$

from coefficient of $\frac{d}{d\theta} (P_{4,2} \sin 2\phi)$,

$$W'_{4,2} = -\frac{1}{4a^2} \{ 3\varepsilon_2 \sin \alpha_2 W_2 + \varepsilon_1 \sin (\alpha_1 + \beta_1) W_{2,1} + 3\varepsilon \sin \beta_2 W_{2,2} \}, \quad (178)$$

from coefficient of $\frac{d}{d\theta} (P_{4,3} \cos 3\phi)$,

$$W_{4,3} = -\frac{1}{4a^2} \{ \varepsilon_2 \cos (\alpha_2 + \beta_1) W_{2,1} + \varepsilon_1 \cos (\alpha_1 + \beta_2) W_{2,2} \}, \quad (179)$$

from coefficient of $\frac{d}{d\theta} (P_{4,3} \sin 3\phi)$,

$$W'_{4,3} = -\frac{1}{4a^2} \{ \varepsilon_2 \sin (\alpha_2 + \beta_1) W_{2,1} + \varepsilon_1 \sin (\alpha_1 + \beta_2) W_{2,2} \}, \quad (180)$$

from coefficient of $\frac{d}{d\theta} (P_{4,4} \cos 4\phi)$,

$$W_{4,4} = -\frac{1}{4a^2} \varepsilon_2 \cos (\alpha_2 + \beta_2) W_{2,2}, \quad (181)$$

from coefficient of $\frac{d}{d\theta} (P_{4,4} \sin 4\phi)$,

$$W'_{4,4} = -\frac{1}{4a^2} \varepsilon_2 \sin (\alpha_2 + \beta_2) W_{2,2}. \quad (182)$$

Finally, coming to the purely uncompensated terms, we get

from coefficient of $\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} (P_{1,1} \cos \phi)$,

$$\begin{aligned} a_3 = & \frac{3}{8} na [-\varepsilon_1 \sin \alpha_1 W_2 + \varepsilon \sin \beta_1 W_{2,1} \\ & + 3 \{ -\varepsilon_2 \sin (\alpha_2 - \beta_1) W_{2,1} + \varepsilon_1 \sin (\beta_2 - \alpha_1) W_{2,2} \}] - \frac{3}{10} (C_3 Y_{3,1} + D_3 Z_{3,1}), \end{aligned} \quad (183)$$

from coefficient of $\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} (P_{1,1} \sin \phi)$,

$$b_3 = \frac{3}{8} na [-\varepsilon_1 \cos \alpha_1 W_2 + \varepsilon \cos \beta_1 W_{2,1} + 3\{-\varepsilon_2 \cos (\alpha_2 - \beta_1) W_{2,1} + \varepsilon_1 \cos (\beta_2 - \alpha_1) W_{2,2}\}] + \frac{3}{10} (C_3 Y'_{3,1} + D_3 Z'_{3,1}), \quad (184)$$

from coefficient of $\frac{dP_1}{d\theta}$,

$$f_3 = -\frac{1}{10} \varepsilon_1 \sin (\alpha_1 - \beta_1) \left(a \frac{d\bar{M}_1}{da} + \bar{N}_1 - 5\bar{O}_1 \right) - \frac{4}{5} \varepsilon_2 \sin (\alpha_2 - \beta_2) \left(a \frac{d\bar{M}_2}{da} + \bar{N}_2 - 5\bar{O}_2 \right). \quad (185)$$

§47. Of the equations supplied by the second and third surface conditions, some, e. g. (132) and (166), are obviously identical as they stand. Taking either of the equations in such a case along with the equation for the same constants supplied by the first surface condition, we clearly determine the constants without ambiguity. Thus from (107) and (132) we determine at once $Y_{4,4}$ and $Z_{4,4}$.

In the majority of instances, however, whilst corresponding equations from the second and third surface conditions are easily recognizable by means of the suffixes employed, they are not identical as they stand, one containing not infrequently an arbitrary constant which does not appear in the other. To go into all the details of the comparison of the two sets of equations would occupy too much space. A general outline will, it is hoped, suffice.

It will be noticed that $W'_{3,1}$ occurs in (120), (154) and (160); also that (120) and (154) are equations for $C_2 \delta Y_{2,1} + D_2 \delta Z_{2,1}$, while (160) and (126) are equations for $C_4 Y_{4,1} + D_4 Z_{4,1}$. We thus take these four equations together.

Equating the values supplied for $C_2 \delta Y_{2,1} + D_2 \delta Z_{2,1}$ by (120) and (154), we get a simple equation in which the unknowns are d_3 and $W'_{3,1}$; while equating the values supplied for $C_4 Y_{4,1} + D_4 Z_{4,1}$ by (126) and (160), we obtain the value of $W'_{3,1}$, and so by the previous result the value of d_3 also. We are thus left with two equations from which $W'_{3,1}$ and d_3 have been eliminated. Of these, one taken along with (89) determines $\delta Y_{2,1}$ and $\delta Z_{2,1}$, while the other taken along with (101) determines $Y_{4,1}$ and $Z_{4,1}$.

Similarly we consider (121), (127), (155) and (161) together, determining from them *inter alia* the value of e_3 .

In some cases we seem at first sight to have too many equations. For instance, a value for $W'_{3,2}$ can be deduced from (128) and (162) as well as from (122) and (156). The values so found, however, are identical. A similar result holds in the case of the pairs (123), (157) and (129), (163), either of which gives the value of $W_{3,2}$.

Again, $W'_{3,3}$ is given explicitly by (139); but this value is identical with that obtained by eliminating $C_4 Y_{4,3} + D_4 Z_{4,3}$ between (130) and (164). There is a similar identity between the value obtained from (131) and (165) for $W_{3,3}$ and that given explicitly in (138).

The first approximations (117), (118), (153) for $W_{2,1}$, $W_{3,2}$ and W_2 are to be substituted in all terms on the right-hand sides of the equations as they occur multiplied by ϵ , ϵ_1 or ϵ_2 . Thus (168) combined with (153) gives the complete value of W_2 as far as the second approximation.

Equating the values supplied for $\delta W_{2,1}$ by (134) and (169) we obtain a simple equation whose unknowns are b_2 and $C_3 Y'_{3,1} + D_3 Z'_{3,1}$. The value of the latter quantity is found by eliminating $W_{4,1}$ between (140) and (175). We thus find the values of b_2 and of $C_3 Y'_{3,1} + D_3 Z'_{3,1}$, and combining the latter result with (95), we determine the values of $Y'_{3,1}$ and $Z'_{3,1}$. Similarly from (135), (170), (141) and (176) we obtain the values of a_2 , $\delta W'_{2,1}$, $W'_{4,1}$ and $C_3 Y_{3,1} + D_3 Z_{3,1}$; and taking the last result along with (94), we find $Y_{3,1}$ and $Z_{3,1}$.

Coincident values for $C_3 Y'_{3,2} + D_3 Z'_{3,2}$ are obtainable from the pairs (136), (171) and (142), (177); while coincident values for $C_3 Y_{3,2} + D_3 Z_{3,2}$ are got from the pairs (137), (172) and (143), (178).

Between (144) and (179) we obtain the values of $W_{4,3}$ and $C_3 Y'_{3,3} + D_3 Z'_{3,3}$, the latter value being identical with that given explicitly in (159). Between (145) and (180) we obtain the values of $W'_{4,3}$ and $C_3 Y_{3,3} + D_3 Z_{3,3}$, the latter being identical with (158). The pairs (146), (181) and (147), (182) are identical as they stand.

If the equations are examined in detail it will be found there are enough to determine all the constants, and that any apparently superabundant equations are never inconsistent with but merely combinations of previous equations.

As regards the arbitrary constants appearing in the uncompensated terms, the three, a_1 , b_1 , c_1 occurring in the first surface condition are given by (109), (110) and (111), when we substitute for the W 's their first approximations

from (117), (118) and (153). We have already shown how d_s, e_s, a_s, b_s are found. Of the others, c_s, e_s, d_s are given by (148), (149) and (150), when we substitute their first approximation values for $W_{2,1}$ and $W_{2,2}$, and replace $W_{3,1}$ and $W_{3,1}'$ by their values determined as explained above. The final three, a_s, b_s, f_s , are given by (183), (184) and (185) when we substitute for the W 's their first approximation values, and employ for $C_3 Y_{3,1} + D_3 Z_{3,1}$ and $C_3 Y_{3,1} + D_3 Z_{3,1}$ the values whose deduction from (140), (175) and (141), (176) has been already explained.

§48. The values of these constants contained in the uncompensated terms may conveniently be recorded at this stage. They are as follows:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{1}{5} [-3\varepsilon_1 \sin \alpha_1 \Phi_2 + \{3\varepsilon \sin \beta_1 - 2\varepsilon_2 \sin (\alpha_2 - \beta_1)\} \Phi_{2,1} \\
 &\quad + 2\varepsilon_1 \sin (\beta_2 - \alpha_1) \Phi_{2,2}], \\
 b_1 &= \frac{1}{5} [3\varepsilon_1 \cos \alpha_1 \Phi_2 - \{3\varepsilon \cos \beta_1 - 2\varepsilon_2 \cos (\alpha_2 - \beta_1)\} \Phi_{2,1} \\
 &\quad - 2\varepsilon_1 \cos (\beta_2 - \alpha_1) \Phi_{2,2}], \\
 c_1 &= \frac{1}{5} [\varepsilon_1 \sin (\alpha_1 - \beta_1) \Phi_{2,1} + 8\varepsilon_2 \sin (\alpha_2 - \beta_2) \Phi_{2,2}], \\
 a_2 &= \frac{3}{10} [3\varepsilon_1 \sin \alpha_1 \Phi_2 - \{3\varepsilon \sin \beta_1 - 2\varepsilon_2 \sin (\alpha_2 - \beta_1)\} \Phi_{2,1} \\
 &\quad - 2\varepsilon_1 \sin (\beta_2 - \alpha_1) \Phi_{2,2}], \\
 b_2 &= \frac{3}{10} [-3\varepsilon_1 \cos \alpha_1 \Phi_2 + \{3\varepsilon \cos \beta_1 - 2\varepsilon_2 \cos (\alpha_2 - \beta_1)\} \Phi_{2,1} \\
 &\quad + 2\varepsilon_1 \cos (\beta_2 - \alpha_1) \Phi_{2,2}], \\
 c_2 &= \frac{3}{10} [\varepsilon_1 \sin (\alpha_1 - \beta_1) \Phi_{2,1} + 8\varepsilon_2 \sin (\alpha_2 - \beta_2) \Phi_{2,2}], \\
 d_2 &= \frac{1}{10} [-3\varepsilon_1 \cos \alpha_1 \left(a \frac{d\bar{M}}{da} + \bar{N} - 5\bar{O} \right) \\
 &\quad + \{3\varepsilon \cos \beta_1 - 2\varepsilon_2 \cos (\alpha_2 - \beta_1)\} \left(a \frac{d\bar{M}_1}{da} + \bar{N}_1 - 5\bar{O}_1 \right) \\
 &\quad + 2\varepsilon_1 \cos (\beta_2 - \alpha_1) \left(a \frac{d\bar{M}_2}{da} + \bar{N}_2 - 5\bar{O}_2 \right)], \\
 e_2 &= \frac{1}{10} [-3\varepsilon_1 \sin \alpha_1 \left(a \frac{d\bar{M}}{da} + \bar{N} - 5\bar{O} \right) \\
 &\quad + \{3\varepsilon \sin \beta_1 - 2\varepsilon_2 \sin (\alpha_2 - \beta_1)\} \left(a \frac{d\bar{M}_1}{da} + \bar{N}_1 - 5\bar{O}_1 \right) \\
 &\quad + 2\varepsilon_1 \sin (\beta_2 - \alpha_1) \left(a \frac{d\bar{M}_2}{da} + \bar{N}_2 - 5\bar{O}_2 \right)],
 \end{aligned} \tag{186}$$

$$\begin{aligned}
 a_3 &= \frac{3}{10} \left[-3\varepsilon_1 \sin \alpha_1 \Phi_2 + \{3\varepsilon \sin \beta_1 - 2\varepsilon_2 \sin (\alpha_2 - \beta_1)\} \Phi_{2,1} \right. \\
 &\quad \left. + 2\varepsilon_1 \sin (\beta_2 - \alpha_1) \Phi_{2,2} \right], \\
 b_3 &= \frac{3}{10} \left[-3\varepsilon_1 \cos \alpha_1 \Phi_2 + \{3\varepsilon \cos \beta_1 - 2\varepsilon_2 \cos (\alpha_2 - \beta_1)\} \Phi_{2,1} \right. \\
 &\quad \left. + 2\varepsilon_1 \cos (\beta_2 - \alpha_1) \Phi_{2,2} \right], \\
 d_3 &= \frac{1}{10} \left[3\varepsilon_1 \cos \alpha_1 \left(a \frac{d\bar{M}}{da} + \bar{N} - 5\bar{O} \right) \right. \\
 &\quad - \{3\varepsilon \cos \beta_1 - 2\varepsilon_2 \cos (\alpha_2 - \beta_1)\} \left(a \frac{d\bar{M}_1}{da} + \bar{N}_1 - 5\bar{O}_1 \right) \\
 &\quad \left. - 2\varepsilon_1 \cos (\beta_2 - \alpha_1) \left(a \frac{d\bar{M}_2}{da} + \bar{N}_2 - 5\bar{O}_2 \right) \right], \\
 e_3 &= \frac{1}{10} \left[-3\varepsilon_1 \sin \alpha_1 \left(a \frac{d\bar{M}}{da} + \bar{N} - 5\bar{O} \right) \right. \\
 &\quad + \{3\varepsilon \sin \beta_1 - 2\varepsilon_2 \sin (\alpha_2 - \beta_1)\} \left(a \frac{d\bar{M}_1}{da} + \bar{N}_1 - 5\bar{O}_1 \right) \\
 &\quad \left. + 2\varepsilon_1 \sin (\beta_2 - \alpha_1) \left(a \frac{d\bar{M}_2}{da} + \bar{N}_2 - 5\bar{O}_2 \right) \right], \\
 f_3 &= -\frac{1}{10} \left[\varepsilon_1 \sin (\alpha_1 - \beta_1) \left(a \frac{d\bar{M}_1}{da} + \bar{N}_1 - 5\bar{O}_1 \right) \right. \\
 &\quad \left. + 8\varepsilon_2 \sin (\alpha_2 - \beta_2) \left(a \frac{d\bar{M}_2}{da} + \bar{N}_2 - 5\bar{O}_2 \right) \right].
 \end{aligned} \tag{186}$$

The existence of the uncompensated terms may seem rather a stumbling block to the reader, but he will presently find that we can give a good account of them.

§49. Before doing this, however, it seems best to collect the results for the arbitrary constants answering to the true elastic strains.

Our previous work has determined Y_0 and all the W constants, and it furnishes pairs of simple equations sufficient to determine all the Y and Z constants. Some of these equations have already appeared in their final form, but it is convenient to record them all together, so that corresponding pairs may be found side by side. After our previous remarks it is unnecessary to state the sources of the several equations. Those bracketed together contain the same pair of constants. We have

$$\begin{aligned}
 A_0 Y_0 &= -\frac{1}{5} \varepsilon \left(a \frac{d\bar{L}}{da} - 6\bar{M} \right) - \frac{1}{15} \varepsilon_1 \cos (\alpha_1 - \beta_1) \left(a \frac{d\bar{L}_1}{da} - 6\bar{M}_1 \right) \\
 &\quad - \frac{4}{15} \varepsilon_2 \cos (\alpha_2 - \beta_2) \left(a \frac{d\bar{L}_2}{da} - 6\bar{M}_2 \right),
 \end{aligned} \tag{187}$$

$$\begin{aligned}
 A_2 \delta Y_2 + B_2 \delta Z_2 &= -\frac{2}{7} \varepsilon \left(a \frac{d\bar{L}}{da} - 3\bar{M} \right) - \frac{1}{21} \varepsilon_1 \cos(\alpha_1 - \beta_1) \left(a \frac{d\bar{L}_1}{da} - 3\bar{M}_1 \right) \\
 &\quad + \frac{8}{21} \varepsilon_2 \cos(\alpha_2 - \beta_2) \left(a \frac{d\bar{L}_2}{da} - 3\bar{M}_2 \right), \\
 C_2 \delta Y_2 + D_2 \delta Z_2 &= -\frac{1}{7} \varepsilon \left(a \frac{d\bar{M}}{da} - \bar{N} - 3\bar{O} \right) \\
 &\quad - \frac{1}{42} \varepsilon_1 \cos(\alpha_1 - \beta_1) \left(a \frac{d\bar{M}_1}{da} - \bar{N}_1 - 3\bar{O}_1 \right) \\
 &\quad + \frac{4}{21} \varepsilon_2 \cos(\alpha_2 - \beta_2) \left(a \frac{d\bar{M}_2}{da} - \bar{N}_2 - 3\bar{O}_2 \right),
 \end{aligned} \tag{188}$$

$$\begin{aligned}
 A_2 \delta Y_{2,1} + B_2 \delta Z_{2,1} &= -\frac{1}{7} \varepsilon_1 \cos \alpha_1 \left(a \frac{d\bar{L}}{da} - 3\bar{M} \right) \\
 &\quad - \frac{1}{7} \varepsilon \cos \beta_1 \left(a \frac{d\bar{L}_1}{da} - 3\bar{M}_1 \right) - \frac{2}{7} \varepsilon_2 \cos(\alpha_2 - \beta_1) \left(a \frac{d\bar{L}_1}{da} - 3\bar{M}_1 \right) \\
 &\quad - \frac{2}{7} \varepsilon_1 \cos(\beta_2 - \alpha_1) \left(a \frac{d\bar{L}_2}{da} - 3\bar{M}_2 \right), \\
 C_2 \delta Y_{2,1} + D_2 \delta Z_{2,1} &= -\frac{1}{14} \varepsilon_1 \cos \alpha_1 \left(a \frac{d\bar{M}}{da} - \bar{N} - 3\bar{O} \right) \\
 &\quad - \frac{1}{14} \varepsilon \cos \beta_1 \left(a \frac{d\bar{M}_1}{da} - \bar{N}_1 - 3\bar{O}_1 \right) \\
 &\quad - \frac{1}{7} \varepsilon_2 \cos(\alpha_2 - \beta_1) \left(a \frac{d\bar{M}_1}{da} - \bar{N}_1 - 3\bar{O}_1 \right) \\
 &\quad - \frac{1}{7} \varepsilon_1 \cos(\beta_2 - \alpha_1) \left(a \frac{d\bar{M}_2}{da} - \bar{N}_2 - 3\bar{O}_2 \right),
 \end{aligned} \tag{189}$$

$$\begin{aligned}
 A_2 \delta Y'_{2,1} + B_2 \delta Z'_{2,1} &= -\frac{1}{7} \varepsilon_1 \sin \alpha_1 \left(a \frac{d\bar{L}}{da} - 3\bar{M} \right) \\
 &\quad - \frac{1}{7} \varepsilon \sin \beta_1 \left(a \frac{d\bar{L}_1}{da} - 3\bar{M}_1 \right) - \frac{2}{7} \varepsilon_2 \sin(\alpha_2 - \beta_1) \left(a \frac{d\bar{L}_1}{da} - 3\bar{M}_1 \right) \\
 &\quad - \frac{2}{7} \varepsilon_1 \sin(\beta_2 - \alpha_1) \left(a \frac{d\bar{L}_2}{da} - 3\bar{M}_2 \right), \\
 C_2 \delta Y'_{2,1} + D_2 \delta Z'_{2,1} &= -\frac{1}{14} \varepsilon_1 \sin \alpha_1 \left(a \frac{d\bar{M}}{da} - \bar{N} - 3\bar{O} \right) \\
 &\quad - \frac{1}{14} \varepsilon \sin \beta_1 \left(a \frac{d\bar{M}_1}{da} - \bar{N}_1 - 3\bar{O}_1 \right) \\
 &\quad - \frac{1}{7} \varepsilon_2 \sin(\alpha_2 - \beta_1) \left(a \frac{d\bar{M}_1}{da} - \bar{N}_1 - 3\bar{O}_1 \right) \\
 &\quad - \frac{1}{7} \varepsilon_1 \sin(\beta_2 - \alpha_1) \left(a \frac{d\bar{M}_2}{da} - \bar{N}_2 - 3\bar{O}_2 \right),
 \end{aligned} \tag{190}$$

$$\left. \begin{aligned}
 A_2 \delta Y_{2,2} + B_2 \delta Z_{2,2} &= \frac{2}{7} \varepsilon_2 \cos \alpha_2 \left(a \frac{d\bar{L}}{da} - 3\bar{M} \right) \\
 &\quad - \frac{1}{14} \varepsilon_1 \cos (\alpha_1 + \beta_1) \left(a \frac{d\bar{L}_1}{da} - 3\bar{M}_1 \right) + \frac{2}{7} \varepsilon \cos \beta_2 \left(a \frac{d\bar{L}_2}{da} - 3\bar{M}_2 \right), \\
 C_2 \delta Y_{2,2} + D_2 \delta Z_{2,2} &= \frac{1}{7} \varepsilon_2 \cos \alpha_2 \left(a \frac{d\bar{M}}{da} - \bar{N} - 3\bar{O} \right) \\
 &\quad - \frac{1}{28} \varepsilon_1 \cos (\alpha_1 + \beta_1) \left(a \frac{d\bar{M}_1}{da} - \bar{N}_1 - 3\bar{O}_1 \right) \\
 &\quad + \frac{1}{7} \varepsilon \cos \beta_2 \left(a \frac{d\bar{M}_2}{da} - \bar{N}_2 - 3\bar{O}_2 \right),
 \end{aligned} \right\} \quad (191)$$

$$\left. \begin{aligned}
 A_2 \delta Y'_{2,2} + B_2 \delta Z'_{2,2} &= \frac{2}{7} \varepsilon_2 \sin \alpha_2 \left(a \frac{d\bar{L}}{da} - 3\bar{M} \right) \\
 &\quad - \frac{1}{14} \varepsilon_1 \sin (\alpha_1 + \beta_1) \left(a \frac{d\bar{L}_1}{da} - 3\bar{M}_1 \right) + \frac{2}{7} \varepsilon \sin \beta_2 \left(a \frac{d\bar{L}_2}{da} - 3\bar{M}_2 \right), \\
 C_2 \delta Y'_{2,2} + D_2 \delta Z'_{2,2} &= \frac{1}{7} \varepsilon_2 \sin \alpha_2 \left(a \frac{d\bar{M}}{da} - \bar{N} - 3\bar{O} \right) \\
 &\quad - \frac{1}{28} \varepsilon_1 \sin (\alpha_1 + \beta_1) \left(a \frac{d\bar{M}_1}{da} - \bar{N}_1 - 3\bar{O}_1 \right) \\
 &\quad + \frac{1}{7} \varepsilon \sin \beta_2 \left(a \frac{d\bar{M}_2}{da} - \bar{N}_2 - 3\bar{O}_2 \right),
 \end{aligned} \right\} \quad (192)$$

$$\frac{A_3 Y_3 + B_3 Z_3}{12} = \frac{C_3 Y_3 + D_3 Z_3}{7} = \frac{1}{15} \{ -\varepsilon_1 \sin (\alpha_1 - \beta_1) \Phi_{2,1} + 2\varepsilon_2 \sin (\alpha_2 - \beta_2) \Phi_{2,2} \}, \quad (193)$$

$$\frac{A_3 Y_{3,1} + B_3 Z_{3,1}}{12} = \frac{C_3 Y_{3,1} + D_3 Z_{3,1}}{7} = \frac{1}{4} [\varepsilon_1 \sin \alpha_1 \Phi_2 - \{ \varepsilon \sin \beta_1 + \varepsilon_2 \sin (\alpha_2 - \beta_1) \} \Phi_{2,1} + \varepsilon_1 \sin (\beta_2 - \alpha_1) \Phi_{2,2}], \quad (194)$$

$$\frac{A_3 Y'_{3,1} + B_3 Z'_{3,1}}{12} = \frac{C_3 Y'_{3,1} + D_3 Z'_{3,1}}{7} = \frac{1}{4} [-\varepsilon_1 \cos \alpha_1 \Phi_2 + \{ \varepsilon \cos \beta_1 + \varepsilon_2 \cos (\alpha_2 - \beta_1) \} \Phi_{2,1} - \varepsilon_1 \cos (\beta_2 - \alpha_1) \Phi_{2,2}], \quad (195)$$

$$\frac{A_3 Y_{3,2} + B_3 Z_{3,2}}{12} = \frac{C_3 Y_{3,2} + D_3 Z_{3,2}}{7} = \frac{1}{2} \{ \varepsilon_2 \sin \alpha_2 \Phi_2 - \varepsilon \sin \beta_2 \Phi_{2,2} \}, \quad (196)$$

$$\frac{A_3 Y'_{3,2} + B_3 Z'_{3,2}}{12} = \frac{C_3 Y'_{3,2} + D_3 Z'_{3,2}}{7} = \frac{1}{2} \{ -\varepsilon_2 \cos \alpha_2 \Phi_2 + \varepsilon \cos \beta_2 \Phi_{2,2} \}, \quad (197)$$

$$\frac{A_3 Y_{3,3} + B_3 Z_{3,3}}{12} = \frac{C_3 Y_{3,3} + D_3 Z_{3,3}}{7} = \frac{1}{12} \{ \varepsilon_2 \sin (\alpha_2 + \beta_1) \Phi_{2,1} - \varepsilon_1 \sin (\beta_2 + \alpha_1) \Phi_{2,2} \}, \quad (198)$$

$$\frac{A_3 Y'_{3,3} + B_3 Z'_{3,3}}{12} = \frac{C_3 Y'_{3,3} + D_3 Z'_{3,3}}{7} = \frac{1}{12} \{ -\varepsilon_2 \cos (\alpha_2 + \beta_1) \Phi_{2,1} + \varepsilon_1 \cos (\beta_2 + \alpha_1) \Phi_{2,2} \}, \quad (199)$$

$$\begin{aligned}
 A_4 Y_4 + B_4 Z_4 &= -\frac{18}{35} \varepsilon \left(a \frac{d\bar{L}}{da} + 4\bar{M} \right) + \frac{4}{35} \varepsilon_1 \cos(\alpha_1 - \beta_1) \left(a \frac{d\bar{L}_1}{da} + 4\bar{M}_1 \right) \\
 &\quad - \frac{4}{35} \varepsilon_2 \cos(\alpha_2 - \beta_2) \left(a \frac{d\bar{L}_2}{da} + 4\bar{M}_2 \right), \\
 C_4 Y_4 + D_4 Z_4 &= -\frac{9}{35} \varepsilon \left(a \frac{d\bar{M}}{da} - \bar{N} + 4\bar{O} \right) \\
 &\quad + \frac{2}{35} \varepsilon_1 \cos(\alpha_1 - \beta_1) \left(a \frac{d\bar{M}_1}{da} - \bar{N}_1 + 4\bar{O}_1 \right) \\
 &\quad - \frac{2}{35} \varepsilon_2 \cos(\alpha_2 - \beta_2) \left(a \frac{d\bar{M}_2}{da} - \bar{N}_2 + 4\bar{O}_2 \right),
 \end{aligned}
 \tag{200}$$

$$\begin{aligned}
 A_4 Y_{4,1} + B_4 Z_{4,1} &= -\frac{3}{2} \varepsilon_1 \cos \alpha_1 \left(a \frac{d\bar{L}}{da} + 4\bar{M} \right) \\
 &\quad - \frac{1}{2} \{ 3\varepsilon \cos \beta_1 - \varepsilon_2 \cos(\alpha_2 - \beta_1) \} \left(a \frac{d\bar{L}_1}{da} + 4\bar{M}_1 \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \varepsilon_1 \cos(\beta_2 - \alpha_1) \left(a \frac{d\bar{L}_2}{da} + 4\bar{M}_2 \right), \\
 C_4 Y_{4,1} + D_4 Z_{4,1} &= -\frac{3}{4} \varepsilon_1 \cos \alpha_1 \left(a \frac{d\bar{M}}{da} - \bar{N} + 4\bar{O} \right) \\
 &\quad - \frac{1}{4} \{ 3\varepsilon \cos \beta_1 - \varepsilon_2 \cos(\alpha_2 - \beta_1) \} \left(a \frac{d\bar{M}_1}{da} - \bar{N}_1 + 4\bar{O}_1 \right) \\
 &\quad + \frac{1}{4} \varepsilon_1 \cos(\beta_2 - \alpha_1) \left(a \frac{d\bar{M}_2}{da} - \bar{N}_2 + 4\bar{O}_2 \right),
 \end{aligned}
 \tag{201}$$

$$\begin{aligned}
 A_4 Y'_{4,1} + B_4 Z'_{4,1} &= -\frac{3}{2} \varepsilon_1 \sin \alpha_1 \left(a \frac{d\bar{L}}{da} + 4\bar{M} \right) \\
 &\quad - \frac{1}{2} \{ 3\varepsilon \sin \beta_1 - \varepsilon_2 \sin(\alpha_2 - \beta_1) \} \left(a \frac{d\bar{L}_1}{da} + 4\bar{M}_1 \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \varepsilon_1 \sin(\beta_2 - \alpha_1) \left(a \frac{d\bar{L}_2}{da} + 4\bar{M}_2 \right), \\
 C_4 Y'_{4,1} + D_4 Z'_{4,1} &= -\frac{3}{4} \varepsilon_1 \sin \alpha_1 \left(a \frac{d\bar{M}}{da} - \bar{N} + 4\bar{O} \right) \\
 &\quad - \frac{1}{4} \{ 3\varepsilon \sin \beta_1 - \varepsilon_2 \sin(\alpha_2 - \beta_1) \} \left(a \frac{d\bar{M}_1}{da} - \bar{N}_1 + 4\bar{O}_1 \right) \\
 &\quad + \frac{1}{4} \varepsilon_1 \sin(\beta_2 - \alpha_1) \left(a \frac{d\bar{M}_2}{da} - \bar{N}_2 + 4\bar{O}_2 \right),
 \end{aligned}
 \tag{202}$$

$$\begin{aligned}
 A_4 Y_{4,2} + B_4 Z_{4,2} &= -\frac{1}{2} \left\{ 3\varepsilon_2 \cos \alpha_2 \left(a \frac{d\bar{L}}{da} + 4\bar{M} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \varepsilon_1 \cos (\alpha_1 + \beta_1) \left(a \frac{d\bar{L}_1}{da} + 4\bar{M}_1 \right) + 3\varepsilon \cos \beta_2 \left(a \frac{d\bar{L}_2}{da} + 4\bar{M}_2 \right) \right\}, \\
 C_4 Y_{4,2} + D_4 Z_{4,2} &= -\frac{1}{4} \left\{ 3\varepsilon_2 \cos \alpha_2 \left(a \frac{d\bar{M}}{da} - \bar{N} + 4\bar{O} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \varepsilon_1 \cos (\alpha_1 + \beta_1) \left(a \frac{d\bar{M}_1}{da} - \bar{N}_1 + 4\bar{O}_1 \right) \right. \\
 &\quad \left. + 3\varepsilon \cos \beta_2 \left(a \frac{d\bar{M}_2}{da} - \bar{N}_2 + 4\bar{O}_2 \right) \right\},
 \end{aligned} \tag{203}$$

$$\begin{aligned}
 A_4 Y'_{4,2} + B_4 Z'_{4,2} &= -\frac{1}{2} \left[3\varepsilon_2 \sin \alpha_2 \left(a \frac{d\bar{L}}{da} + 4\bar{M} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \varepsilon_1 \sin (\alpha_1 + \beta_1) \left(a \frac{d\bar{L}_1}{da} + 4\bar{M}_1 \right) + 3\varepsilon \sin \beta_2 \left(a \frac{d\bar{L}_2}{da} + 4\bar{M}_2 \right) \right], \\
 C_4 Y'_{4,2} + D_4 Z'_{4,2} &= -\frac{1}{4} \left[3\varepsilon_2 \sin \alpha_2 \left(a \frac{d\bar{M}}{da} - \bar{N} + 4\bar{O} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \varepsilon_1 \sin (\alpha_1 + \beta_1) \left(a \frac{d\bar{M}_1}{da} - \bar{N}_1 + 4\bar{O}_1 \right) \right. \\
 &\quad \left. + 3\varepsilon \sin \beta_2 \left(a \frac{d\bar{M}_2}{da} - \bar{N}_2 + 4\bar{O}_2 \right) \right],
 \end{aligned} \tag{204}$$

$$\begin{aligned}
 A_4 Y_{4,3} + B_4 Z_{4,3} &= -\frac{1}{2} \left[\varepsilon_2 \cos (\alpha_2 + \beta_1) \left(a \frac{d\bar{L}_1}{da} + 4\bar{M}_1 \right) \right. \\
 &\quad \left. + \varepsilon_1 \cos (\beta_2 + \alpha_1) \left(a \frac{d\bar{L}_2}{da} + 4\bar{M}_2 \right) \right], \\
 C_4 Y_{4,3} + D_4 Z_{4,3} &= -\frac{1}{4} \left[\varepsilon_2 \cos (\alpha_2 + \beta_1) \left(a \frac{d\bar{M}_1}{da} - \bar{N}_1 + 4\bar{O}_1 \right) \right. \\
 &\quad \left. + \varepsilon_1 \cos (\beta_2 + \alpha_1) \left(a \frac{d\bar{M}_2}{da} - \bar{N}_2 + 4\bar{O}_2 \right) \right],
 \end{aligned} \tag{205}$$

$$\begin{aligned}
 A_4 Y'_{4,3} + B_4 Z'_{4,3} &= -\frac{1}{2} \left[\varepsilon_2 \sin (\alpha_2 + \beta_1) \left(a \frac{d\bar{L}_1}{da} + 4\bar{M}_1 \right) \right. \\
 &\quad \left. + \varepsilon_1 \sin (\beta_2 + \alpha_1) \left(a \frac{d\bar{L}_2}{da} + 4\bar{M}_2 \right) \right], \\
 C_4 Y'_{4,3} + D_4 Z'_{4,3} &= -\frac{1}{4} \left[\varepsilon_2 \sin (\alpha_2 + \beta_1) \left(a \frac{d\bar{M}_1}{da} - \bar{N}_1 + 4\bar{O}_1 \right) \right. \\
 &\quad \left. + \varepsilon_1 \sin (\beta_2 + \alpha_1) \left(a \frac{d\bar{M}_2}{da} - \bar{N}_2 + 4\bar{O}_2 \right) \right],
 \end{aligned} \tag{206}$$

$$\left. \begin{aligned} A_4 Y_{4,4} + B_4 Z_{4,4} &= -\frac{1}{2} \varepsilon_2 \cos(\alpha_2 + \beta_2) \left(a \frac{d\bar{L}_2}{da} + 4\bar{M}_2 \right), \\ C_4 Y_{4,4} + D_4 Z_{4,4} &= -\frac{1}{4} \varepsilon_2 \cos(\alpha_2 + \beta_2) \left(a \frac{d\bar{M}_2}{da} - \bar{N}_2 + 4\bar{O}_2 \right), \end{aligned} \right\} \quad (207)$$

$$\left. \begin{aligned} A_4 Y'_{4,4} + B_4 Z'_{4,4} &= -\frac{1}{2} \varepsilon_2 \sin(\alpha_2 + \beta_2) \left(a \frac{d\bar{L}_2}{da} + 4\bar{M}_2 \right), \\ C_4 Y'_{4,4} + D_4 Z'_{4,4} &= -\frac{1}{4} \varepsilon_2 \sin(\alpha_2 + \beta_2) \left(a \frac{d\bar{M}_2}{da} - \bar{N}_2 + 4\bar{O}_2 \right), \end{aligned} \right\} \quad (208)$$

$$\delta W_2 = \frac{11}{42na} [6\varepsilon\Phi_2 + \varepsilon_1 \cos(\alpha_1 - \beta_1)\Phi_{2,1} - 8\varepsilon_2 \cos(\alpha_2 - \beta_2)\Phi_{2,2}], \quad (209)$$

$$\delta W_{2,1} = \frac{11}{14na} [\varepsilon_1 \cos \alpha_1 \Phi_2 + \{\varepsilon \cos \beta_1 + 2\varepsilon_2 \cos(\alpha_2 - \beta_1)\} \Phi_{2,1} + 2\varepsilon_1 \cos(\beta_2 - \alpha_1)\Phi_{2,2}], \quad (210)$$

$$\delta W'_{2,1} = \frac{11}{14na} [\varepsilon_1 \sin \alpha_1 \Phi_2 + \{\varepsilon \sin \beta_1 + 2\varepsilon_2 \sin(\alpha_2 - \beta_1)\} \Phi_{2,1} + 2\varepsilon_1 \sin(\beta_2 - \alpha_1)\Phi_{2,2}], \quad (211)$$

$$\delta W_{2,2} = -\frac{11}{28na} [4\varepsilon_2 \cos \alpha_2 \Phi_2 - \varepsilon_1 \cos(\alpha_1 + \beta_1)\Phi_{2,1} + 4\varepsilon \cos \beta_2 \Phi_{2,2}], \quad (212)$$

$$\delta W'_{2,2} = -\frac{11}{28na} [4\varepsilon_2 \sin \alpha_2 \Phi_2 - \varepsilon_1 \sin(\alpha_1 + \beta_1)\Phi_{2,1} + 4\varepsilon \sin \beta_2 \Phi_{2,2}], \quad (213)$$

$$W_3 = \frac{1}{30na^2} \left[\varepsilon_1 \sin(\alpha_1 - \beta_1) \left(a \frac{d\bar{M}_1}{da} + \bar{N}_1 \right) - 2\varepsilon_2 \sin(\alpha_2 - \beta_2) \left(a \frac{d\bar{M}_2}{da} + \bar{N}_2 \right) \right], \quad (214)$$

$$W_{3,1} = \frac{1}{8na^2} \left[-\varepsilon_1 \sin \alpha_1 \left(a \frac{d\bar{M}}{da} + \bar{N} \right) + \{\varepsilon \sin \beta_1 + \varepsilon_2 \sin(\alpha_2 - \beta_1)\} \left(a \frac{d\bar{M}_1}{da} + \bar{N}_1 \right) - \varepsilon_1 \sin(\beta_2 - \alpha_1) \left(a \frac{d\bar{M}_2}{da} + \bar{N}_2 \right) \right], \quad (215)$$

$$W'_{3,1} = \frac{1}{8na^2} \left[\varepsilon_1 \cos \alpha_1 \left(a \frac{d\bar{M}}{da} + \bar{N} \right) - \{\varepsilon \cos \beta_1 + \varepsilon_2 \cos(\alpha_2 - \beta_1)\} \left(a \frac{d\bar{M}_1}{da} + \bar{N}_1 \right) + \varepsilon_1 \cos(\beta_2 - \alpha_1) \left(a \frac{d\bar{M}_2}{da} + \bar{N}_2 \right) \right], \quad (216)$$

$$W_{3,2} = -\frac{1}{4na^2} \left[\varepsilon_2 \sin \alpha_2 \left(a \frac{d\bar{M}}{da} + \bar{N} \right) - \varepsilon \sin \beta_2 \left(a \frac{d\bar{M}_2}{da} + \bar{N}_2 \right) \right], \quad (217)$$

$$W'_{3,2} = \frac{1}{4na^2} \left[\varepsilon_2 \cos \alpha_2 \left(a \frac{d\bar{M}}{da} + \bar{N} \right) - \varepsilon \cos \beta_2 \left(a \frac{d\bar{M}_2}{da} + \bar{N}_2 \right) \right], \quad (218)$$

$$W_{3,3} = -\frac{1}{24na^3} \left[\varepsilon_2 \sin(\alpha_2 + \beta_1) \left(a \frac{d\bar{M}_1}{da} + \bar{N}_1 \right) - \varepsilon_1 \sin(\beta_2 + \alpha_1) \left(a \frac{d\bar{M}_2}{da} + \bar{N}_2 \right) \right], \quad (219)$$

$$W'_{3,3} = \frac{1}{24na^3} \left[\varepsilon_2 \cos(\alpha_2 + \beta_1) \left(a \frac{d\bar{M}_1}{da} + \bar{N}_1 \right) - \varepsilon_1 \cos(\beta_2 + \alpha_1) \left(a \frac{d\bar{M}_2}{da} + \bar{N}_2 \right) \right], \quad (220)$$

$$W_4 = -\frac{1}{35na^3} [9\varepsilon\Phi_2 - 2\varepsilon_1 \cos(\alpha_1 - \beta_1) \Phi_{2,1} + 2\varepsilon_2 \cos(\alpha_2 - \beta_2) \Phi_{2,2}], \quad (221)$$

$$W_{4,1} = -\frac{1}{4na^3} [3\varepsilon_1 \cos \alpha_1 \Phi_2 + \{3\varepsilon \cos \beta_1 - \varepsilon_2 \cos(\alpha_2 - \beta_1)\} \Phi_{2,1} - \varepsilon_1 \cos(\beta_2 - \alpha_1) \Phi_{2,2}], \quad (222)$$

$$W'_{4,1} = -\frac{1}{4na^3} [3\varepsilon_1 \sin \alpha_1 \Phi_2 + \{3\varepsilon \sin \beta_1 - \varepsilon_2 \sin(\alpha_2 - \beta_1)\} \Phi_{2,1} - \varepsilon_1 \sin(\beta_2 - \alpha_1) \Phi_{2,2}], \quad (223)$$

$$W_{4,2} = -\frac{1}{4na^3} [3\varepsilon_2 \cos \alpha_2 \Phi_2 + \varepsilon_1 \cos(\alpha_1 + \beta_1) \Phi_{2,1} + 3\varepsilon \cos \beta_2 \Phi_{2,2}], \quad (224)$$

$$W'_{4,2} = -\frac{1}{4na^3} [3\varepsilon_2 \sin \alpha_2 \Phi_2 + \varepsilon_1 \sin(\alpha_1 + \beta_1) \Phi_{2,1} + 3\varepsilon \sin \beta_2 \Phi_{2,2}], \quad (225)$$

$$W_{4,3} = -\frac{1}{4na^3} [\varepsilon_2 \cos(\alpha_2 + \beta_1) \Phi_{2,1} + \varepsilon_1 \cos(\beta_2 + \alpha_1) \Phi_{2,2}], \quad (226)$$

$$W'_{4,3} = -\frac{1}{4na^3} [\varepsilon_2 \sin(\alpha_2 + \beta_1) \Phi_{2,1} + \varepsilon_1 \sin(\beta_2 + \alpha_1) \Phi_{2,2}], \quad (227)$$

$$W_{4,4} = -\frac{1}{4na^3} \varepsilon_2 \cos(\alpha_2 + \beta_2) \Phi_{2,2}, \quad (228)$$

$$W'_{4,4} = -\frac{1}{4na^3} \varepsilon_2 \sin(\alpha_2 + \beta_2) \Phi_{2,2}. \quad (229)$$

§50. If the given system of applied forces acted on a perfect sphere we should have two classes of displacements, viz. what I have elsewhere called "mixed radial and transverse" and "pure transverse." The former would depend on the V , R and Θ forces, the latter on the Φ forces.

The principal terms in the present case are of course of these respective forms. As regards the subsidiary terms, Y_0 in (187) answers to "pure radial" displacements, and depends only on V , R and Θ forces. The constants determined by equations (188)–(192) are merely the increments required to give the second approximations to those principal terms which depend on the V , R and Θ forces, and their values are independent of the Φ forces.

The constants given by (200)–(208) are likewise independent of the Φ forces and answer to displacements of the type “mixed radial and transverse.” Thus the constants of the Y and Z types whose first suffix is even answer to applied forces of the “mixed radial and transverse” type.

The Y and Z constants, however, in which the first suffix is 3, are shown by equations (193) to (199) to depend solely on the Φ forces; thus the corresponding terms, though of the type “mixed radial and transverse,” are due to purely transverse surface forces.

The constants determined by (209) to (213) are the increments required to give second approximations to the principal terms depending on the Φ forces, and their values depend solely on the Φ forces. The constants given by (221) to (229) likewise depend solely on the Φ forces and answer to pure transverse displacements. Thus the constants of the W type whose first suffix is even, answer to applied forces of the pure transverse type.

The W constants, however, in which the first suffix is 3, are shown by equations (214) to (220) to depend on the V , R , Θ forces; thus the corresponding displacements, though of the type pure transverse, are due to “mixed radial and transverse” forces. The species of reciprocity thus found to exist between the radial and transverse and the pure transverse forces seems rather striking.

§51. The equations determining the Y and Z constants whose first suffix is even may appear long and complicated. A little examination shows, however, that they are of marvellous simplicity. Take for instance (188). The quantities \bar{L} , \bar{M} , \bar{N} , \bar{O} are precisely the same functions of V_2 , R_2 , Θ_2 that \bar{L}_1 , \bar{M}_1 , \bar{N}_1 , \bar{O}_1 are of $V_{2,1}$, $R_{2,1}$, $\Theta_{2,1}$, and that \bar{L}_2 , \bar{M}_2 , \bar{N}_2 , \bar{O}_2 are of $V_{2,2}$, $R_{2,2}$, $\Theta_{2,2}$. Thus if we determine the terms in ε in δY_2 and δZ_2 from the equations

$$\left. \begin{aligned} A_2 \delta Y_2 + B_2 \delta Z_2 &= -\frac{2}{7} \varepsilon \left(a \frac{d\bar{L}}{da} - 3\bar{M} \right), \\ C_2 \delta Y_2 + D_2 \delta Z_2 &= -\frac{1}{7} \varepsilon \left(a \frac{d\bar{M}}{da} - \bar{N} - 3\bar{O} \right), \end{aligned} \right\} \quad (230)$$

we get the terms in ε_1 by simply substituting $\frac{1}{42} \varepsilon_1 \cos(\alpha_1 - \beta_1)$ for $\frac{1}{7} \varepsilon$, and replacing V_2 , R_2 , Θ_2 by $V_{2,1}$, $R_{2,1}$, $\Theta_{2,1}$. For the terms in ε_2 we write $-\frac{4}{21} \varepsilon_2 \cos(\alpha_2 - \beta_2)$ for $\frac{1}{7} \varepsilon$, and replace V_2 , R_2 , Θ_2 by $V_{2,2}$, $R_{2,2}$, $\Theta_{2,2}$.

Nor is this all. We see that in (188) to (192), i. e. all the equations in which the surface harmonic is of the second degree, factors $a \frac{d\bar{L}_s}{da} - 3\bar{M}_s$, where $s = 0, 1, 2$, occur in the first equations, and factors $a \frac{d\bar{M}_s}{da} - \bar{N}_s - 3\bar{O}_s$ in the second; and that the numerical coefficient of each s in the first of each pair of equations is double that of the corresponding s in the second. Thus by mere inspection of the values of δY_2 and δZ_2 given by (230) we can write down the complete value of every Y or Z constant in which the first suffix is 2.

Corresponding results hold for the surface harmonics of the third and fourth degrees. Thus the complete solutions of all the equations (200) to (208) may be written down by simple inspection of the values of Y_4 and Z_4 supplied by

$$\begin{aligned} A_4 Y_4 + B_4 Z_4 &= -\frac{18}{35} \varepsilon \left(a \frac{d\bar{L}}{da} + 4\bar{M} \right), \\ C_4 Y_4 + D_4 Z_4 &= -\frac{9}{35} \varepsilon \left(a \frac{d\bar{M}}{da} - \bar{N} + 4\bar{O} \right). \end{aligned}$$

§52. The first preliminary to the determination of the Y and Z constants in the subsidiary terms is to obtain the first approximations to the values of $Y_2, Z_2, Y_{2,1}, Z_{2,1}, Y_{2,2}, Z_{2,2}$ as given by (84), (85), (86), (114), (115) and (116). From (84) and (114) we get

$$\left. \begin{aligned} Y_2 &= \frac{1}{19m-5n} \left[21a^{-2}(R_2 - 2\Theta_2) + \frac{3(7m-n)}{m+n} \rho V_2 \right], \\ Z_2 &= \frac{1}{n(19m-5n)} \left[2(4m-n)a^2 \rho V_2 + 3(m-n)\Theta_2 + (8m-n)R_2 \right]. \end{aligned} \right\} (231)$$

From these we deduce the values of $Y_{2,1}$ and $Z_{2,1}$ by simply writing $V_{2,1}, R_{2,1}, \Theta_{2,1}$ for V_2, R_2, Θ_2 , and the values of $Y_{2,2}$ and $Z_{2,2}$ by writing $V_{2,2}$, etc., for V_2 , etc.

We next substitute these results in coefficients such as $a \frac{d\bar{L}}{da} + 4\bar{M}$ in (200). The values of \bar{L} , etc., are given in §5, and it will be remembered that we treat Y and Z coefficients as constants in differentiations such as $\frac{d\bar{L}}{da}$.

It will suffice to record the values of \bar{L}, \bar{M} , etc., as the values of \bar{L}_1, \bar{M}_1 , etc., and of \bar{L}_2, \bar{M}_2 , etc., may be deduced by writing $V_{2,1}$, etc., for V_2 , etc., in the former case and $V_{2,2}$, etc., for V_2 , etc., in the latter. We have

$$\bar{L} = R_2, \quad (232)$$

$$\bar{M} = \Theta_2, \quad (233)$$

$$\bar{N} = \frac{1}{19m-5n} \{ 4(3m-n) a^2 \rho V_2 + (31m-17n) R_2 - 24(m-n) \Theta_2 \}, \quad (234)$$

$$\bar{O} = \frac{1}{19m-5n} \{ (3m-n) a^2 \rho V_2 + 3(m-n) R_2 + (13m+n) \Theta_2 \}, \quad (235)$$

$$a \frac{d\bar{L}}{da} = \frac{1}{19m-5n} \{ -8(4m-n) a^2 \rho V_2 + 6(m-n)(R_2 - 2\Theta_2) \}, \quad (236)$$

$$a \frac{d\bar{M}}{da} = \frac{1}{19m-5n} \{ -4(4m-n) a^2 \rho V_2 - 2(8m-n)(R_2 - 2\Theta_2) \}, \quad (237)$$

$$a \frac{d\bar{L}}{da} - 6\bar{M} = \frac{1}{19m-5n} \{ -8(4m-n) a^2 \rho V_2 + 6(m-n) R_2 - 42(3m-n) \Theta_2 \}, \quad (238)$$

$$a \frac{d\bar{L}}{da} - 3\bar{M} = \frac{1}{19m-5n} \{ -8(4m-n) a^2 \rho V_2 + 6(m-n) R_2 - 3(23m-9n) \Theta_2 \}, \quad (239)$$

$$a \frac{d\bar{M}}{da} - \bar{N} - 3\bar{O} = \frac{1}{19m-5n} \{ -(37m-11n) a^2 \rho V_2 - 28(2m-n) R_2 + (17m-31n) \Theta_2 \}, \quad (240)$$

$$a \frac{d\bar{L}}{da} + 4\bar{M} = \frac{1}{19m-5n} \{ -8(4m-n) a^2 \rho V_2 + 6(m-n) R_2 + 8(8m-n) \Theta_2 \}, \quad (241)$$

$$a \frac{d\bar{M}}{da} - \bar{N} + 4\bar{O} = \frac{1}{19m-5n} \{ -4(4m-n) a^2 \rho V_2 - 7(5m-n) R_2 + 12(9m-2n) \Theta_2 \}, \quad (242)$$

$$a \frac{d\bar{M}}{da} + \bar{N} = \frac{1}{19m-5n} \{ -4m a^2 \rho V_2 + 15(m-n) R_2 + 4(2m+5n) \Theta_2 \}, \quad (243)$$

$$a \frac{d\bar{M}}{da} + \bar{N} - 5\bar{O} = -(a^2 \rho V_2 + 3\Theta_2). \quad (244)$$

§53. Employing (238) in (187) we have

$$Y_0 = 3\epsilon x_2 + \epsilon_1 \cos(\alpha_1 - \beta_1) x_{2,1} + 4\epsilon_2 \cos(\alpha_2 - \beta_2) x_{2,2}, \quad (245)$$

where

$$x_2 = \frac{2 \{ 4(4m-n) a^2 \rho V_2 - 3(m-n) R_2 + 21(3m-n) \Theta_2 \}}{5(3m-n)(19m-5n)}, \quad (246)$$

while $x_{2,1}$ and $x_{2,2}$ are derived from x_2 by writing 2,1 and 2,2 respectively for 2 in the suffixes of V, R, Θ .

With a similar suffix notation, let

$$\lambda_2 = \frac{a^{-2}}{(19m-5n)^2} \{-(5m-3n) \alpha^2 \rho V_2 - 2(31m-17n) R_2 + 2(43m-29n) \Theta_2\}, \quad (247)$$

$$\lambda'_2 = \frac{7(89m^2-48mn+7n^2) \alpha^2 \rho V_2 + 72(m-n)^2 R_2 + 3(13m+n)(27m-13n) \Theta_2}{42n(19m-5n)^2}, \quad (248)$$

then we get

$$\begin{aligned} \delta Y_2 &= 6\epsilon \lambda_2 + \epsilon_1 \cos(\alpha_1 - \beta_1) \lambda_{2,1} - 8\epsilon_2 \cos(\alpha_2 - \beta_2) \lambda_{2,2}, \\ \delta Z_2 &= 6\epsilon \lambda'_2 + \epsilon_1 \cos(\alpha_1 - \beta_1) \lambda'_{2,1} - 8\epsilon_2 \cos(\alpha_2 - \beta_2) \lambda'_{2,2}, \end{aligned} \quad (249)$$

$$\begin{aligned} \delta Y_{2,1} &= 3 [\epsilon_1 \cos \alpha_1 \lambda_2 + \{\epsilon \cos \beta_1 + 2\epsilon_2 \cos(\alpha_2 - \beta_1)\} \lambda_{2,1} + 2\epsilon_1 \cos(\beta_2 - \alpha_1) \lambda_{2,2}], \\ \delta Z_{2,1} &= 3 [\epsilon_1 \cos \alpha_1 \lambda'_2 + \{\epsilon \cos \beta_1 + 2\epsilon_2 \cos(\alpha_2 - \beta_1)\} \lambda'_{2,1} + 2\epsilon_1 \cos(\beta_2 - \alpha_1) \lambda'_{2,2}], \end{aligned} \quad (250)$$

$$\begin{aligned} \delta Y'_{2,1} &= 3 [\epsilon_1 \sin \alpha_1 \lambda_2 + \{\epsilon \sin \beta_1 + 2\epsilon_2 \sin(\alpha_2 - \beta_1)\} \lambda_{2,1} + 2\epsilon_1 \sin(\beta_2 - \alpha_1) \lambda_{2,2}], \\ \delta Z'_{2,1} &= 3 [\epsilon_1 \sin \alpha_1 \lambda'_2 + \{\epsilon \sin \beta_1 + 2\epsilon_2 \sin(\alpha_2 - \beta_1)\} \lambda'_{2,1} + 2\epsilon_1 \sin(\beta_2 - \alpha_1) \lambda'_{2,2}], \end{aligned} \quad (251)$$

$$\begin{aligned} \delta Y_{2,2} &= \frac{3}{2} [-4\epsilon_2 \cos \alpha_2 \lambda_2 + \epsilon_1 \cos(\alpha_1 + \beta_1) \lambda_{2,1} - 4\epsilon \cos \beta_2 \lambda_{2,2}], \\ \delta Z_{2,2} &= \frac{3}{2} [-4\epsilon_2 \cos \alpha_2 \lambda'_2 + \epsilon_1 \cos(\alpha_1 + \beta_1) \lambda'_{2,1} - 4\epsilon \cos \beta_2 \lambda'_{2,2}], \end{aligned} \quad (252)$$

$$\begin{aligned} \delta Y'_{2,2} &= \frac{3}{2} [-4\epsilon_2 \sin \alpha_2 \lambda_2 + \epsilon_1 \sin(\alpha_1 + \beta_1) \lambda_{2,1} - 4\epsilon \sin \beta_2 \lambda_{2,2}], \\ \delta Z'_{2,2} &= \frac{3}{2} [-4\epsilon_2 \sin \alpha_2 \lambda'_2 + \epsilon_1 \sin(\alpha_1 + \beta_1) \lambda'_{2,1} - 4\epsilon \sin \beta_2 \lambda'_{2,2}]. \end{aligned} \quad (253)$$

For the Y and Z constants whose first suffix is 3 we easily find from equations (193) to (199),

$$\begin{aligned} Y_3 &= -\frac{54a^{-2}n}{12m-5n} Z_3 \\ &= \frac{108a^{-2}}{5(33m-7n)} \{\epsilon_1 \sin(\alpha_1 - \beta_1) \Phi_{2,1} - 2\epsilon_2 \sin(\alpha_2 - \beta_2) \Phi_{2,2}\}, \end{aligned} \quad (254)$$

$$\begin{aligned} Y_{3,1} &= -\frac{54a^{-2}n}{12m-5n} Z_{3,1} = \frac{81a^{-2}}{33m-7n} [-\epsilon_1 \sin \alpha_1 \Phi_2 \\ &\quad + \{\epsilon \sin \beta_1 + \epsilon_2 \sin(\alpha_2 - \beta_1)\} \Phi_{2,1} - \epsilon_1 \sin(\beta_2 - \alpha_1) \Phi_{2,2}], \end{aligned} \quad (255)$$

$$\begin{aligned} Y'_{3,1} &= -\frac{54a^{-2}n}{12m-5n} Z'_{3,1} = \frac{81a^{-2}}{33m-7n} [\epsilon_1 \cos \alpha_1 \Phi_2 - \{\epsilon \cos \beta_1 + \epsilon_2 \cos(\alpha_2 - \beta_1)\} \Phi_{2,1} \\ &\quad + \epsilon_1 \cos(\beta_2 - \alpha_1) \Phi_{2,2}], \end{aligned} \quad (256)$$

$$Y_{3,2} = -\frac{54a^{-2}n}{12m-5n} Z_{3,2} = \frac{162a^{-2}}{33m-7n} [-\epsilon_2 \sin \alpha_2 \Phi_2 + \epsilon \sin \beta_2 \Phi_{2,2}], \quad (257)$$

$$Y'_{3,2} = -\frac{54a^{-2}n}{12m-5n} Z'_{3,2} = \frac{162a^{-8}}{33m-7n} [\varepsilon_2 \cos \alpha_2 \Phi_2 - \varepsilon \cos \beta_2 \Phi_{2,2}], \quad (258)$$

$$Y_{3,3} = -\frac{54a^{-2}n}{12m-5n} Z_{3,3} = \frac{27a^{-8}}{33m-7n} [-\varepsilon_2 \sin (\alpha_2 + \beta_1) \Phi_{2,1} + \varepsilon_1 \sin (\beta_2 + \alpha_1) \Phi_{2,2}], \quad (259)$$

$$Y'_{3,3} = -\frac{54a^{-2}n}{12m-5n} Z'_{3,3} = \frac{27a^{-8}}{33m-7n} [\varepsilon_2 \cos (\alpha_2 + \beta_1) \Phi_{2,1} - \varepsilon_1 \cos (\beta_2 + \alpha_1) \Phi_{2,2}]. \quad (260)$$

For the Y and Z constants whose first suffix is 4, let

$$\mu_2 = \frac{22a^{-4}(2\Theta_2 - R_2)}{21(17m-3n)}, \quad (261)$$

$$\mu'_2 = \left\{ 12(4m-n)(17m-3n)\rho V_2 - (1863m^2 - 440mn - 23n^2)a^{-2}R_2 + 4(447m^2 - 7mn - 34n^2)a^{-2}\Theta_2 \right\} \div \{630n(17m-3n)(19m-5n)\}, \quad (262)$$

etc., then

$$\left. \begin{aligned} Y_4 &= 36\varepsilon\mu_2 - 8\varepsilon_1 \cos (\alpha_1 - \beta_1) \mu_{2,1} + 8\varepsilon_2 \cos (\alpha_2 - \beta_2) \mu_{2,2}, \\ Z_4 &= 36\varepsilon\mu'_2 - 8\varepsilon_1 \cos (\alpha_1 - \beta_1) \mu'_{2,1} + 8\varepsilon_2 \cos (\alpha_2 - \beta_2) \mu'_{2,2}, \end{aligned} \right\} \quad (263)$$

$$\left. \begin{aligned} Y_{4,1} &= 105\varepsilon_1 \cos \alpha_1 \mu_2 + 35\{3\varepsilon \cos \beta_1 - \varepsilon_2 \cos (\alpha_2 - \beta_1)\} \mu_{2,1} \\ &\quad - 35\varepsilon_1 \cos (\beta_2 - \alpha_1) \mu_{2,2}, \\ Z_{4,1} &= 105\varepsilon_1 \cos \alpha_1 \mu'_2 + 35\{3\varepsilon \cos \beta_1 - \varepsilon_2 \cos (\alpha_2 - \beta_1)\} \mu'_{2,1} \\ &\quad - 35\varepsilon_1 \cos (\beta_2 - \alpha_1) \mu'_{2,2}, \end{aligned} \right\} \quad (264)$$

$$\left. \begin{aligned} Y'_{4,1} &= 105\varepsilon_1 \sin \alpha_1 \mu_2 + 35\{3\varepsilon \sin \beta_1 - \varepsilon_2 \sin (\alpha_2 - \beta_1)\} \mu_{2,1} \\ &\quad - 35\varepsilon_1 \sin (\beta_2 - \alpha_1) \mu_{2,2}, \\ Z'_{4,1} &= 105\varepsilon_1 \sin \alpha_1 \mu'_2 + 35\{3\varepsilon \sin \beta_1 - \varepsilon_2 \sin (\alpha_2 - \beta_1)\} \mu'_{2,1} \\ &\quad - 35\varepsilon_1 \sin (\beta_2 - \alpha_1) \mu'_{2,2}, \end{aligned} \right\} \quad (265)$$

$$Y_{4,2} = 35[3\varepsilon_2 \cos \alpha_2 \mu_2 + \varepsilon_1 \cos (\alpha_1 + \beta_1) \mu_{2,1} + 3\varepsilon \cos \beta_2 \mu_{2,2}], \quad (266)$$

$$Z_{4,2} = 35[3\varepsilon_2 \cos \alpha_2 \mu'_2 + \varepsilon_1 \cos (\alpha_1 + \beta_1) \mu'_{2,1} + 3\varepsilon \cos \beta_2 \mu'_{2,2}], \quad (267)$$

$$Y'_{4,2} = 35[3\varepsilon_2 \sin \alpha_2 \mu_2 + \varepsilon_1 \sin (\alpha_1 + \beta_1) \mu_{2,1} + 3\varepsilon \sin \beta_2 \mu_{2,2}], \quad (268)$$

$$Z'_{4,2} = 35[3\varepsilon_2 \sin \alpha_2 \mu'_2 + \varepsilon_1 \sin (\alpha_1 + \beta_1) \mu'_{2,1} + 3\varepsilon \sin \beta_2 \mu'_{2,2}], \quad (269)$$

$$Y_{4,3} = 35[\varepsilon_2 \cos (\alpha_2 + \beta_1) \mu_{2,1} + \varepsilon_1 \cos (\beta_2 + \alpha_1) \mu_{2,2}], \quad (270)$$

$$Z_{4,3} = 35[\varepsilon_2 \cos (\alpha_2 + \beta_1) \mu'_{2,1} + \varepsilon_1 \cos (\beta_2 + \alpha_1) \mu'_{2,2}], \quad (271)$$

$$Y'_{4,3} = 35[\varepsilon_2 \sin (\alpha_2 + \beta_1) \mu_{2,1} + \varepsilon_1 \sin (\beta_2 + \alpha_1) \mu_{2,2}], \quad (272)$$

$$Z'_{4,3} = 35[\varepsilon_2 \sin (\alpha_2 + \beta_1) \mu'_{2,1} + \varepsilon_1 \sin (\beta_2 + \alpha_1) \mu'_{2,2}], \quad (273)$$

$$Y_{4,4}/\cos (\alpha_2 + \beta_2) = Y'_{4,4}/\sin (\alpha_2 + \beta_2) = 35\varepsilon_2 \mu_{2,2}, \quad (274)$$

$$Z_{4,4}/\cos (\alpha_2 + \beta_2) = Z'_{4,4}/\sin (\alpha_2 + \beta_2) = 35\varepsilon_2 \mu'_{2,2}. \quad (275)$$

In equations (209) to (213) and (221) to (229) will be found the values of all the subsidiary W constants except those whose first suffix is 3. For these, having regard to (243), and putting

$$\nu_2 = \frac{-4ma^2\rho V_2 + 15(m-n)R_2 + 4(2m+5n)\Theta_2}{120a^2n(19m-5n)}, \quad (271)$$

etc., we have

$$W_8 = 4\{\varepsilon_1 \sin(\alpha_1 - \beta_1) \nu_2 - 2\varepsilon_2 \sin(\alpha_2 - \beta_2) \nu_{2,2}\}, \quad (272)$$

$$W_{3,1} = 15[-\varepsilon_1 \sin \alpha_1 \nu_2 + \{\varepsilon \sin \beta_1 + \varepsilon_2 \sin(\alpha_2 - \beta_1)\} \nu_{2,1} - \varepsilon_1 \sin(\beta_2 - \alpha_1) \nu_{2,2}], \quad (273)$$

$$W'_{3,1} = 15[\varepsilon_1 \cos \alpha_1 \nu_2 - \{\varepsilon \cos \beta_1 + \varepsilon_2 \cos(\alpha_2 - \beta_1)\} \nu_{2,1} + \varepsilon_1 \cos(\beta_2 - \alpha_1) \nu_{2,2}], \quad (274)$$

$$W_{3,2} = 30[-\varepsilon_2 \sin \alpha_2 \nu_2 + \varepsilon \sin \beta_2 \nu_{2,2}], \quad (275)$$

$$W'_{3,2} = 30[\varepsilon_2 \cos \alpha_2 \nu_2 - \varepsilon \cos \beta_2 \nu_{2,2}], \quad (276)$$

$$W_{3,3} = 5[-\varepsilon_2 \sin(\alpha_2 + \beta_1) \nu_{2,1} + \varepsilon_1 \sin(\beta_2 + \alpha_1) \nu_{2,2}], \quad (277)$$

$$W'_{3,3} = 5[\varepsilon_2 \cos(\alpha_2 + \beta_1) \nu_{2,1} - \varepsilon_1 \cos(\beta_2 + \alpha_1) \nu_{2,2}]. \quad (278)$$

§54. All the subsidiary constants have thus had their values determined and recorded. The expressions for the displacements in the general case would occupy rather much space. In any specified case, however, any one will be able to write down the values of the displacements at once by reference to the values of the arbitrary constants given above. If the notation be not fresh in his memory he need only refer to the general solution as given by (1), (2), (3) and (4) of Section I, to the definition of $P_{i,k}$ in (1) of Section III, and to the explanation of the dashed and undashed coefficients in §35.

§55. If the harmonics in the expressions for the applied forces are identical in phase with those in the surface equation, a simplification occurs. For putting

$$\left. \begin{aligned} X'_{2,1} &= X_{2,1} \text{ or } \beta_1 = \alpha_1, \\ X'_{2,2} &= X_{2,2} \text{ or } \beta_2 = \alpha_2, \end{aligned} \right\} \quad (279)$$

we get

$$Y_8 = Z_8 = W_8 = 0,$$

and the formulæ for the other constants whose first suffix is 3 are simplified.

If in addition

$$\Phi_2/\varepsilon = \Phi_{2,1}/\varepsilon_1 = \Phi_{2,2}/\varepsilon_2, \quad (280)$$

then all the Y and Z constants whose first suffix is 3 vanish; in this case the pure transverse surface forces give rise to no "mixed radial and transverse" subsidiary terms.

If on the other hand while

$$\begin{aligned} & \beta_1 = \alpha_1 \text{ and } \beta_2 = \alpha_2, \\ \text{we have } & \left. \begin{aligned} V_2/\varepsilon &= V_{2,1}/\varepsilon_1 = V_{2,2}/\varepsilon_2, \\ R_2/\varepsilon &= R_{2,1}/\varepsilon_1 = R_{2,2}/\varepsilon_2, \\ \Theta_2/\varepsilon &= \Theta_{2,1}/\varepsilon_1 = \Theta_{2,2}/\varepsilon_2, \end{aligned} \right\} \quad (281) \end{aligned}$$

then all the W constants whose first suffix is 3 vanish; in this case the "mixed radial and transverse" applied forces give rise to no pure transverse subsidiary terms.

Since μ_2 is by (261) independent of V_2 , it follows that if bodily forces alone exist, all the Y constants whose first suffix is 4 vanish. The same result follows if

$$R_2 = 2\Theta_2,$$

or the applied surface forces come from a potential $\Theta_2 r^2/a$.

From (245) we see that the pure radial displacement vanishes if ε be zero while

$$\alpha_1 \sim \beta_1 = \alpha_2 \sim \beta_2 = \pi/2.$$

§56. Before it can be maintained that we have reached a complete solution of the problem proposed in §26, the promise to give a good account of the arbitrary constants appearing in the "uncompensated" terms must be redeemed.

With a view to this, let

$$X = \frac{8}{15} \pi a^2 [-3\varepsilon_1 \sin \alpha_1 \Phi_2 + \{3\varepsilon \sin \beta_1 - 2\varepsilon_2 \sin (\alpha_2 - \beta_1)\} \Phi_{2,1} + 2\varepsilon_1 \sin (\beta_2 - \alpha_1) \Phi_{2,2}], \quad (282)$$

$$Y = \frac{8}{15} \pi a^2 [3\varepsilon_1 \cos \alpha_1 \Phi_2 - \{3\varepsilon \cos \beta_1 - 2\varepsilon_2 \cos (\alpha_2 - \beta_1)\} \Phi_{2,1} - 2\varepsilon_1 \cos (\beta_2 - \alpha_1) \Phi_{2,2}], \quad (283)$$

$$Z = \frac{8}{15} \pi a^2 [\varepsilon_1 \sin (\alpha_1 - \beta_1) \Phi_{2,1} + 8\varepsilon_2 \sin (\alpha_2 - \beta_2) \Phi_{2,2}], \quad (284)$$

$$L = \frac{4\pi a^3}{15} [3\varepsilon_1 \sin \alpha_1 (a^2 \rho V_2 + 3\Theta_2) - \{3\varepsilon \sin \beta_1 - 2\varepsilon_2 \sin (\alpha_2 - \beta_1)\} (a^2 \rho V_{2,1} + 3\Theta_{2,1}) - 2\varepsilon_1 \sin (\beta_2 - \alpha_1) (a^2 \rho V_{2,2} + 3\Theta_{2,2})], \quad (285)$$

$$M = \frac{4\pi a^3}{15} [-3\varepsilon_1 \cos \alpha_1 (a^2 \rho V_2 + 3\Theta_2) + \{3\varepsilon \cos \beta_1 - 2\varepsilon_2 \cos (\alpha_2 - \beta_1)\} (a^2 \rho V_{2,1} + 3\Theta_{2,1}) + 2\varepsilon_1 \cos (\beta_2 - \alpha_1) (a^2 \rho V_{2,2} + 3\Theta_{2,2})], \quad (286)$$

$$N = -\frac{4\pi a^3}{15} [\varepsilon_1 \sin (\alpha_1 - \beta_1) (a^2 \rho V_{2,1} + 3\Theta_{2,1}) + 8\varepsilon_2 \sin (\alpha_2 - \beta_2) (a^2 \rho V_{2,2} + 3\Theta_{2,2})]. \quad (287)$$

Then employing (244), we see that the results (186) are equivalent to the following:

$$\frac{a_1}{X} = \frac{b_1}{Y} = \frac{c_1}{Z} = -\frac{a_2}{\frac{3}{2}X} = -\frac{b_2}{\frac{3}{2}Y} = -\frac{c_2}{\frac{3}{2}Z} = \frac{a_3}{\frac{3}{2}X} = \frac{b_3}{\frac{3}{2}Y} = \frac{3}{8\pi a^3}, \quad (288)$$

$$-\frac{d_2}{M} = \frac{e_2}{L} = \frac{d_3}{M} = \frac{e_3}{L} = -\frac{f_3}{N} = \frac{3}{8\pi a^3}. \quad (289)$$

Thus the terms remaining uncompensated are:

on the left of the first surface condition,

$$R = \frac{3}{8\pi a^3} [X \sin \theta \cos \phi + Y \sin \theta \sin \phi + Z \cos \theta]; \quad (290)$$

on the left of the second surface condition,

$$\Theta = \frac{3}{8\pi a^3} \left[-\frac{3}{2} (X \cos \theta \cos \phi + Y \cos \theta \sin \phi - Z \sin \theta) + \frac{L}{a} \sin \phi - \frac{M}{a} \cos \phi \right]; \quad (291)$$

on the left of the third surface condition,

$$\Phi = \frac{3}{8\pi a^3} \left[\frac{3}{2} (X \sin \phi - Y \cos \phi) + \frac{L}{a} \cos \theta \cos \phi + \frac{M}{a} \cos \theta \sin \phi - \frac{N}{a} \sin \theta \right]. \quad (292)$$

It is a simple matter to show that if forces act over a spherical surface of radius a , the components per unit of surface along the directions r, θ, ϕ having the magnitudes R, Θ, Φ given by (290), (291) and (292) respectively, then the resultant consists of a force whose components along the axes of x, y, z at the centre of the sphere are $-X, -Y, -Z$, and of a couple whose components about these axes are $-L, -M, -N$.

§57. The bearing of the results (288) and (289) will now be appreciated at once when we state that the statical resultant of the applied forces as given by (4) and (5) consists of the force whose components along the axes of x, y, z at the centre are $+X, +Y$ and $+Z$, and of the couple whose components about these axes are $+L, +M$ and $+N$.

It will suffice to illustrate the proof of this statement by finding the component couple about the axis of x .

Taking first the bodily forces (4), they give at any point the following components per unit mass:

$$\begin{aligned} \text{parallel to } x &= -xV_2 + z \cos \beta_1 V_{2,1} + 2(x \cos \beta_2 + y \sin \beta_2) V_{2,2}, \\ \text{“ “ } y &= -yV_2 + z \sin \beta_1 V_{2,1} + 2(x \sin \beta_2 - y \cos \beta_2) V_{2,2}, \\ \text{“ “ } z &= 2zV_2 + (x \cos \beta_1 + y \sin \beta_1) V_{2,1}. \end{aligned}$$

The corresponding elementary couple about the axis of x is

$$3yzV_2 + \{xy \cos \beta_1 + (y^2 - z^2) \sin \beta_1\} V_{2,1} + 2z(y \cos \beta_2 - x \sin \beta_2) V_{2,2}.$$

Thus the resultant couple about $ox =$

$$\iiint d\phi d\theta dr \rho \sin \theta r^4 [3 \sin \theta \cos \theta \sin \phi V_2 + \{\sin^2 \theta \sin \phi \cos (\phi - \beta_1) - \cos^2 \theta \sin \beta_1\} V_{2,1} + 2 \sin \theta \cos \theta \sin (\phi - \beta_2) V_{2,2}],$$

the integration extending throughout the entire mass.

Now at the surface

$$r = a\{1 + \varepsilon P_2 + \varepsilon_1 P_{2,1} \cos (\phi - \alpha_1) + \varepsilon_2 P_{2,2} \cos (2\phi - \alpha_2)\};$$

thus neglecting squares and products of ε , ε_1 , ε_2 , we get couple about $ox =$

$$\begin{aligned} \frac{\rho a^5}{5} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} d\theta d\phi \sin \theta \left[1 + 5 \left\{ \varepsilon \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} + \varepsilon_1 \sin \theta \cos \theta \cos (\phi - \alpha_1) \right. \right. \\ \left. \left. + \varepsilon_2 \sin^2 \theta \cos (2\phi - \alpha_2) \right\} \right] [3 \sin \theta \cos \theta \sin \phi V_2 \\ + \{\sin^2 \theta \sin \phi \cos (\phi - \beta_1) - \cos^2 \theta \sin \beta_1\} V_{2,1} + 2 \sin \theta \cos \theta \sin (\phi - \beta_2) V_{2,2}]. \end{aligned}$$

The terms independent of ε , ε_1 or ε_2 of course vanish, and any other term containing an odd power of a sine or cosine of ϕ , or an odd power of $\cos \theta$, may obviously be neglected. The terms which do not vanish reduce very simply to

$$\frac{4}{15} \pi \rho a^5 [3\varepsilon_1 \sin \alpha_1 V_2 - \{3\varepsilon \sin \beta_1 - 2\varepsilon_2 \sin (\alpha_2 - \beta_1)\} V_{2,1} - 2\varepsilon_1 \sin (\beta_2 - \alpha_1) V_{2,2}].$$

Taking next the surface forces with Θ coefficients, i. e. forces

$$\frac{d}{d\theta} \{\Theta_2 P_2 + \Theta_{2,1} \cos (\phi - \beta_1) P_{2,1} + \Theta_{2,2} \cos (2\phi - \beta_2) P_{2,2}\} \text{ along } \theta,$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\phi} \{\Theta_{2,1} \cos (\phi - \beta_1) P_{2,1} + \Theta_{2,2} \cos (2\phi - \beta_2) P_{2,2}\} \text{ along } \phi,$$

we find for the total couple about the axis of x

$$\begin{aligned} & a^3 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} d\theta d\phi \sin \theta \left[1 + 3 \left\{ \varepsilon \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} + \varepsilon_1 \sin \theta \cos \theta \cos (\phi - \alpha_1) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \varepsilon_2 \sin^2 \theta \cos (2\phi - \alpha_2) \right\} \right] [3 \sin \theta \cos \theta \sin \phi \Theta_2 \\ & \quad + \frac{1}{2} \{ \sin^2 \theta \sin (2\phi - \beta_1) + \sin \beta_1 (3 \sin^2 \theta - 2) \} \Theta_{2,1} + 2 \sin \theta \cos \theta \sin (\phi - \beta_2) \Theta_{2,2}]. \end{aligned}$$

This easily reduces to

$$\frac{4}{5} \pi a^3 [3\varepsilon_1 \sin \alpha_1 \Theta_2 - \{3\varepsilon \sin \beta_1 - 2\varepsilon_2 \sin (\alpha_2 - \beta_1)\} \Theta_{2,1} - 2\varepsilon_1 \sin (\beta_2 - \alpha_1) \Theta_{2,2}].$$

The radial forces all have their lines of action passing through the centre and so obviously give no couple. It is also easily found that no couple arises from the surface forces with Φ coefficients. Thus the complete couple about the axis of x is got by adding the couples arising from the V and the Θ forces, and referring to (285) we see at once that this sum amounts simply to $+L$.

The proofs that $+M$ and N are the component couples about the two other axes, and that $+X$, $+Y$ and $+Z$ are the components of the resultant force of the applied system, proceed on exactly similar lines.

If the applied system of forces is in equilibrium, X , Y , Z , L , M , N , as is well known, must all vanish; and consequently by (288) and (289) every single "uncompensated" term vanishes. Thus in any case of equilibrium there are no "uncompensated" terms left over and the completeness of the solution is thus firmly established.

§58. The previous method, it may be mentioned, can be applied to the shell whose two surfaces are

$$\begin{aligned} r &= a \{ 1 + \varepsilon P_2 + \varepsilon_1 P_{2,1} \cos (\phi - \alpha_1) + \varepsilon_2 P_{2,2} \cos (2\phi - \alpha_2) \}, \\ r &= b \{ 1 + \varepsilon' P_2 + \varepsilon'_1 P_{2,1} \cos (\phi - \alpha'_1) + \varepsilon'_2 P_{2,2} \cos (2\phi - \alpha'_2) \}, \end{aligned}$$

acted on by bodily forces derivable from a potential

$$\begin{aligned} & r^2 \{ V_2 P_2 + V_{2,1} P_{2,1} \cos (\phi - \beta_1) + V_{2,2} P_{2,2} \cos (2\phi - \beta_2) \} \\ & + r^{-2} \{ V'_2 P_2 + V'_{2,1} P_{2,1} \cos (\phi - \beta'_1) + V'_{2,2} P_{2,2} \cos (2\phi - \beta'_2) \}, \end{aligned}$$

and by surface forces such as (5) over both surfaces; it being assumed that ε' , ε'_1 , ε'_2 are small as well as ε , ε_1 , ε_2 . Special cases of this shell problem are easily enough worked out. It is expedient, however, when the shell is thin, to

look carefully to the convergence of the results obtained, unless the two surfaces of the shell are so nearly similar and similarly situated that the maximum differences between the thickness at different points are small compared to the mean thickness.

§59. Before proceeding to illustrate the application of the previous solution, it is desirable to consider the shape of the surface (3) a little more closely and to explain how bodily forces of the kind we have considered may originate.

Since squares of ε , etc., are neglected, (3) may be written

$$a^2 = r^2 [1 - \varepsilon (3 \cos^2 \theta - 1) - 2\varepsilon_1 \sin \theta \cos \theta \cos (\phi - \alpha_1) - 2\varepsilon_2 \sin^2 \theta \cos (2\phi - \alpha_2)],$$

or

$$a^2 = x^2 (1 + \varepsilon - 2\varepsilon_2 \cos \alpha_2) + y^2 (1 + \varepsilon + 2\varepsilon_2 \cos \alpha_2) + z^2 (1 - 2\varepsilon) - 2yz\varepsilon_1 \sin \alpha_1 - 2zx\varepsilon_1 \cos \alpha_1 - 4xy\varepsilon_2 \sin \alpha_2. \quad (293)$$

The surface is thus the most general form of nearly spherical ellipsoid. Comparing (293) with the Cartesian equation of any such ellipsoid we obtain the values of ε , ε_1 , ε_2 , α_1 and α_2 .

If, for instance, the ellipsoid be referred to its principal axes,

$$\varepsilon_1 = 0 = \alpha_2, \quad (294)$$

and, supposing the Cartesian equation to be

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} + \frac{z^2}{c'^2} &= 1, \\ a'/a &= 1 - \frac{1}{2} \varepsilon + \varepsilon_2, \\ b'/a &= 1 - \frac{1}{2} \varepsilon - \varepsilon_2, \\ c'/a &= 1 + \varepsilon. \end{aligned} \right\} \quad (295)$$

The reason why the ellipsoid was not referred to its principal axes in our general problem was that these may in many cases be far from convenient axes to refer the applied forces to.

§60. As showing how the bodily forces might originate, let us take a nearly spherical ellipsoid acted on by a very distant gravitating body.

Let M' be the mass of this body, R its distance, and let its angular coordinates referred to axes at the centre of the ellipsoid be θ' , ϕ' . Then at a point

r, θ, ϕ in the ellipsoid, the gravitation potential due to the distant body is to a second approximation

$$\begin{aligned} \frac{M'}{R} + \frac{M'r^2}{R^3} & \left[\frac{3 \cos^2 \theta' - 1}{2} \cdot \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} + \frac{3}{2} \sin 2\theta' \cos \phi' \sin \theta \cos \theta \cos \phi \right. \\ & + \frac{3}{2} \sin 2\theta' \sin \phi' \sin \theta \cos \theta \sin \phi + \frac{3}{4} \sin^2 \theta' \cos 2\phi' \sin^2 \theta \cos 2\phi \\ & \left. + \frac{3}{4} \sin^2 \theta' \sin 2\phi' \sin^2 \theta \sin 2\phi \right]^* \end{aligned}$$

The variable part becomes identical with the expression (4) for the potential of the bodily forces when we put

$$\left. \begin{aligned} \frac{3 \cos^2 \theta' - 1}{2} \frac{M'}{R^3} &= V_2, \\ \frac{3}{2} \sin 2\theta' \frac{M'}{R^3} &= V_{2,1}, \\ \frac{3}{4} \sin^2 \theta' \frac{M'}{R^3} &= V_{2,2}, \\ \phi' &= \beta_1 = \frac{1}{2} \beta_2. \end{aligned} \right\} \quad (296)$$

Our solution thus gives the "tides" on the equilibrium theory in the nearly spherical ellipsoid due to the distant body, on the hypothesis that the ellipsoid may be regarded as an isotropic elastic solid.

§61. If the attracted body be spherical, the forces arising from the second harmonic terms are in equilibrium; otherwise there is precession and nutation.

The couples about the principal axes of the ellipsoid being given in works on astronomy, may conveniently be used to test the accuracy of our results (285) to (287).

Thus if A, B, C be the principal moments of inertia of the ellipsoid, and α, β, γ the direction angles of the distant body referred to the principal axes, the moment about the axis of y in the direction z to x is†

$$-\frac{3M'}{R^3} (C - A) \cos \alpha \cos \gamma.$$

* See Todhunter's "The Functions of Laplace . . . , " Art. 169.

† Routh's "Rigid Dynamics," p. 497, 8d edition.

Taking M for the mass, a' , b' , c' for the principal semi-axes of the ellipsoid, the component couples thus become

$$\begin{aligned} \text{about the axis of } x, & -\frac{3}{5} \frac{MM'}{R^3} (c'^2 - b'^2) \cos \beta \cos \gamma, \\ \text{" " } y, & -\frac{3}{5} \frac{MM'}{R^3} (a'^2 - c'^2) \cos \gamma \cos \alpha, \\ \text{" " } z, & -\frac{3}{5} \frac{MM'}{R^3} (b'^2 - a'^2) \cos \alpha \cos \beta. \end{aligned}$$

Now by (295) we have to a first approximation

$$\left. \begin{aligned} (a'^2 - b'^2)/a^2 &= 4\varepsilon_2, \\ (a'^2 - c'^2)/a^2 &= 2\varepsilon_2 - 3\varepsilon_1, \\ (c'^2 - b'^2)/a^2 &= 2\varepsilon_2 + 3\varepsilon_1, \end{aligned} \right\} \quad (297)$$

where a is the mean radius; also

$$\cos \gamma = \cos \theta', \quad \cos \alpha = \sin \theta' \cos \phi', \quad \cos \beta = \sin \theta' \sin \phi'.$$

Thus the component couples are

$$\begin{aligned} \text{about the axis of } x, & -\frac{3}{5} \frac{MM'a^2}{R^3} (3\varepsilon + 2\varepsilon_2) \cos \theta' \sin \theta' \sin \phi', \\ \text{" " } y, & -\frac{3}{5} \frac{MM'a^2}{R^3} (2\varepsilon_2 - 3\varepsilon) \cos \theta' \sin \theta' \cos \phi', \\ \text{" " } z, & \frac{6}{5} \frac{MM'a^2}{R^3} \varepsilon_2 \sin^2 \theta' \sin 2\phi'. \end{aligned}$$

Finally, substituting $4\pi\rho a^3/3$ for M and using (294) and (296), we find these components become

$$\begin{aligned} & -\frac{4}{15} \pi\rho a^5 (3\varepsilon + 2\varepsilon_2) \sin \beta_1 V_{2,1}, \\ & \frac{4}{15} \pi\rho a^5 (3\varepsilon - 2\varepsilon_2) \cos \beta_1 V_{2,1}, \\ & \frac{32}{15} \pi\rho a^5 \varepsilon_2 \sin \beta_2 V_{2,2}. \end{aligned}$$

These expressions agree, as they ought, with (285), (286) and (287), since ε_1 and α_2 vanish and none of the Θ constants exist.

§62. As the examples by which we are about to illustrate the general solution are particular cases of the gravitational problem just referred to, one point

in connection with it claims our attention, viz. that as the nearly spherical ellipsoid is not in equilibrium under the action of the distant body, the application of our solution to it may be questioned. The ellipsoid may, however, be in equilibrium under the action of a series of distant bodies, and since the "uncompensated" terms depend only on the statical resultant, they would in such a case entirely disappear and our solution would give correctly the effects to be attributed to the particular distant body under consideration.

Even if the ellipsoid be not in equilibrium, it will probably in general be convenient to classify the strain under two heads, one part being the strain given by the elastic theory on the hypothesis that equilibrium is maintained, and the other, if such exists, answering to the actual state of motion.

When rotation exists about an axis, whether uniform or not, strains corresponding to the "centrifugal" forces obviously exist. Uniform motion in a straight line is perhaps the only species of motion in which strains may not be expected to arise. An example will show the difficulty of the question in actual practice. Suppose what would, in the absence of external action, be a homogeneous spherical ball to start falling from rest towards the earth. Since "gravity" increases as the distance from the earth diminishes, the portion of the ball nearest the earth is always acted on by a greater gravitational force than the portion more remote, and would always be moving faster if there were no cohesional force. Thus in reality the ball must be in a state of tension in lines parallel to the vertical diameter, and the amount of this tension will vary as the ball approaches the earth. To determine exactly what the strain is at every point at every instant seems not unlikely to be a difficult business. It may be approximately the same as that given by a theory which treats the ball as at rest and acted on by a force given by the second harmonic term in the instantaneous value of the gravitational potential. There may, however, be oscillations set up in the ball, depending partly on the exact nature of the initial condition, and an equilibrium theory can take no account of these.

§63. The first example we shall consider is a nearly spherical spheroid under the gravitational influence of a distant body in its polar axis. Let m denote the mass, R the distance of the distant body, and let the equation to the spheroid be

$$r = a(1 + \epsilon P_2). \quad (298)$$

In our general formulæ we have

$$V_3 = M'/R^3, \\ V_{2,1} = V_{2,2} = 0.$$

Substituting these values we get,

from (245) and (246),

$$Y_0 = \frac{24(4m-n)}{5(3m-n)(19m-5n)} \varepsilon a^3 \rho \frac{M'}{R^3};$$

from (231), (247), (248) and (249),

$$Y_2 + \delta Y_2 = \frac{3}{19m-5n} \left\{ \frac{7m-n}{m+n} - 2\varepsilon \frac{5m-3n}{19m-5n} \right\} \rho \frac{M'}{R^3}, \\ Z_2 + \delta Z_2 = \frac{1}{n(19m-5n)} \left\{ 2(4m-n) + \varepsilon \frac{89m^2-48mn+7n^2}{19m-5n} \right\} \frac{a^2 \rho M'}{R^3}; \quad (299)$$

from (261), (262) and (263),

$$Y_4 = 0, \\ Z_4 = \frac{24(4m-n)}{35n(19m-5n)} \varepsilon \rho \frac{M'}{R^3};$$

all the other coefficients vanish.

These results may also be derived from equations (74) to (79) of Section I.

Substituting for the constants in the general solution (1), (2), (3) of Section I, we find

$$\Delta = \frac{2\rho M' R^{-3}}{19m-5n} \left[\frac{12}{5} \varepsilon a^3 \frac{4m-n}{3m-n} + \left\{ 1 - 3\varepsilon \frac{5m-3n}{19m-5n} \right\} r^3 P_2 \right], \quad (300)$$

$$u = \frac{\rho M' R^{-3}}{n(19m-5n)} \left[\frac{8}{5} \varepsilon a^3 r \frac{n(4m-n)}{3m-n} + P_2 \left\{ 2(4m-n) a^2 r - (3m-n) r^3 \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\varepsilon}{19m-5n} \left((89m^2-48mn+7n^2) a^2 r + \frac{6}{7} (m-n)(5m-3n) r^3 \right) \right\} \right. \\ \left. + \frac{24}{35} \varepsilon r^3 P_4 (4m-n) \right], \quad (301)$$

$$v = \frac{\rho M' R^{-3}}{n(19m-5n)} \frac{d}{d\theta} \left[r^3 P_2 \left\{ -\frac{1}{2} (5m-n) + \frac{1}{7} \varepsilon \frac{(5m+2n)(5m-3n)}{19m-5n} \right\} \right. \\ \left. + a^2 r P_2 \left\{ 4m-n + \frac{1}{2} \varepsilon \frac{89m^2-48mn+7n^2}{19m-5n} \right\} + \frac{6}{35} \varepsilon r^3 P_4 (4m-n) \right]. \quad (302)$$

§64. The change in shape is found from the surface values of u and v , obtained by substituting $a(1 + \varepsilon P_2)$ for r .

Calling these values u_s and v_s , we have

$$u_s = \frac{a^3 \rho M' R^{-3}}{n(19m - 5n)} \left[-\frac{3}{5} \varepsilon \frac{m^2 - 12mn + 3n^2}{3m - n} + P_2 \left\{ 5m - n + \frac{3}{7} \varepsilon \frac{205m^2 - 112mn + 19n^2}{19m - 5n} \right\} + \frac{6}{35} \varepsilon P_4 (13m - n) \right], \quad (303)$$

$$v_s = \frac{a^3 \rho M' R^{-3}}{n(19m - 5n)} \frac{d}{d\theta} \left[P_2 \left\{ \frac{1}{2} (3m - n) + \frac{2}{7} \varepsilon \frac{135m^2 - 73mn + 8n^2}{19m - 5n} \right\} - \frac{3}{70} \varepsilon P_4 (5m + n) \right]. \quad (304)$$

If $(u)_p$ and $(u)_e$ be the increments in the polar and equatorial semi-diameters respectively,

$$(u)_p = \frac{a^3 \rho M' R^{-3}}{n(19m - 5n)} \left[5m - n + \frac{24}{5} \varepsilon \frac{m(79m^2 - 37mn + 4n^2)}{(3m - n)(19m - 5n)} \right], \quad (305)$$

$$(u)_e = \frac{a^3 \rho M' R^{-3}}{n(19m - 5n)} \left[-\frac{1}{2} (5m - n) - \frac{3}{20} \varepsilon \frac{637m^3 - 1491m^2n + 667mn^2 - 85n^3}{(3m - n)(19m - 5n)} \right]. \quad (306)$$

When terms in ε are neglected the increase in the polar diameter is exactly double the diminution in the equatorial, and to this degree of approximation the volume is unaltered. These first approximation results are, of course, obtainable from the solution for the perfect sphere.

When terms in ε are retained we find, assuming $m \nless n$, that the polar diameter is more or less increased than in a sphere of the same volume according as the spheroid is prolate or oblate.

§65. When ε is of the same order of magnitude as it would be if (298) represented the strained form of what but for the strain would be a spherical surface, the alteration of form is easily found. We have only to put

$$r = a(1 + \varepsilon P_2) \pm u_s,$$

taking the $+$ or the $-$ sign according as we regard (298) as the unstrained and seek the strained surface, or regard it as the strained and seek the unstrained surface.

If, however, ϵ , though small, be large compared to a surface strain, we must take account of the alteration in the inclination of the radius vector to the axis. To the present degree of approximation we may take the increment of this inclination as $\alpha^{-1}v'_s$, where v'_s represents the principal term in the surface value of v , or

$$v'_s = \frac{\alpha^3 \rho M' R^{-3} (3m - n)}{2n(19m - 5n)} \frac{dP_2}{d\theta}.$$

If (298) represents the unstrained surface, then the surface after strain is given by

$$r = a \left\{ 1 + \epsilon \frac{3 \cos^2(\theta - \alpha^{-1}v'_s) - 1}{2} \right\} + u_s.$$

The increment in a radius vector amounts to

$$u_s - \epsilon v'_s \frac{dP_2}{d\theta} = u_s - \frac{\epsilon \alpha^3 (\rho M' R^{-3}) (3m - n)}{2n(19m - 5n)} \left(\frac{dP_2}{d\theta} \right)^2.$$

§66. Supposing, for instance, we wished to calculate the increment $\delta\bar{v}$ in the volume from the alteration of the surface, we should, as terms in ϵ^2 are neglected, put

$$\delta\bar{v} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(u_s - \epsilon v'_s \frac{dP_2}{d\theta} \right) r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi.$$

Substituting the values of u_s , v_s and r , we get

$$\begin{aligned} \delta\bar{v} = & \frac{\alpha^5 \rho M' R^{-3}}{n(19m - 5n)} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \theta \, d\theta \, d\phi \left(1 + 2\epsilon P_2 \right) \left[-\frac{3}{5} \epsilon \frac{m^2 - 12mn + 3n^2}{3m - n} \right. \\ & \left. + (5m - n) P_2 - \frac{1}{2} \epsilon (3m - n) \left(\frac{dP_2}{d\theta} \right)^2 + \text{terms in } \epsilon P_2 \text{ and } \epsilon P_4 \right]. \end{aligned}$$

The terms in ϵP_2 and ϵP_4 inside the square bracket clearly lead to no terms of the order retained; and referring to (7) and (8), and to the well-known result of integrating spherical harmonics, we easily find

$$\delta\bar{v} = \frac{\alpha^5 \rho M' R^{-3}}{n(19m - 5n)} 4\pi \epsilon \left[-\frac{3}{5} \frac{m^2 - 12mn + 3n^2}{3m - n} + \frac{2}{5} (5m - n) - \frac{3}{5} (3m - n) \right],$$

or

$$\delta\bar{v} = \frac{8}{5} \frac{\pi \epsilon \alpha^5 \rho M' R^{-3}}{3m - n}. \quad (307)$$

The volume is thus increased or diminished according as the spheroid is prolate or oblate.

We may also obtain (307) by integrating the value (300) of Δ throughout the volume bounded by (298).

A verification quite independent of the present solution is obtained from the general formula given in §25. In the present instance this assumes the form

$$(3m - n) \delta \bar{v} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{a(1+\epsilon P_2)} r \frac{dV}{dr} \cdot r^2 \sin \theta d\phi d\theta dr,$$

where $V = M' r^2 R^{-3} P_2$.

The result (307) follows in a line or two.

This is a satisfactory confirmation, so far as it goes, of the accuracy of our solution. The only terms in ϵ it actually tests are, however, those independent of θ in the values of Δ and u .

§67. As an example where there is not symmetry about an axis, take the case of the nearly spherical ellipsoid

$$r = a(1 + \epsilon P_2 + \epsilon_2 P_{2,2} \cos 2\phi) \quad (308)$$

under the gravitating action of a body of mass M' at a great distance R , in the direction $\phi = 0$, $\theta = \pi/2$.

The harmonic terms in the potential are

$$(r^3 R^{-3} M') \left\{ -\frac{1}{2} P_2 + \frac{3}{4} P_{2,2} \cos 2\phi \right\};$$

thus in our general solution we are to put

$$\left. \begin{aligned} V_2 / \left(-\frac{1}{2} \right) &= V_{2,2} / \left(\frac{3}{4} \right) = M'/R^3, \\ \alpha_2 &= \beta_2 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (309)$$

The arbitrary constants which do not vanish have the following values :

$$\begin{aligned}
 Y_0 &= \frac{12(4m-n)}{5(3m-n)(19m-5n)} (2\varepsilon_2 - \varepsilon) \rho a^2 R^{-3} M', \\
 Y_2 + \delta Y_2 &= -\frac{3}{2} \frac{\rho R^{-3} M'}{19m-5n} \left[\frac{7m-n}{m+n} - 2(\varepsilon + 2\varepsilon_2) \frac{5m-3n}{19m-5n} \right], \\
 Z_2 + \delta Z_2 &= \frac{-\rho a^2 R^{-3} M'}{n(19m-5n)} \left[4m-n + \frac{1}{2} (\varepsilon + 2\varepsilon_2) \frac{89m^2-48mn+7n^2}{19m-5n} \right], \\
 Y_{2,2} + \delta Y_{2,2} &= \frac{3}{2} \frac{\rho R^{-3} M'}{19m-5n} \left[\frac{3}{2} \frac{7m-n}{m+n} + (3\varepsilon - 2\varepsilon_2) \frac{5m-3n}{19m-5n} \right], \\
 Z_{2,2} + \delta Z_{2,2} &= \frac{1}{2} \frac{\rho a^2 R^{-3} M'}{n(19m-5n)} \left[3(4m-n) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} (3\varepsilon - 2\varepsilon_2) \frac{89m^2-48mn+7n^2}{19m-5n} \right], \\
 Z_4 &= \frac{4(4m-n)}{35n(19m-5n)} (\varepsilon_2 - 3\varepsilon) \rho R^{-3} M', \\
 Z_{4,2} &= \frac{4m-n}{2n(19m-5n)} (3\varepsilon - 2\varepsilon_2) \rho R^{-3} M', \\
 Z_{4,4} &= \frac{4m-n}{2n(19m-5n)} \varepsilon_2 \rho R^{-3} M', \\
 W_{3,2}' &= \frac{m}{4n(19m-5n)} (3\varepsilon + 2\varepsilon_2) \rho R^{-3} M'.
 \end{aligned} \tag{310}$$

Substituting the above values of the arbitrary constants along with the values of V_2 and $V_{2,2}$ from (309) in (1), (2), (3) and (4) of Section I, we get the dilatation and displacements.

Since there is no Y constant with suffix 4, there is no surface harmonic of the 4th degree in the expression for the dilatation, but unless both ε and ε_2 vanish there will exist at least two Z constants with suffix 4, and so surface harmonics of the fourth degree will present themselves in the values of the displacements.

Since Y_0 exists unless

$$2\varepsilon_2 = \varepsilon, \tag{311}$$

we see by reference to (297) that there will be a term in the dilatation independent of the angular coordinates, and a corresponding pure radial displacement, unless

$$b'^2 + c'^2 = 2a'^2; \tag{312}$$

or the square on the principal diameter on which the distant body lies must be the mean of the squares on the three principal diameters if the pure radial displacement is to vanish.

Again, by reference to the value of $W'_{3,2}$ we see that a pure transverse displacement will exist unless

$$3\varepsilon + 2\varepsilon_2 = 0, \quad (313)$$

a relation signifying that the surface is a spheroid of revolution about the axis on which the distant body lies.

§68. The expressions for the displacements answering to (310) are rather long, so we shall confine our attention to the radial displacement as the most interesting. For it we have

$$\begin{aligned} u = & \frac{\rho M' R^{-3}}{19m - 5n} \left[\frac{4}{5} \frac{4m - n}{3m - n} (2\varepsilon_2 - \varepsilon) a^2 r \right. \\ & + \frac{1}{2n} \left\{ (4m - n) a^2 r - \frac{1}{2} (3m - n) r^3 \right\} (-2P_2 + 3P_{2,2} \cos 2\phi) \\ & - \frac{1}{2n(19m - 5n)} \left\{ \frac{1}{2} (89m^2 - 48mn + 7n^2) a^2 r \right. \\ & + \frac{3}{7} (m - n)(5m - 3n) r^3 \left. \right\} \{ 2(\varepsilon + 2\varepsilon_2) P_2 + (3\varepsilon - 2\varepsilon_2) P_{2,2} \cos 2\phi \} \\ & + \frac{4m - n}{n} r^3 \left\{ \frac{4}{35} (\varepsilon_2 - 3\varepsilon) P_4 + \frac{1}{2} (3\varepsilon - 2\varepsilon_2) P_{4,2} \cos 2\phi \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2} \varepsilon_2 P_{4,4} \cos 4\phi \right\} \right]. \quad (314) \end{aligned}$$

Putting $\varepsilon_2 = 0$, we have the case of a spheroid with a distant attracting body in its equatorial plane. In this case the radial displacement at the surface is given by

$$\begin{aligned} u_s = & \frac{\rho a^3 M' R^{-3}}{n(19m - 5n)} \left[\frac{1}{4} (5m - n) (-2P_2 + 3P_{2,2} \cos 2\phi) \right. \\ & + 3\varepsilon \left\{ \frac{1}{10} \frac{m^2 - 12mn + 3n^2}{3m - n} - \frac{205m^2 - 112mn + 19n^2}{28(19m - 5n)} (2P_2 + 3P_{2,2} \cos 2\phi) \right. \\ & \left. \left. - (13m - n) \left(\frac{1}{35} P_4 - \frac{1}{8} P_{4,2} \cos 2\phi \right) \right\} \right]. \quad (315) \end{aligned}$$

It will be noticed that the value of $-2P_2 + 3P_{2,2} \cos 2\phi$ is the same for $\theta = 0$ as for $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\phi = \frac{\pi}{2}$; also that the values of both $2P_2 + 3P_{2,2} \cos 2\phi$ and $\frac{1}{35} P_4 - \frac{1}{8} P_{4,2} \cos 2\phi$ are the same for $\theta = 0$ as for $\theta = \pi/2$, $\phi = 0$. Thus

the principal terms in u , have the same value at the ends of the polar diameter and the equatorial diameter perpendicular to that on which the distant body lies, whereas the subsidiary terms have the same value at the ends of the polar diameter and the equatorial diameter on which the body lies.

Employing $(u)_p$, $(u)_e$ and $(u)_{\epsilon}$ for the increments of the polar semi-diameter, the equatorial semi-diameter on which the distant body lies, and the perpendicular semi-diameter respectively of the spheroid, we find

$$(u)_p = \frac{-\rho\alpha^3 M' R^{-3}}{n(19m-5n)} \left\{ \frac{1}{2} (5m-n) + \frac{12}{5} \epsilon \frac{m(79m^2-37mn+4n^2)}{(3m-n)(19m-5n)} \right\}, \quad (316)$$

$$(u)_e = \frac{\rho\alpha^3 M' R^{-3}}{n(19m-5n)} \left\{ 5m-n - \frac{12}{5} \epsilon \frac{m(79m^2-37mn+4n^2)}{(3m-n)(19m-5n)} \right\}, \quad (317)$$

$$(u)_{\epsilon} = \frac{-\rho\alpha^3 M' R^{-3}}{n(19m-5n)} \left\{ \frac{1}{2} (5m-n) - \frac{3}{20} \epsilon \frac{1901m^3-2083m^2n+731mn^2-85n^3}{(3m-n)(19m-5n)} \right\}, \quad (318)$$

Comparing (316) with (305) we see that the increase in the polar diameter of a nearly spherical spheroid, due to the attraction of a distant body situated on that diameter produced, is, as far as terms in ϵ , exactly double the diminution experienced by that diameter when the attracting body is at the same distance away in the equatorial plane.

Again, from (317) and (318) we find

$$(u)_e + (u)_{\epsilon} = \frac{\rho\alpha^3 M' R^{-3}}{n(19m-5n)} \left\{ \frac{1}{2} (5m-n) + \frac{3}{20} \epsilon \frac{637m^3-1491m^2n+667mn^2-85n^3}{(3m-n)(19m-5n)} \right\},$$

which, with a change of sign, is precisely the expression occurring on the right-hand side of (306).

We accordingly have the curious result that when a distant body is in the equator of a spheroid, the algebraical sum of the increments to the equatorial diameter on which the distant body lies and the perpendicular equatorial diameter is numerically equal, so far as terms in ϵ , to the reduction in an equatorial diameter when the body is the same distance away on the polar axis.

Assuming $m-n$ positive, i. e. Poisson's ratio positive, we find from (316) and (318) that when a nearly spherical spheroid is attracted by a distant body in its equatorial plane, the reduction of the equatorial diameter perpendicular to

that on which the body lies is greater or less than the reduction of the polar diameter according as ϵ is negative or positive, i. e. according as the spheroid is oblate or prolate.

§69. Taking the general case of the surface (308), we find, by integrating the value of Δ throughout the volume, that the increment $\delta\bar{v}$ in volume is given by

$$\delta\bar{v} = \frac{4}{5} \frac{\pi(2\epsilon_2 - \epsilon)}{3m - n} \rho a^5 M' R^{-3}. \quad (319)$$

This result is easily verified by the second method of §25. It shows that the change in volume is zero only when (311) holds, and the general law is that the volume is increased or diminished according as the square of the diameter along which the distant body lies is greater or less than the mean of the squares on the two other principal diameters.

§70. The general case of a nearly spherical spheroid acted on by a distant body, the diameter through which makes an angle θ' with the axis of symmetry, comes of course within the range of the present method. It presents various points of interest, but I shall only refer to the expression for the increment of volume, viz.

$$\delta\bar{v} = \frac{4}{5} \frac{\pi\epsilon(3\cos^2\theta' - 1)}{3m - n} \rho a^5 M' R^{-3}. \quad (320)$$

It shows that in an oblate spheroid, for which ϵ is negative, the volume is increased or diminished according as θ' is greater or less than θ_0 , where

$$\theta_0 = \cos^{-1}(\sqrt{1/3}).$$

For a prolate spheroid the exact reverse holds.

§71. If for a moment we assumed our formulæ to apply to the action of the sun on the earth,* we should have the earth's volume increased above what it would be but for the sun's attraction, and this increase would be the greater

*The earth in its surface layers is far from isotropic, and what its constitution may be except close to the surface is unknown, so that the subsequent remarks are purely speculative.

the nearer the sun to the equator. From this cause the volume would be a maximum at the two equinoxes and a minimum at the two solstices, going through a complete cycle in six months.

§72. Such an hypothesis may possess an interest for physicists in quest of agencies to account for periodic fluctuations in terrestrial phenomena. Its possible bearing on such phenomena as earthquakes, naturally associated with ruptures produced by internal stresses, is too obvious to require pointing out; but as the possible connection with magnetic phenomena is a little less obvious, it may be briefly indicated.

Let us consider what would happen if the nearly spherical spheroid were of magnetized iron,* the distant body for simplicity being supposed non-magnetic. The magnetization of iron varies with the state of strain, whether the iron is being magnetized by external influences or is possessed only of "residual" magnetism, the variation being in some cases very considerable. Thus as the state of strain alters, so also do the external manifestations of the spheroid's magnetism. Now suppose the spheroid to have a diurnal rotation round its axis, and for simplicity regard the strain at any instant as given by the equilibrium theory. Then it is obvious from the occurrence of $\cos 2\phi$ in (315) that the intensity of magnetic phenomena at any point on the surface will show a semi-diurnal variation, since the strain at every point throughout the spheroid has a semi-diurnal variation.†

If the distant body were at a constant distance away in the equatorial plane there would be only a cycle with a semi-diurnal period.‡ But if the diameter pointing to the distant body alter its inclination to the equator, going through a complete cycle in one year, there will be, cf. (320), a corresponding fluctuation of strain at every point with a semi-annual period, and so a variation of magnetic phenomena with a semi-annual period.

*Iron is specified merely for brevity. The permeability of other magnetic substances is also affected by strain. It is not intended to imply that the earth's interior is of iron.

† [Sept. 10.—Since the above was written, a letter from Prof. Cleveland Abbe, who was unaware I had been considering the subject, has recalled to my recollection the fact that this suggestion has been already made by Maxwell, "Electricity and Magnetism," Vol. II, Art. 474.]

‡ [Sept. 10.—The occurrence of $\cos 4\phi$ in (314) shows that in a nearly spherical *ellipsoid* there would also be a cycle, of small intensity, with a six hour period.]

If any action of this kind may be assigned to the sun, it is of course equally to be expected from the moon. If a very decided influence is exerted by the sun and no appreciable influence by the moon, the explanation cannot account for more than an insignificant portion of the phenomena, and some other cause must be sought for. This need not be any direct magnetic influence from the sun, as the heating* effect might be the exciting cause. It affects the superficial strains in addition to altering the electric conductivity of the air and the earth's surface layers.

*[Sept. 10.—The effects of *light* may also be important. See a paper by Elster and Geitel, Wien Sitz. 101, Abth. II, p. 708, 1892.]